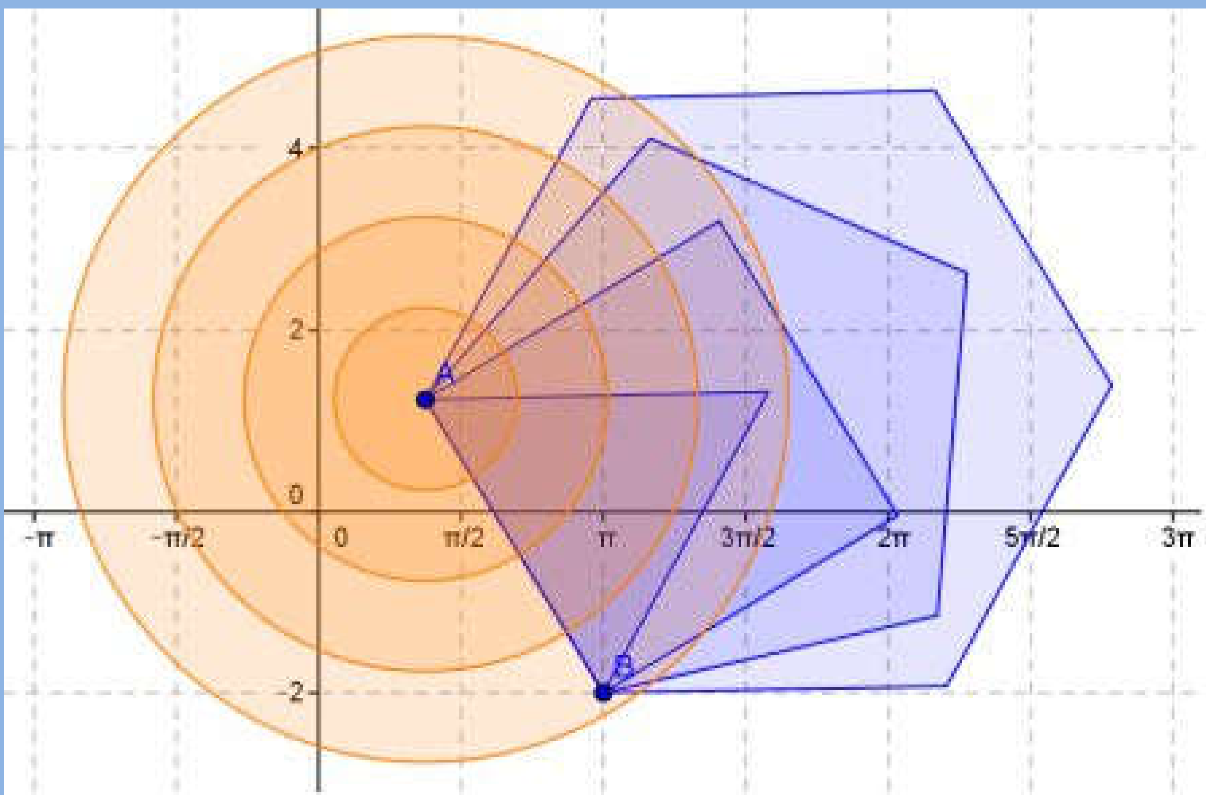
δρ Μιχάλης Τζούμας
Σχ. Συμβ. Μαθηματικών

Διδάσκοντας στην τάξη με το Geogebra



Αγρίνιο, 2015

Διδάσκοντας στην τάξη με το Geogebra

Αγρίνιο 2015
ISBN: 978-960-85583-7-3
Εκδόσεις: Αγριώνιον Αρχείον - Αγρίνιον

δρ Μιχάλης Τζούμας
Σχ. Συμβ. Μαθηματικών

Διδάσκοντας στην τάξη με το Geogebra

Αγρίνιο, 2015

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται κυρίως στους καθηγητές και τους υποψήφιους καθηγητές Μαθηματικών του Γυμνασίου και του Λυκείου και έχει ως σκοπό να τους εφοδιάσει με τις βασικές γνώσεις γύρω από ένα πολύ ισχυρό εργαλείο, όπως είναι το Geogebra (που κυκλοφορεί ελεύθερο στο διαδίκτυο), για την αντιμετώπιση πλήθους προβλημάτων που προκύπτουν, τόσο όσον αφορά τη διδασκαλία των Μαθηματικών, όσο και τη μελέτη αυτών, αφού η χρήση του Ηλεκτρονικού Υπολογιστή ενδείκνυται, τόσο για την εκτέλεση υπολογισμών, όσο και για τη σχεδίαση και απαιτεί στοιχειώδη γνώση γύρω από τη χρήση αυτού. Θεωρείται ιδανικό για όσους παρακολούθησαν ή παρακολουθούν το Β′ επίπεδο επιμόρφωσης, επειδή ο εμπλουτισμός των ψηφιακών σχολικών βιβλίων έχει ολοκληρωθεί και είναι στην κατεύθυνση της αξιοποίησης αυτών στο πλαίσιο των νέων προγραμμάτων σπουδών. Όπως αναφέρουν οι συντελεστές του έργου, βασικός στόχος ήταν τα ψηφιακά δομήματα να είναι σχεδιασμένα, ώστε να εντάσσονται στους ειδικούς στόχους του αντίστοιχου ΑΠΣ και να εμπλέκουν τους μαθητές σε μαθηματικές δραστηριότητες και σε συλλογικά συνεργατικά πλαίσια. Τα δομήματα, πλην ελάχιστων, είναι ανοικτά στον εκπαιδευτικό για διαμόρφωση – επέκταση και περαιτέρω εμπλουτισμό και ένα μεγάλο πλήθος από αυτά έχουν γίνει με τη χρήση του εκπαιδευτικού λογισμικού Geogebra.

Η ύλη του βιβλίου διαρθρώνεται σε δώδεκα κεφάλαια, όπου γίνεται η παρουσίαση των πιο βασικών εντολών του Geogebra, για την αντιμετώπιση βασικών μαθηματικών εννοιών, που συναντιούνται στα Μαθηματικά του Γυμνασίου και του Λυκείου και όχι πλήρης ανάλυση όλων των εντολών του πακέτου. Δηλαδή, η προσπάθειά μας είναι να δώσουμε το έναυσμα και την ευκαιρία σε αυτούς που ενδιαφέρονται να ενεργήσουν, να ασχοληθούν και να συνθέσουν εντολές από το Geogebra, για να το προσαρμόσουν εκεί που θέλουν, ώστε να επιτύχουν τη λύση του προβλήματος που αντιμετωπίζουν. Παράλληλα, για εξοικείωση, υπάρχουν έτοιμα φύλλα εργασίας αλλά και προβλήματα προς επίλυση, καθώς και ένας αριθμός από έτοιμα δομήματα που μπορεί κάποιος να τα κατεβάσει από τη διεύθυνση: http://mtzoumas.mysch.gr/geogebra/kef-xx.7z , όπου στη θέση kef-xx.7z γράφουμε π.χ. kef-01.7z ή kef-11.7z κλπ.

Αγρίνιο, Ιανουάριος 2015

Κεφάλαιο 1ο

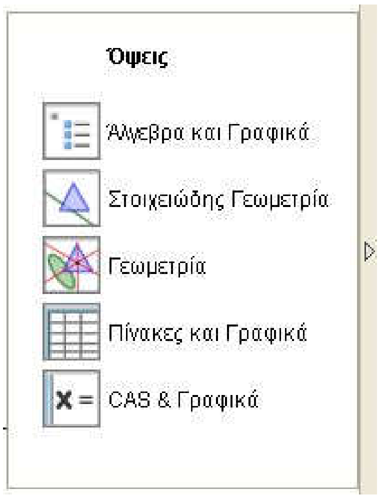
Το Λογισμικό Geogebra.

Στόχοι του μαθήματος: Μετά το 1ο κεφαλαίο οι αναγνώστες θα είναι ικανοί:

- να δημιουργούν ένα μικροπείραμα σχετικό με ευθείες, ημιευθείες, ευθύγραμμα ή τεθλασμένα τμήματα.

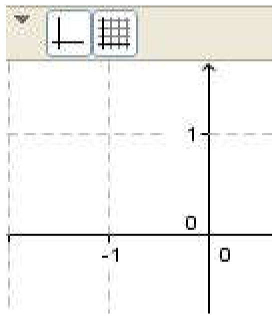
1.1. Το περιβάλλον.

Το λογισμικό Geoge-bra είναι ίσως το πλέον διαδεδομένο και εκείνο που χρησιμοποιείται περισσότερο από κάθε άλλο στη διδασκαλία των Μαθηματικών, αλλά και στην επίλυση γεωμετρικών και όχι μόνον προβλημάτων αυτών. Η ευκολία χρήσης και λειτουργίας των αντικειμένων του και το μηδενικό κόστος του το κάνουν δημοφιλές. Αυτό δε σημαίνει ότι δεν υπάρχουν άλλα λογισμικά, που σε πολλές περιπτώσεις μας δίνουν περισσότερο εύκολες λύσεις. Επίσης, το γεγονός ότι συνδυάζει πλέον και τους τρεις κλάδους των Μαθηματικών, Άλγεβρα, Ανάλυση και Γεωμετρία το κάνουν μοναδικό.



Σχήμα1.1

Κατά την εκκίνηση εμφανίζεται στην οθόνη το παράθυρο στο Σχήμα 1.1, προκειμένου να επιλέξουμε τον χώρο εργασίας μας. Το παράθυρο αυτό είναι στη διάθεσή μας καθ' όλη τη διάρκεια της εργασίας μας. Το μικρό τριγωνάκι ( ) στα δεξιά μπορεί να αποκρύψει ή να εμφανίσει το παράθυρο αυτό. Κάθε μία από αυτές τις επιλογές δεν επηρεάζει τη λειτουργία του προγράμματος, αλλά αλλάζει το περιβάλλον εργασίας μας, κάνοντάς το περισσότερο λειτουργικό. Κάθε μία από αυτές τις επιλογές δεν επηρεάζει τη λειτουργία του προγράμματος, αλλά αλλάζει το περιβάλλον εργασίας μας, κάνοντάς το περισσότερο λειτουργικό. Δεν υπάρχει λόγος να χάσουμε πολύτιμο χώρο και χρόνο αναλύοντας τώρα κάθε ένα από αυτά τα περιβάλλοντα. Καθώς θα προχωρούν τα μαθήματα, θα γίνεται κατανοητό κάθε ένα από αυτά. Αξίζει, όμως, τον κόπο να πειραματιστεί κάποιος με τις διαφορετικές επιλογές και να δει το περιβάλλον που ανοίγεται σε κάθε μία περίπτωση. Επίσης, στο επάνω μέρος της οθόνης εμφανίζονται επιλογές που έχουν σχέση με τους άξονες και το πλέγμα της οθόνης. Μπορούμε, λοιπόν, να αποκρύπτουμε ή να εμφανίζουμε τους άξονες και το πλέγμα στην οθόνη Σχήμα 1.2, αλλά και την επιλογή αυτή από το μικρό τριγωνάκι ( ) που υπάρχει δίπλα στο κουμπί που εμφανίζει/αποκρύπτει τους άξονες. Έτσι, όταν μιλάμε για σύστημα συντεταγμένων και για σημεία στο Καρτεσιανό επίπεδο με τις συντεταγμένες τους, είναι χρήσιμο στην οθόνη να υπάρχουν οι άξονες και το πλέγμα, ενώ, όταν εργαζόμαστε στην Ευκλείδεια γεωμετρία, αυτά δεν μας χρειάζονται και ως εκ τούτου, λογικό είναι να τα αποκρύπτουμε.

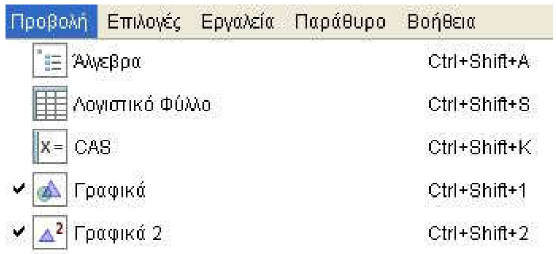


Σχήμα 1.2

Όπως στα περισσότερα λογισμικά, έτσι και στο Geogebra δεν υπάρχει μόνο μία μοναδική επιλογή για να κάνουμε κάτι. Έτσι, εδώ τις παραπάνω λειτουργίες μπορούμε να τις κάνουμε και από το «Προβολή», Σχήμα 1.3. Μπορούμε, δηλαδή, να επιλέξουμε να εμφανίσουμε ή να αποκρύψουμε την «Άλγεβρα» ή το «Λογιστικό Φύλλο» ή και τα παράθυρα της Γεωμετρίας (Γραφικά). Μάλιστα τώρα μας δίνει την δυνατότητα να έχουμε δύο κομμάτια με γραφικά στη οθόνη μας, τα «Γραφικά» και τα «Γραφικά 2». Θα δούμε στη συνέχεια πόσο χρήσιμο και λειτουργικό είναι κάτι τέτοιο.

1.2. Σχεδιάζοντας Σημεία και Ευθείες.

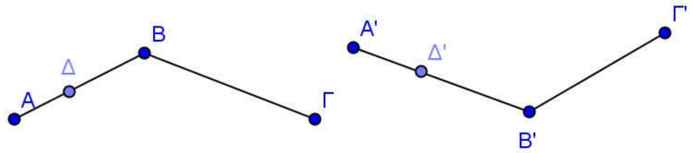
Ο σχεδιασμός στο λογισμικό Geogebra ακολουθεί τους κανόνες σχεδιασμού της Γεωμετρίας. Έτσι, για να σχεδιάσουμε ένα σημείο είναι αρκετό να κάνουμε απλά ένα κλικ στη θέση που θέλουμε το σημείο, αρκεί να έχουμε επιλέξει το κουμπί ( ) που σχεδιάζει σημεία, ενώ, για να σχεδιάσουμε μία ευθεία, αρκεί να επιλέξουμε το κουμπί ( ) που σχεδιάζει ευθείες και να κάνουμε κλικ πάνω σε δύο υπάρχοντα σημεία ή αν δεν υπάρχουν, σε δύο θέσεις στο παράθυρο σχεδίασης, οπότε το Geogebra δημιουργεί δύο καινούργια σημεία και σχεδιάζει την ευθεία που αυτά ορίζουν.



Σχλημα 1.3

1.3. Σχεδιάζοντας Ημιευθείες και Τεθλασμένες.

Προκειμένου να κάνουμε άλλες ενέργειες, πρέπει να επανέλθουμε στην αρχική μας κατάσταση, που είναι η κατάσταση μεταφοράς, προφανώς από το κουμπί ( ) της μεταφοράς. Πλέον, μπορούμε να μεταφέρουμε το σημείο μας (ή την ευθεία μας) μέσα στην οθόνη σε οποιαδήποτε θέση, αρκεί να μετακινήσουμε το ποντίκι μας στο αντικείμενο που θέλουμε να μεταφέρουμε, οπότε το μικρό σταυρουδάκι ( ), όταν έρθει πάνω σε ένα αντικείμενο (σημείο ή ευθεία), παίρνει το σχήμα ( ) της μεταφοράς. Τώρα, κρατώντας πατημένο το αριστερό πλήκτρο του ποντικιού, αυτό παίρνει τη μορφή χεράκι ( ) και μπορούμε να μεταφέρουμε το αντικείμενο (σημείο ή ευθεία) στην επιθυμητή θέση. Δοκιμάζοντας, θα παρατηρήσετε ότι η ευθεία μεταφέρεται παράλληλα προς εαυτή. Για να αλλάξετε τη διεύθυνση αυτής θα πρέπει να μετακινήσετε ένα από τα σημεία ορισμού της.



Σχήμα 1.4

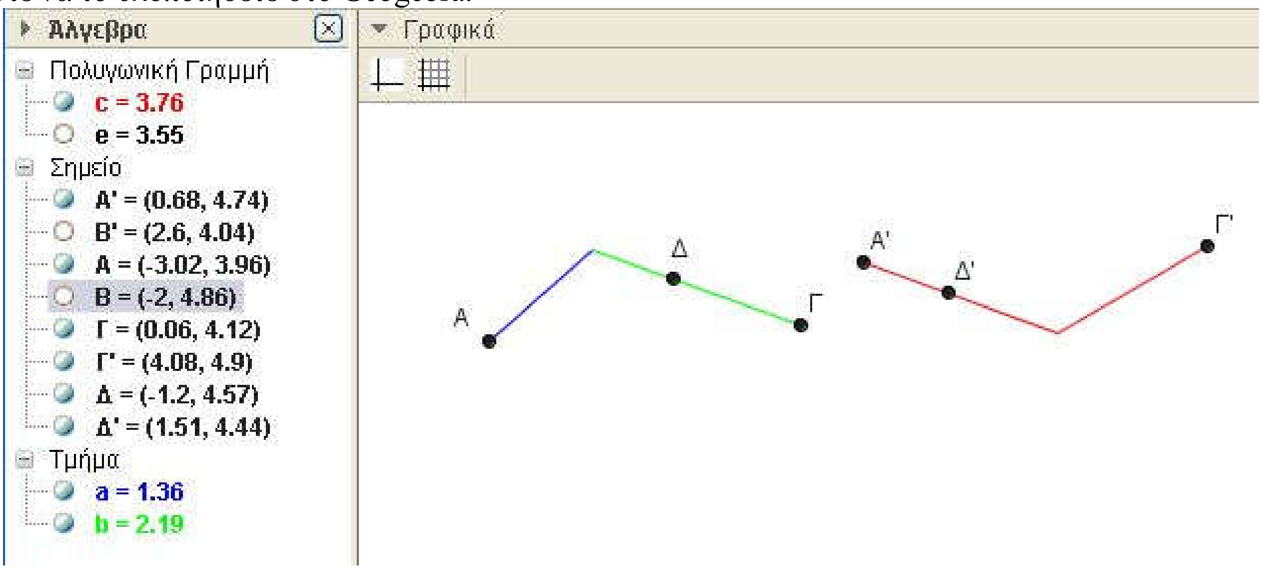
Ο σχεδιασμός των ημιευθειών και των τεθλασμένων ακολουθεί τους παραπάνω κανόνες, δηλαδή επιλέγοντας το κατάλληλο κουμπί (εργαλείο) κατασκευάζουμε την ημιευθεία με την παρατήρηση ότι το πρώτο σημείο σχεδιασμού είναι πάντοτε η αρχή και το δεύτερο δείχνει την κατεύθυνση. Παρόμοια, για να σχεδιάσουμε ένα τεθλασμένο τμήμα επιλέγουμε τα σημεία που θέλουμε να είναι άκρα των επιμέρους ευθυγράμμων τμημάτων διαδοχικά και ως τελευταίο εκείνο που ξεκινήσαμε. Το τεθλασμένο τμήμα δημιουργείται, ενώ το τμήμα που κλείνει το σχήμα (τελευταίο – πρώτο) παραλείπεται. Ίσως εδώ κάποιος να έλεγε ότι, αν συνδέσω τα αντίστοιχα σημεία με ευθύγραμμα τμήματα, θα είναι το ίδιο. Όμως, κάτι τέτοιο είναι λάθος, αφού στη μία περίπτωση έχουμε δύο αντικείμενα συνδεδεμένα, ενώ στην άλλη ένα αντικείμενο ενιαίο. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 1.4 το σημείο Δ που έχει επιλεγεί στο τμήμα ΑΒ του τεθλασμένου ΑΒΓ μπορούμε και το μετακινούμε μόνο μεταξύ των Α και Β, ενώ το σημείο Δ' που έχει επιλεγεί στο τμήμα Α'Β' του τεθλασμένου Α'Β'Γ' μπορούμε και το μετακινούμε μεταξύ των Α' και Β', αλλά και των Β' και Γ'. Για να διευκολύνουμε την κατασκευή δίνουμε τα διαδοχικά βήματα στο Σχήμα 1.5.

Σχήμα 1.5

1.4. Άλγεβρα και Γραφικά.

Ό,τι σχεδιάζουμε στα γραφικά έχουν και μία αντίστοιχη έκφραση στο παράθυρο της Άλγεβρας. Έτσι, εμφανίζονται και στο παράθυρο της Άλγεβρας με το όνομα που έχουν στο παράθυρο των γραφικών (Σχήμα 1.6). Παρατηρήστε ότι στα Γραφικά τα σημεία Β και Β' δεν εμφανίζονται, ωστόσο στο παράθυρο της Άλγεβρας εμφανίζονται με το όνομά τους. Αυτό σημαίνει ότι τα έχουμε αποκρύψει, δεν τα έχουμε σβήσει. Στο παράθυρο της Άλγεβρας εμφανίζονται με ένα κυκλάκι λευκό ( ) στην αρχή, σε αντίθεση με τα άλλα αντικείμενα που το κυκλάκι είναι γεμάτο ( ). Η απόκρυψη ή επανεμφάνιση γίνεται με απλό κλικ επάνω στο κυκλάκι, δηλαδή κλικ σε λευκό κυκλάκι επανεμφανίζει το αντικείμενο, ενώ κλικ πάνω σε γεμάτο κυκλάκι αποκρύπτει το αντικείμενο. Το παράθυρο της Άλγεβρας εμφανίζεται ή αποκρύπτεται από την «προβολή» ή με «Cntl+Shift+A" (Σχήμα 1.3).

Η απόκρυψη αντικειμένων είναι εξαιρετικά σημαντική, επειδή το αντικείμενο διατηρεί τις ιδιότητές του, αλλά στη οθόνη δεν εμφανίζεται. Για παράδειγμα, ας προσπαθήσουμε να δημιουργήσουμε ένα τεθλασμένο τμήμα με διαφορετικό χρωματισμό των επιμέρους τμημάτων, όπου ένα σημείο του να μπορεί να κινείται σε όλο το μήκος του. Τον διαφορετικό χρωματισμό δεν μπορούμε να τον πετύχουμε σε ένα τεθλασμένο τμήμα, παρά μόνον σε τεθλασμένο, που αποτελείται από δύο ξεχωριστά τμήματα. Την κίνηση σε όλο το μήκος δεν μπορούμε να την πετύχουμε σε τεθλασμένο τμήμα, που αποτελείται από δύο ξεχωριστά τμήματα, παρά μόνον σε ένα ενιαίο. Έτσι, συνδυάζουμε και τα δύο παραπάνω ως εξής: Δημιουργούμε ένα ενιαίο τεθλασμένο τμήμα (e) και έστω Δ το σημείο που θέλουμε να κινείται σε αυτό, έπειτα αποκρύπτουμε το τμήμα (e) (Σχήμα 1.6). Στη συνέχεια δημιουργούμε τα δύο τμήματα, τα οποία χρωματίζουμε με τα χρώματα της αρεσκείας μας. Δοκιμάστε να το υλοποιήσετε στο Geogebra.



Σχήμα 1.6

Άσκηση 1.1. Να λύσετε την Άσκηση 5, σελ 152 του βιβλίου της Α' Γυμνασίου στο παράθυρο «Γραφικά» του Geogebra. Να χρησιμοποιηθούν χρώματα για τις αντικείμενες ημιευθείες.

Μικροπείραμα 1.5. Ένα ψηφιακό δόμημα, στο οποίο εμπεριέχονται μαθηματικά αντικείμενα συνδεδεμένα μεταξύ τους και έχει προβλεφθεί δυναμικός χειρισμός αυτών, προκειμένου να διερευνήσουμε ή να διαπραγματευτούμε υφιστάμενες σχέσεις ή ιδιότητες, να πειραματιστούμε ή να προβληματιστούμε πάνω σε αυτές, θα το λέμε μικροπείραμα.

Θα πρέπει να σταθούμε στο γεγονός ότι στο μικροπείραμα «έχει προβλεφθεί ο δυναμικός χειρισμός». Αυτό σημαίνει ότι το μικροπείραμα θα πρέπει να βάζει τους μαθητές να το χειριστούν δυναμικά, να το «πειράξουν». Φυσικά, θα μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο εργαστήριο με την υποστήριξη του καθηγητή, αλλά και στον διαδραστικό πίνακα από τον καθηγητή ή κάποιον μαθητή, αλλά πάντα με την προϋπόθεση ότι θα υπάρχει δυναμικός χειρισμός.

Παράδειγμα 1.1. Προκειμένου να διδαχθεί η άσκηση 2, από τα σύνθετα θέματα της σελίδας 14, του βιβλίου της Ευκλείδειας Γεωμετρίας του Λυκείου (2014), να δημιουργήσετε ένα μικροπείραμα (Example_1_1.ggb) και το αντίστοιχο φύλλο εργασίας (Ενδεικτικό Φύλλο Εργασίας 1.1, στο τέλος του κεφαλαίου).

Παρατήρηση. Στο μικροπείραμα και το φύλλο εργασίας μπορείτε να είστε περισσότερο αναλυτικοί, ανάλογα με το τμήμα στο οποίο διδάσκετε. Για παράδειγμα, μπορείτε να λειτουργήσετε όπως θα λειτουργούσατε στο πίνακα, δημιουργώντας ένα απλούστερο μικροπείραμα (Example_1_1_b.ggb) και ένα περισσότερο αναλυτικό φύλο εργασίας (Ενδεικτικό Φύλλο Εργασίας 1.2).

Παράδειγμα 1.2. Πολλοί μαθητές, επειδή τόσο η ευθεία, όσο και το ευθύγραμμο τμήμα ορίζονται από δύο σημεία, θεωρούν ότι ν διαφορετικά σημεία ορίζουν τον ίδιο αριθμό ευθειών και ευθυγράμμων τμημάτων.

1. Για να διορθώσετε αυτή τη λανθασμένη εντύπωση, να δημιουργήσετε ένα μικροπείραμα στο Geogebra.

2. Για να λειτουργήσει η τάξη, να δημιουργήσετε ένα φύλλο εργασίας.

Προκειμένου να αντιμετωπίσουμε το παραπάνω θέμα και για να άρουμε τη λανθασμένη εντύπωση των μαθητών, θα προσπαθήσουμε να τους φέρουμε σε αδιέξοδο χρησιμοποιώντας συνευθειακά και μη συνευθειακά σημεία. Για τον σκοπό αυτό, σε ένα αρχείο του Geogebra, με τέσσερα ή πέντε μη συνευθειακά σημεία, ζητάμε από τους μαθητές να σχεδιάσουν όλα τα ευθύγραμμα τμήματα και να τα μετρήσουν. Στη συνέχεια τους καλούμε να μετακινήσουν κάποια από αυτά, ώστε να γίνουν συνευθειακά και τους καλούμε να τα μετρήσουν εκ νέου, οπότε διαπιστώνουν ότι ο αριθμός των τμημάτων δεν έχει αλλάξει. Επαναλαμβάνουμε το πείραμα με ευθείες. Παρατηρούν τώρα ότι τα συνευθειακά σημεία ορίζουν διαφορετικό αριθμό ευθειών απ’ ότι προηγούμενα.

Παράδειγμα 1.3. Για να διδάξετε την παράγραφο Β.1.4. της σελ. 163 της Α' Γυμνασίου ή τμήμα αυτής, να δημιουργήσετε στο Geogebra ένα ή περισσότερα δόμημα/δομήματα. Για να λειτουργήσει η τάξη, να δημιουργήσετε φύλλο/φύλλα εργασίας.

Η αντιμετώπιση του παραπάνω θέματος μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους. Εμείς εδώ θα δώσουμε έναν, που βασίζεται στην ιδέα του βιβλίου. Έτσι, δημιουργούμε τρία διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα σταθερού, πλην όμως διαφορετικού για το καθένα, μήκους, έστω τα ΑΒ, ΒΓ και ΓΔ. Στη συνέχεια ακόμη δύο, όπως και προηγούμενα, τα ΑΕ και ΕΖ. Τέλος, τα μετακινούμε κατάλληλα, ώστε τα Δ και Ζ να συμπέσουν (Παράδειγμα_1.3.ggb). Ζητάμε από τους μαθητές να τα μεταφέρουν, μετακινώντας τα κατάλληλα στην ευθεία (ε). Το φύλλο εργασίας το αφήνουμε ως άσκηση για τον αναγνώστη.

Ενδεικτικό Φύλλο Εργασίας 1.1

Σχολείο: ……………………………………………

Όνομα και Επώνυμο: ……………………………

Τάξη:……, Ημερομηνία ………………………

Ανοίξτε το αρχείο “Example_1_1.ggb”

1) Μετακινήστε τις ευθείες που εμφανίζονται, ώστε να πληρούνται οι συνθήκες του προβλήματος. Μετρήστε τις διασταυρώσεις και βρείτε τον αριθμό των τροχονόμων που απαιτούνται.
   a) Ο αριθμός των τροχονόμων που απαιτούνται είναι: ……
   b) Ο αριθμός των διασταυρώσεων είναι …………
2) Προσθέστε στο σχήμα έναν καινούργιο δρόμο (μία ευθεία), διατυπώστε το πρόβλημα εκ νέου και λύστε το.

……………………………………………………………..………

……………………………………………………………

3) Διατυπώστε το πρόβλημα για ν δρόμους (ν ευθείες) και λύστε το.

……………………………………………………………

……………………………………………………………

Καλή Διασκέδαση

Ενδεικτικό Φύλλο Εργασίας 1.2

Σχολείο: …………………………………………..

Όνομα και Επώνυμο: …………………………..

Τάξη: …...., Ημερομηνία ………………………

Ανοίξτε το αρχείο “Example_1_1_b.ggb”

1) Προσθέστε στο σχήμα έναν καινούργιο δρόμο (μία ευθεία). Μετρήστε τις διασταυρώσεις και βρείτε τον αριθμό των τροχονόμων που απαιτούνται.
   a) Ο αριθμός των τροχονόμων που απαιτούνται είναι: ……
   b) Ο αριθμός των διασταυρώσεων είναι …………
2) Προσθέστε στο σχήμα έναν καινούργιο δρόμο (μία ευθεία). Μετρήστε τις διασταυρώσεις και βρείτε τον αριθμό των τροχονόμων που απαιτούνται. Πόσοι από αυτούς είναι οι καινούργιοι;
   a) Ο αριθμός των τροχονόμων που απαιτούνται είναι: ……
   b) Οι καινούργιοι είναι: ……
3) Προσθέστε στο σχήμα έναν καινούργιο δρόμο (μία ευθεία). Μετρήστε τις διασταυρώσεις και βρείτε τον αριθμό των τροχονόμων που απαιτούνται. Πόσοι από αυτούς είναι οι καινούργιοι;
   a) Ο αριθμός των τροχονόμων που απαιτούνται είναι: ……

b) Οι καινούργιοι είναι: ……

4) Προσθέστε στο σχήμα έναν καινούργιο δρόμο (μία ευθεία). Μετρήστε τις διασταυρώσεις και βρείτε τον αριθμό των τροχονόμων που απαιτούνται. Πόσοι από αυτούς είναι οι καινούργιοι;
   a) Ο αριθμός των τροχονόμων που απαιτούνται είναι: ……
   b) Οι καινούργιοι είναι: ……

5) Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα.

Σύνολο δρόμων:	Καινούργιες διασταυρώσεις:	Σύνολο διασταυρώσεων:

6) Διατυπώστε το πρόβλημα για ν δρόμους (ν ευθείες) και λύστε το.

……………………………………………………………

……………………………………………………………

Καλή Διασκέδαση

Κεφάλαιο 2ο

Εικόνα – Κείμενο – Σημείο

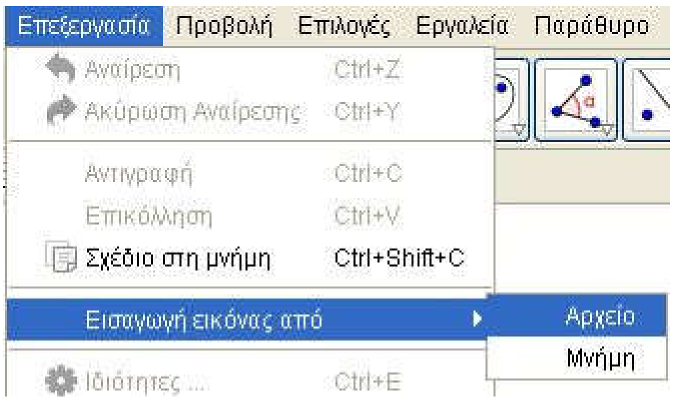
Στόχοι του μαθήματος: Μετά το 2ο κεφάλαιο οι αναγνώστες θα είναι ικανοί:

- να εισάγουν εικόνα.
- να εισάγουν κείμενο.
- να δίνουν κίνηση σε σημείο.
- να δημιουργούν δομήματα εφαρμόζοντας αυτά.

2.1 Πεδίο εισαγωγής.

Στο κάτω μέρος του παραθύρου του Geogebra, υπάρχει το πεδίο εισαγωγής Σχήμα 2.1. Εάν δεν υπάρχει (δεν εμφανίζεται), το ενεργοποιούμε από το Προβολή → Πεδίο Εισαγωγής. Εκεί μπορεί κάποιος να ορίσει ένα πλήθος από αντικείμενα ή διεργασίες. Για παράδειγμα, ένα σημείο Α, που δεσμεύεται από μία ιδιότητα, μπορούμε να το ορίσουμε από το πεδίο εισαγωγής, π.χ. με τις συντεταγμένες του ως Α = Σημείο[{1,2}] ή αν ήδη έχουμε το τμήμα a, μπορούμε να ορίσουμε το σημείο Β = Σημείο[a], που δεν είναι τίποτε άλλο από ένα σημείο πάνω στο τμήμα a. Επίσης, γράφοντας στο παράθυρο εισαγωγής Κείμενο[“Γεια και Χαρά”], το πρόγραμμα θα γράψει στο παράθυρο σχεδίασης «Γεια και Χαρά» και με το ποντίκι μπορούμε να το μετακινήσουμε όπου θέλουμε. Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο, αν στο παράθυρο εισαγωγής γράψουμε μόνο “Γεια και Χαρά”. Τα αντικείμενα που ορίζονται με αυτόν τον τρόπο είναι «εξαρτημένα αντικείμενα». Εκτός από αντικείμενα, μπορούμε να ορίσουμε με αυτόν τον τρόπο μεταβλητές (είναι και αυτά αντικείμενα), που προφανώς θα έχουν κάποια τιμή (Σχήμα 2.1). Δίνοντας την τιμή k=10 στο πεδίο εισαγωγής στο Σχήμα 2.1, ορίζεται μία μεταβλητή με όνομα k και τιμή 10. Για να δούμε τη μεταβλητή αυτή, ενεργοποιούμε το παράθυρο της άλγεβρας. Εμφανίζοντάς την στη οθόνη (δεξί κλικ επάνω της και κλικ στο «Δείξε το αντικείμενο» ή με κλικ στο κυκλάκι στο παράθυρο της Άλγεβρας) παρατηρούμε ότι εμφανίζεται μία μπάρα (ένας δρομέας, δηλαδή η μεταβλητή μας), που καθώς κινούμε την κουκίδα επάνω της, οι τιμές αυτής αλλάζουν. Με την εντολή Κείμενο[“k =” + k] εμφανίζεται το όνομα και η τιμή της. Το μικρό τριγωνάκι ( ) δεξιά είναι βοήθεια εισαγωγής. Κάνοντας κλικ επάνω του, εμφανίζεται ένα μεγάλο πλήθος κατηγοριών και κάθε μία από αυτές έχει ένα πλήθος από αντικείμενα που είναι στη διάθεσή μας. Πολλά από αυτά θα τα συναντήσουμε, καθώς θα προχωρούν τα μαθήματα. Ορισμένα ίσως όχι!

Σχήμα 2.1

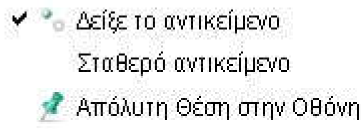


Σχήμα 2.2

2.2 Εισαγωγή εικόνας

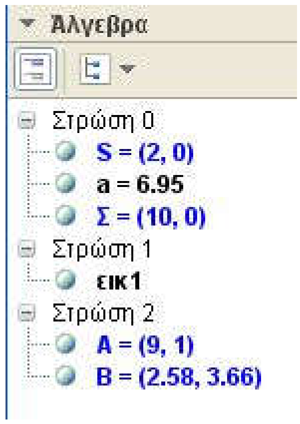
Οι εικόνες παίζουν σημαντικό ρόλο στη δημιουργία δομημάτων και πειραμάτων, επειδή, εκτός του ότι κάνουν το δόμημα όμορφο, δίνουν σ’ αυτό ζωντάνια και ρεαλιστικότητα. Το πρόβλημα που δημιουργείται, εν γένει, από την εισαγωγή εικόνων είναι το ότι το αρχείο αυξάνει σημαντικά.

Για την εισαγωγή εικόνας έχουμε δύο επιλογές. Η μία είναι μέσα από το επεξεργασία → Εισαγωγή εικόνας από → Αρχείο/Μνήμη (Σχήμα 2.2), όπου εισάγουμε την εικόνα που θέλουμε από ένα αρχείο ή από το Clipboard που την έχουμε αποθηκεύσει (αντιγράψει). Το αρχείο μπορεί να είναι οτιδήποτε από τα συνηθισμένα αρχεία εικόνων, όμως είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούμε αρχεία file.jpg, που έχουν μικρότερο μέγεθος. Το πρόγραμμα τοποθετεί την εικόνα προσπαθώντας να την κεντράρει στο παράθυρο του Geogebra, τοποθετώντας από μόνο του δύο σημεία για την κάτω αριστερή και την κάτω δεξιά γωνία της εικόνας. Αλλάζοντας τις συντεταγμένες των σημείων αλλάζει τόσο η θέση, όσο και το μέγεθος της εικόνας. Ένας τρόπος για να αλλάξουμε τις συντεταγμένες των σημείων είναι στο πεδίο εισαγωγής να ορίσουμε εκ νέου τα σημεία, π.χ. να γράψουμε A=(-1,-2) και να πατήσουμε το Enter (↵) και B=(5,-2) ↵ . Η μόνη προσοχή που θα πρέπει να επιδείξουμε είναι να ελέγξουμε αν τα γράμματα είναι του λατινικού ή του Ελληνικού πληκτρολογίου, επειδή τα αντιλαμβάνεται ως διαφορετικά. Επίσης, η εικόνα μετακινείται με το ποντίκι κάνοντας κλικ επάνω της και κρατώντας το αριστερό πλήκτρο πατημένο, αλλά και από τα σημεία «εισαγωγής» της, όπου το καθένα μπορεί να μετακινηθεί ανεξάρτητα.



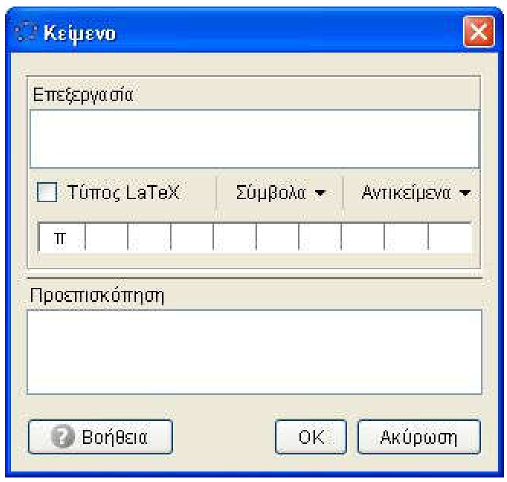
Σχήμα 2.3

Πολλές φορές χρειαζόμαστε κάποιες εικόνες να είναι σταθερές και να μην μετακινούνται είτε από τους μαθητές μας είτε από την αλλαγή της οθόνης από εμάς. Σε αυτή την περίπτωση, το Geogebra μας δίνει τη δυνατότητα να επιλέξουμε. Έτσι, με δεξί κλικ πάνω στην εικόνα (αντικείμενο) μπορούμε να διαλέξουμε είτε να είναι σταθερή η εικόνα μας και να μην μετακινείται, όσον αφορά τη θέση της στους άξονες, είτε να είναι σταθερή η εικόνα μας και να μην μετακινείται, όσον αφορά τη θέση της στους άξονες, είτε να είναι σταθερή, όσον αφορά τη θέση της στην οθόνη, Σχήμα 2.3. Άλλοτε πάλι θέλουμε μία εικόνα να είναι μπροστά από ένα αντικείμενο και άλλοτε πίσω. Για να το πετύχουμε αυτό μεταβαίνουμε από Ιδιότητες(δεξί κλικ) → Προχωρημένες → Στρώση και επιλέγουμε τη στρώση που επιθυμούμε. Όσο μεγαλύτερη είναι η στρώση, τόσο πιο πάνω είναι το επίπεδο του σχεδίου. Έτσι, π.χ. η στρώση επιπέδου 5 καλύπτει τη στρώση επιπέδου 4. Προσοχή: αντικείμενα καλυμμένα από άλλα δεν μπορούμε να τα επιλέξουμε με το ποντίκι, παρά μόνο από το παράθυρο της άλγεβρας. Τέλος, από τη διαδρομή Ιδιότητες → Χρώμα → Αδιαφάνεια, ελέγχουμε την αδιαφάνεια της εικόνας. Πειραματιστείτε στο αρχείο Example_2_1.ggb. Για την πληρότητα της παραγράφου απλά θα πούμε ότι από δεξί κλικ → Ιδιότητες → Βασικά και στη συνέχεια επιλογή του Φόντο, η εικόνα μας ορίζεται ως φόντο, πλέον, στο μικροπείραμά μας.



Σχήμα 2.4

Παράδειγμα 2.1. Στο αρχείο Example_2_1.ggb υπάρχει μία εικόνα, δύο σημεία B και A, άλλα δύο σημεία, που αποκόπτεται ένα μικρό μέρος τους και δεν φαίνεται το όνομά τους και ένα τμήμα a, που και αυτό είναι ενεργό αλλά δεν φαίνεται από την εικόνα. Να τροποποιήσετε το αρχείο, ώστε τα σημεία A και B να είναι ενεργά, αλλά να μη φαίνονται, επειδή κρύβονται από την εικόνα. Το τμήμα a να φαίνεται πάνω στην εικόνα και το δεξιό σημείο στην άκρη της εικόνας να φαίνεται ολόκληρο, καθώς και το όνομά του, ενώ το αριστερό να μη φαίνεται καθόλου.



Σχήμα 2.5

Στο παράθυρο της Άλγεβρας, από το αριστερό τριγωνάκι ενεργοποιούμε το κουμπί των βοηθητικών αντικειμένων () και από το διπλανό κουμπί διατάσσουμε τα αντικείμενα κατά στρώσεις (Σχήμα 2.4.). Στη συνέχεια, σε καθένα από τα αντικείμενα και από τις ιδιότητες → Προχωρημένες αλλάζουμε το επίπεδό τους κατάλληλα, δηλαδή τα σημεία Α και Β τα κάνουμε επίπεδο 0, το τμήμα a και το σημείο Σ τα κάνουμε επίπεδο 2 και τέλος εμφανίζουμε την ετικέτα στο Σ και αποκρύπτουμε πλήρως το S.

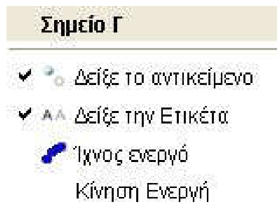
2.3 Εισαγωγή κειμένου.

Ήδη έχουμε δει την εισαγωγή κειμένου από το πεδίο εισαγωγής. Όμως, όπως έχουμε πει στο Geogebra, δεν έχουμε μόνο έναν τρόπο να κάνουμε κάτι. Με το κουμπί ABC μπορούμε να εισάγουμε κείμενο οπουδήποτε το χρειαζόμαστε. Επιλέγοντας το κουμπί ABC και κάνοντας κλικ σε κάποιο σημείο του παραθύρου σχεδιασμού, εμφανίζεται ένα παράθυρο της μορφής του Σχήματος 2.5. Στο πλαίσιο «Επεξεργασία» γράφουμε το τι θέλουμε να εμφανίσουμε και στο πλαίσιο «Προεπισκόπηση» βλέπουμε το αποτέλεσμα. Πατώντας το ΟΚ ό,τι υπάρχει στο προεπισκόπηση εμφανίζεται στην οθόνη μας, στο σημείο που κάναμε το κλικ.

Παράδειγμα 2.2. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να δείξουμε στην τάξη ότι το άθροισμα δύο πλευρών τριγώνου είναι μικρότερο της τρίτης πλευράς και το μέτρο της διαφοράς τους μεγαλύτερο από αυτή.

Ανοίγοντας το αρχείο Example_2_2.ggb θα δείτε ότι εμφανίζεται το άθροισμα και το μέτρο της διαφοράς. Επίσης, καθώς μετακινούμε οποιαδήποτε από τις κορυφές, δυναμικά αλλάζουν οι τιμές τους. Προκειμένου να το πετύχουμε αυτό, ορίσαμε τη μεταβλητή α1 (α_1 = β + γ, έτσι βάζουμε δείκτη) και τη μεταβλητή α2 (α_2 = abs(β – γ)) και στο κουτί επεξεργασία γράψαμε β + γ = α_1 , αυτό το α_1 που είναι μέσα σε πλαίσιο το εμφανίσαμε από τα αντικείμενα, κάνοντας κλικ στο τριγωνάκι στα δεξιά των και επιλέγοντάς το.

Άσκηση 2.1 Να ολοκληρώσετε το Παράδειγμα 2.2 δίνοντας παρόμοια κείμενα και για τους άλλους συνδυασμούς των πλευρών.



Σχήμα 2.6

Προς το παρόν δεν τσεκάρουμε το «Τύπος LaTeX». Ενημερωτικά, το LaTeX είναι ένα πρόγραμμα που δημιουργήθηκε για να γράφουμε κείμενο μαθηματικών. Δεν θα αναλύσουμε εδώ το LaTeX, επειδή δεν είναι του παρόντος. Σε επόμενα κεφάλαια θα μιλήσουμε και θα πούμε όσα πιθανόν θα χρειαστούμε για τις ανάγκες μας. Εκείνο όμως που θα πρέπει να πούμε είναι ότι με αυτόν τον τρόπο παρουσίασης των μεταβλητών πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί, επειδή δημιουργούνται προβλήματα στρογγύλευσης. Όμως, για το πρόβλημα της στρογγύλευσης θα μιλήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

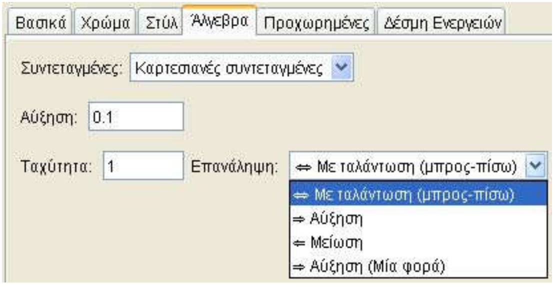
Στο πεδίο εισαγωγής ήδη έχουμε πει ότι εισάγουμε αντικείμενα και ότι οι μεταβλητές είναι και αυτές αντικείμενα. Πολλές φορές αυτές παίρνουν τιμές από συναρτήσεις. Ήδη, έχουμε συναντήσει τη συνάρτηση της απόλυτης τιμής (abs()). Οι περισσότερες έχουν την κλασσική μορφή που γνωρίζουμε από τις περισσότερες γλώσσες προγραμματισμού, όμως για λεπτομέρειες μπορείτε να επισκεφτείτε την ιστοσελίδα: http://wiki.geogebra.org/en/ predeined_Functions_and_Operators . Έτσι, για να πάρετε την τετμημένη του σημείου Α γράφεται x(A), ενώ για την τεταγμένη y(A). Παρατηρήστε ότι το x και το y είναι εκείνα του Λατινικού αλφαβήτου.

2.4 Κίνηση σε σημείο.

Ο δυναμικός τρόπος αντιμετώπισης των μαθηματικών εννοιών είναι το πλεονέκτημα της νέας τεχνολογίας. Η κίνηση σημείων και γραμμών, εκτός του να εντυπωσιάζουν τους μαθητές, δίνουν και πλήθος πληροφοριών για τις έννοιες. Έτσι, μπορούμε να δίνουμε κίνηση σε σημείο, κάνοντας δεξί κλικ επάνω του, οπότε εμφανίζεται το παράθυρο του Σχήματος 2.6, οπότε επιλέγεται το «Κίνηση Ενεργή». Η παραπάνω επιλογή εμφανίζεται, όταν το σημείο ανήκει σε ένα ευθύγραμμο τμήμα ή μία ευθεία ή έναν κύκλο. Δεν εμφανίζεται σε ελεύθερα σημεία. Ο έλεγχος της κίνησης γίνεται από τις ιδιότητες. Έτσι, με δεξί κλικ → ιδιότητες → Άλγεβρα, εμφανίζονται ένα πλήθος επιλογών, όπως στο Σχήμα 2.7. Έχουμε τη δυνατότητα να ελέγχουμε τη μεταβολή της τιμής και την ταχύτητα που θα γίνεται η κίνηση (π.χ. η ταχύτητα με τιμή 0.5 είναι εξαιρετικά αργή, ενώ η ταχύτητα με τιμή 3 ιδιαίτερα γρήγορη). Κατά τη διάρκεια της κίνησης στην κάτω αριστερή γωνία εμφανίζεται ένα εικονίδιο με δύο μπάρες Σχήμα 2.8. Με κλικ επάνω του η κίνηση σταματά και το εικονίδιο γίνεται τριγωνάκι. Κλικ στο τριγωνάκι η κίνηση αρχίζει εκ νέου. Ενδιαφέρον έχει η διαπραγμάτευση της άσκησης 3, σελίδα 66 του βιβλίου της Άλγεβρας Α' Λυκείου, ελαφρά τροποποιημένη.

Παράδειγμα 2.3 Να γράψετε χωρίς τις απόλυτες τιμές την παράσταση | x + 1 | + | x – 2|, αν ισχύει – 4 < x < 4.

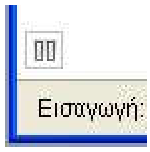
Για τη διαπραγμάτευση του θέματος δημιουργούμε ένα αρχείο Example_2_3.ggb, ως εξής: Στον οριζόντιο άξονα παίρνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με x(A) = – 4 και x(B) = 4, οπότε επάνω στο τμήμα παίρνουμε το σημείο Γ. Εισάγουμε κείμενο στο σημείο Γ με το γράμμα x και απενεργοποιούμε την ετικέτα του σημείου (δεξί κλικ και απενεργοποίηση του «Δείξε Ετικέτα»). Στη συνέχεια ορίζουμε τη μεταβλητή δ_1 = abs(x(Γ) + 1) + abs(x(Γ) – 2) και σε κάποιο σημείο του σχήματος εισάγουμε κείμενο |x + 1| + |x - 2| = δ_1 . Τέλος, εισάγουμε το σημείο M=(x(Γ), δ_1). Για την ενίσχυση της διδασκαλίας μας δημιουργούμε το Ενδεικτικό Φύλλο Εργασίας 2.3



Σχήμα 2.7

Άσκηση 2.2 Να γράψετε χωρίς τις απόλυτες τιμές την παράσταση || x + 1 | – | x – 3||, αν ισχύει – 4 < x < 5.

Πολλές φορές έχει ενδιαφέρον, ιδιαίτερα για τα παιδιά του γυμνασίου αλλά ενίοτε και για παιδιά του λυκείου, να δίνεται η κίνηση σε εικόνα. Στην περίπτωση αυτή, προσαρμόζουμε την εικόνα, π.χ. στο σημείο Γ. Έχουμε πει ότι η εικόνα ελέγχεται από δεξί κλικ → Ιδιότητες → Προχωρημένες και στη συνέχεια από τις θέσεις. Δίνοντας λοιπόν στην κορυφή 1 τις συντεταγμένες (x(Γ) - 1, y(Γ)), στην κορυφή 2 τις συντεταγμένες (x(Γ) + 1, y(Γ)) και στην κορυφή 3 τις συντεταγμένες (x(Γ) – 1, y(Γ) + 4), η εικόνα συνοδεύει το σημείο.



Σχήμα 2.8

Άσκηση 2.3 Δοκιμάστε τις παραπάνω συντεταγμένες στο Example_2_3.ggb με την εικόνα Example_2_3.jpg.

Ενδεικτικό Φύλλο Εργασίας 2.3

Σχολείο……………………………………………..

Όνομα και Επώνυμο…………………………………

Τάξη: ……………. Ημερομηνία ……………………

Ανοίξτε το αρχείο “Example_2_3.ggb”

1. Τι εκφράζει το $|x + 1|$ και τι το $|x - 2|$; Τι εκφράζει το άθροισμα $|x + 1| + |x - 2|$;
2. Δώσε κίνηση στο σημείο Γ, κάνοντας κλικ στο τριγωνάκι στην κάτω αριστερή γωνία του σχήματος. Παρατήρησε τη μεταβολή του αθροίσματος.
    a. Το άθροισμα μειώνεται όταν :

    ………………………………………………………………………………………………

    b. Το άθροισμα αυξάνει όταν :

    ……………………………………………………………………………………………

    c. Το άθροισμα μένει σταθερό όταν :

    ………………………………………………………………………………………………

    d. Προσπαθήστε να ερμηνεύσετε το γεγονός :

    ………………………………………………………………………………………………

3. Προσπαθήστε να κάνετε μία «πρόχειρη» γραφική παράσταση, στο πρόχειρό σας, της συνάρτησης

$$y = |x + 1| + |x - 2|.$$

4. Από το παράθυρο της άλγεβρας εμφανίστε το σημείο Μ. Ενεργοποιήστε το ίχνος (δεξί κλικ επάνω του και επιλογή) και δώστε κίνηση στο Γ. Πόσο μοιάζει η γραφική σας παράσταση με το ίχνος του Μ;
5. Μετακινήστε το Β, ώστε το Μ όσο κατεβαίνει, τόσο να ανεβαίνει. Δώστε μία εξήγηση για την επιλογή σας.

Καλή Διασκέδαση

Κεφάλαιο 3ο

Τμήμα – Γωνία – Μετρήσεις

Στόχοι του **μαθήματος:** Μετά το 3ο μάθημα οι εκπαιδευόμενοι θα είναι ικανοί:

1. να δημιουργούν ένα μικροπείραμα σχετικό με τη μέτρηση τμήματος, γωνίας και κλίσης.
2. να χρησιμοποιούν το πεδίο εισαγωγής.

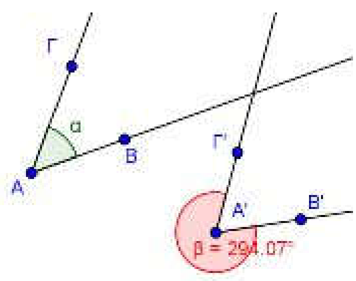
3.1. Η μέτρηση ευθύγραμμου τμήματος.

Οι μετρήσεις στην εκπαιδευτική αλλά και ερευνητική λειτουργία του Geogebra είναι εξαιρετικά σημαντικές. Το πρόγραμμά μας δίνει τουλάχιστον δύο δυνατότητες γι' αυτό. Επιλέγοντας το κουμπί του Σχήματος 3.1 και κάνοντας κλικ πάνω σε ένα ευθύγραμμο τμήμα αναγράφεται δίπλα στο τμήμα το μήκος αυτού. Η αλήθεια είναι ότι το μήκος δεν υπολογίζεται τη στιγμή του κλικ, έχει ήδη υπολογισθεί από τη στιγμή της κατασκευής του, απλά τη στιγμή του κλικ εμφανίζεται. Αυτό μπορεί να το δει κάποιος, αν έχει ενεργοποιημένο το παράθυρο της Άλγεβρας, καθώς σχεδιάζει το ευθύγραμμο τμήμα. Στο ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα θα καταλήγαμε, αν κάναμε την εξής διαδικασία:

1. επιλογή του τμήματος με το κουμπί της μετακίνησης,
2. δεξί κλικ πάνω του και κλικ στις ιδιότητες,
3. από την καρτέλα «βασικά» ενεργοποίηση της επιλογής «Δείξε την ετικέτα» και
4. στο διπλανό παράθυρο εμφάνιση της «τιμής». Ενδιαφέρον έχει και η εμφάνιση της «όνομα και τιμή», όπου εμφανίζεται και το όνομα του τμήματος.

Σχήμα 3.1

Το κουμπί , όμως, έχει αποτελεσματική χρήση στη μέτρηση της απόστασης δύο σημείων. Με επιλογή του ως άνω κουμπιού και κάνοντας κλικ διαδοχικά στα δύο σημεία εμφανίζεται η απόσταση αυτών. Δυστυχώς δεν λειτουργεί στην περίπτωση μιας πολυγωνικής γραμμής (ενός τεθλασμένου τμήματος). Για να εμφανίσουμε το μήκος μιας πολυγωνικής γραμμής, εφαρμόζουμε την δεύτερη μέθοδο που αναπτύξαμε παραπάνω, δηλαδή, αφού το επιλέξουμε με δεξί κλικ, μέσα από τις ιδιότητες εμφανίζουμε την τιμή του. Επιπλέον, το κουμπί αυτό δεν λειτουργεί ούτε στα επιμέρους τμήματα της πολυγωνικής γραμμής. Για να εμφανίσουμε τις τιμές των τμημάτων, χρησιμοποιούμε το κουμπί για να μας μετρήσει την απόσταση από σημείο σε σημείο και επομένως το μήκος των τμημάτων που επιθυμούμε.



Σχήμα 3.2

Άσκηση 3.1: Να δημιουργήσετε ένα μικροπείραμα (μαζί με το φύλλο εργασίας), για να διδάξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα είναι ο ελάχιστος δρόμος μεταξύ δύο πόλεων στον χάρτη, που ενώνονται με ένα ή περισσότερα ευθύγραμμα τμήματα.

3.2. Η μέτρηση γωνίας.

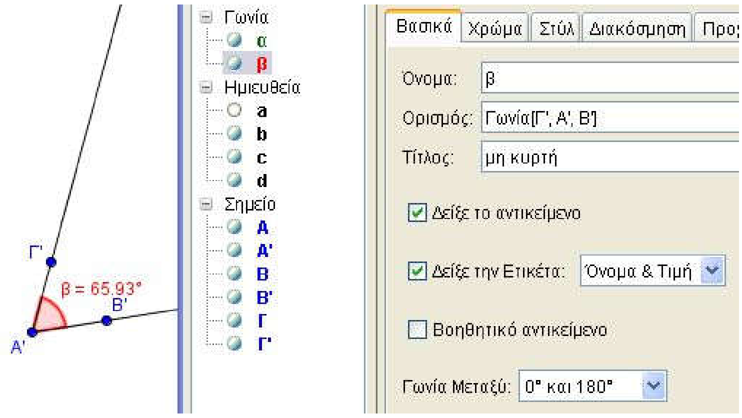
Με το εικονίδιο μετράμε μία γωνία. Η επιλογή της γωνίας γίνεται επιλέγοντας τρία σημεία αυτής, τα δύο στις πλευρές και το άλλο στην κορυφή. Το σημείο της κορυφής είναι το μεσαίο από εκείνα που επιλέγουμε. Τα άλλα δύο επιλέγονται, έτσι ώστε η γωνία που σχηματίζεται να είναι θετική (αντίθετη στη φορά των δεικτών του ωρολογίου). Παρατηρήστε τη γωνία ΒΑΓ και τη γωνία Γ'Α'Β' (Σχήμα 3.2). Στη μία περίπτωση έχουμε την κυρτή γωνία ***α***, ενώ στη δεύτερη τη μη κυρτή γωνία ***β***.

Όπως στα ευθύγραμμα τμήματα, έτσι κι εδώ μπορούμε να εμφανίσουμε τιμή, όνομα και τίτλο, επιλέγοντας τη γωνία και κάνοντας δεξί κλικ και επιλέγοντας ιδιότητες. Ενδιαφέρον έχει το «Γωνία Μεταξύ:». Η γωνία που φαίνεται στα αριστερά του Σχήματος 3.3 είναι η γωνία $\boldsymbol{\beta}$ του Σχήματος 3.2, η μοναδική διαφορά από εκείνη είναι ότι στην καρτέλα των ιδιοτήτων έχει επιλεγεί να είναι μεταξύ 0ο και 180^{o}. Οι μονάδες μέτρησης καθορίζονται από το «Επιλογές → Προχωρημένες…» ή από το εικονίδιο

πάνω δεξιά στο παράθυρο του Geogebra και στη συνέχεια κλικ στο εικονίδιο

. Εδώ βέβαια υπάρχει και η επιλογή του «σημαδέματος» της ορθής γωνίας, εφόσον το επιθυμεί ο χρήστης (Σχήμα 3.4). Αξίζει να δοκιμάσει κάποιος για να δει τις πολλές και όμορφες επιλογές του προγράμματος. Με το κουμπί

δημιουργούμε μία γωνία με δοσμένο μέτρο. Από τη στιγμή που θα δημιουργήσουμε την εν λόγω γωνία, η επεξεργασία αυτής, στη συνέχεια, είναι ίδια με ό,τι είπαμε παραπάνω. Όμως, γενικά με τη μέτρηση των γωνιών υπάρχουν προβλήματα, λόγω των στρογγυλεύσεων. Έτσι, στο Σχήμα 6α, θα παρατηρούσε κάποιος ότι το άθροισμα των γωνιών **α+β+δ=179.9^{o}**, κάτι που δεν είναι σωστό, αφού είναι φανερό ότι το άθροισμα των διαδοχικών αυτών γωνιών είναι 180^{o}, δηλαδή η πραγματική τιμή της $\boldsymbol{\delta}$ είναι 38.9^{o}. Όπως μπορεί να παρατηρήσει κάποιος, στο Σχήμα 6β, η ακρίβεια των δύο δεκαδικών ψηφίων είναι προβληματική.

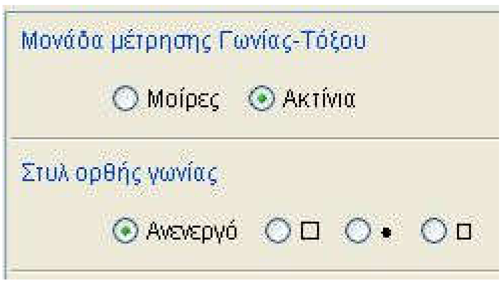


Σχήμα 3.3

3.3 Το πρόβλημα των στρογγύλευσης.

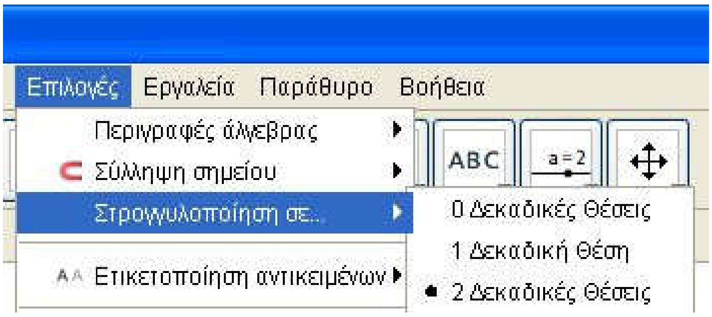
Η μέτρηση γωνίας μπορεί να επιτευχθεί και από το παράθυρο εισαγωγής. Έτσι, ορίζουμε τη γωνία μεταξύ τριών σημείων με το Γωνία[σημείο, κορυφή, σημείο] Γωνία[σημείο, κορυφή, μοίρες ή γωνία], τη γωνία μεταξύ δύο ευθειών ή δύο διανυσμάτων με το Γωνία[ευθεία, ευθεία] ή Γωνία[διάνυσμα, διάνυσμα], αντίστοιχα.

Στο Σχήμα 3.5. φαίνεται ο τρόπος με τον οποίο ρυθμίζουμε τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων, που χρησιμοποιούμε στις μετρήσεις μας ή για την ακρίβεια τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων, που θέλουμε να φαίνονται στις μετρήσεις μας. Είναι γεγονός ότι το πρόγραμμα, προκειμένου να εμφανίσει τον επιθυμητό αριθμό ψηφίων, κάνει στρογγύλευση. Έτσι, στο Σχήμα 3.6. φαίνονται οι τρεις γωνίες τη μία φορά με δέκα (10) δεκαδικά ψηφία και την άλλη με δύο(2) δεκαδικά ψηφία. Γίνεται φανερό ότι την πρώτη φορά, όταν αθροίσουμε τις γωνίες, μας δίνουν την ακριβή τιμή των 180^{o}, ενώ τη δεύτερη 179,9^{o}. Σε προκατασκευασμένα, όμως, δομήματα αυτό δημιουργεί προβλήματα, αφού, προκειμένου, να ερμηνεύσουμε το φαινόμενο αυτό στους μαθητές μας, θα ξεφύγουμε από το σκοπό του μαθήματος. Είναι, λοιπόν, φανερό ότι πρέπει να λύσουμε το πρόβλημα αυτό.



Σχήμα 3.4

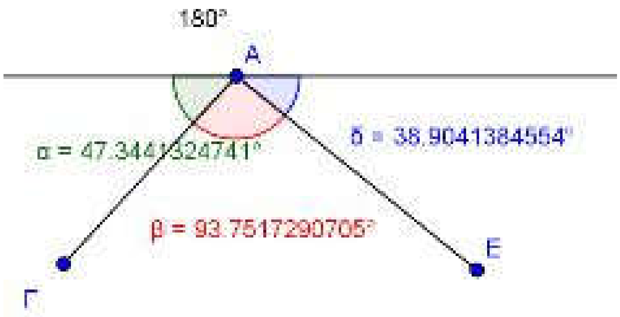
Ήδη έχουμε πει ότι στις μαθηματικές συναρτήσεις, που έχει ενσωματωμένες το Geogebra, υπάρχει η συνάρτηση **round(x)**. Η συνάρτηση αυτή στρογγυλεύει έναν αριθμό στον πλησιέστερο ακέραιο. Έτσι, για παράδειγμα, έχουμε round(2.234)=2 και round(-2.234)=-2. Προκειμένου, τώρα, να έχουμε στρογγύλευση σε έναν προκαθορισμένο αριθμό δεκαδικών ψηφίων, χρησιμοποιούμε το round(10^n*x)/10^n, όπου n ο αριθμός των δεκαδικών ψηφίων.



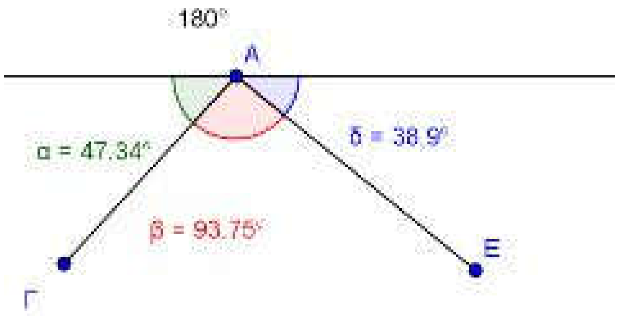
Σχήμα 3.5

Άσκηση 3.2. Να διορθωθεί το Σχήμα 3.6β.

Λύση. Προκειμένου να λύσουμε το πρόβλημα του Σχήματος 3.6β, αρχικά κάνουμε δεξί κλικ πάνω στη γ γωνία και αποεπιλέγουμε το «Δείξε την ετικέτα». Στη συνέχεια ορίζουμε μία νέα μεταβλητή, έστω την g = 180º – round(100*α)/100 – round(100*β)/100 και τέλος εμφανίζουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα με την εντολή Κείμενο["γ=" + g]. Τέλος, μεταφέρουμε το κείμενο που δημιουργήσαμε στην επιθυμητή θέση (Σχήμα 3.6γ). Προσοχή: Για να βάλουμε τις μοίρες στο 180, στο πεδίο εισαγωγής, στο δεξί άκρο, υπάρχει το εικονίδιο , όπου κάνοντας κλικ επάνω του επιλέγουμε το σύμ-



Σχήμα 3.6α



Σχήμα 3.6β

βολο «βαθμός» ή πιο απλά Alt+o. Σε διαφορετική περίπτωση θα σας δίνει λανθασμένα αποτελέσματα, αφού θα εκλαμβάνει το 180 ως ακτίνια.

Παρατηρήστε ότι με τα εισαγωγικά εμφανίζουμε αλφαριθμητικό κείμενο, ενώ, αν θέλουμε να προσθέσουμε την τιμή μιας μεταβλητής, απλά την προσθέτουμε με το +. Φυσικά, μετά τη μεταβλητή g μπορείτε να προσθέσετε οτιδήποτε θέλετε, αρκεί να κρατήσετε τον κανόνα, κάθε καινούργιο αντικείμενο ακολουθεί το + και, αν πρόκειται για αλφαριθμητικό, μπαίνει σε εισαγωγικά. Δεν θα πρέπει να ξεχνάμε τον τρόπο εισαγωγής κειμένου, που είδαμε στο προηγούμενο μάθημα.

Άσκηση 3.3. Προκειμένου να διδάξετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180º, να δημιουργήσετε ένα σχέδιο μαθήματος και ένα φύλλο εργασίας των μαθητών, χρησιμοποιώντας ένα αρχείο του Geogebra.

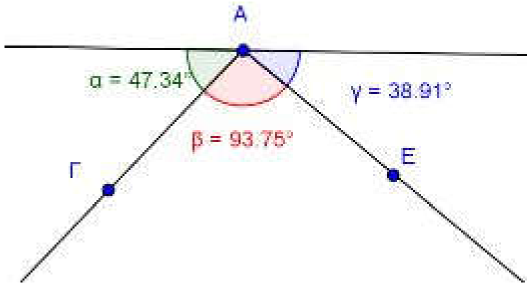
3.4 Κλίση.

Υπόδειξη: Για να πάρετε μία ακόμη ιδέα για τη δημιουργία σχεδίου εργασίας, επισκεφτείτε τη σελίδα των Μαθηματικών της Αιτωλοακαρνανίας και κατευθυνθείτε στους Καθηγητές → Σχέδια

Μαθήματος → Δύο σχέδια από την Α' Γυμνασίου. Για να πάρετε μία ακόμη ιδέα για το φύλλο εργασίας, στην ίδια σελίδα κατευθυνθείτε στο Γυμνάσιο → Διδακτικές προτάσεις.

Το μέτρο της κλίσης αναφέρεται αποκλειστικά στη μέτρηση της κλίσης ευθείας, ευθυγράμμου τμήματος ή ημιευθείας. Για να προσδιορίσουμε την κλίση άλλων καμπύλων σε κάποιο τους σημείο, φέρνουμε πρώτα την εφαπτομένη στο εν λόγω σημείο και στη συνέχεια μετράμε την κλίση της εφαπτομένης. Η μέτρηση γίνεται με το εικονίδιο και στη συνέχεια επιλέγοντας με το «μετακίνηση» το αντικείμενο (ευθεία, ευθύγραμμο τμήμα ή ημιευθεία). Από το πεδίο «εισαγωγή» η κλίση ορίζεται με τη συνάρτηση «Κλίση[το όνομα του αντικειμένου]» ή «Slope[το όνομα του αντικειμένου]».

Για την κλίση π.χ. μιας παραβολής (στο πεδίο εισαγωγής μπορούμε να δώσουμε y = x^2), αφού ορίσουμε ένα σημείο επ' αυτής, π.χ. το Σ, στη συνέχεια ορίζουμε την εφαπτομένη της στο συγκεκριμένο σημείο με το εικονίδιο και στο τέλος την κλίση της εφαπτομένης με τον ανωτέρω τρόπο. Μετακινώντας το σημείο Σ μετακινείται η εφαπτομένη και επομένως αλλάζει και η κλίση. Με δεδομένο ότι η κλίση δεν είναι τίποτε άλλο, παρά η εφαπτομένη της γωνίας της ευθείας με τον οριζόντιο άξονα, εναλλακτικά χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση της εφαπτομένης tan[γωνία], με τη σημείωση ότι πρέπει να είναι προσδιορισμένη η γωνία.



Σχήμα 3.6γ

Άσκηση 3.4. Από τις ασκήσεις 4, 5, 6, 7 της σελίδας 140 του βιβλίου των Μαθηματικών της Β' Γυμνασίου, (για όσους δεν το έχουν ας ανατρέξουν στη διεύθυνση http://ebooks.edu.gr/2013/allcourses.php) να επιλέξετε μία για να διδάξετε την κλίση (όχι την εφαπτομένη γωνίας!) ή να τη διδάξετε (την άσκηση δηλαδή) με την κλίση, χρησιμοποιώντας το Geogebra και κάνοντας (αν χρειάζεται) τις κατάλληλες τροποποιήσεις στην εκφώνηση.

3.5. Ανοιχτά προβλήματα.

Ως τέτοια χαρακτηρίζονται εκείνα τα προβλήματα που δεν επιδέχονται μόνο μία λύση, αλλά πολλές. Π.χ. δημιουργώντας ένα τετράγωνο και ρωτώντας τους μαθητές μας τι παρατηρείτε, η απάντηση δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη. Πολλές φορές, θέλοντας να εξάψουμε τη φαντασία αυτών ή προσπαθώντας να δώσουμε έναν ερευνητικό τόνο στη διδασκαλία μας, ορισμένα κλειστά προβλήματα, δηλαδή προβλήματα με υπόθεση και συμπέρασμα, τα τρέπουμε σε ανοιχτά, αποκρύπτοντας το συμπέρασμα. Το επόμενο είναι ένα τέτοιο παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.1 Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ θεωρήστε ένα σημείο Δ της βάσης του. Ποια σχέση συνδέει τις αποστάσεις ΔΕ και ΔΖ του σημείου Δ από τις ίσες πλευρές του τριγώνου;

Το πρόβλημα είναι γνωστό (Σύνθετα θέματα 3ο, σελ. 104, Βιβλίο Γεωμετρίας Λυκείου). Παρατηρήστε, όμως, τη διατύπωση του θέματος. Οι μαθητές, τώρα, πρέπει να βρουν τη σχέση που υπάρχει μεταξύ των αποστάσεων του σημείου Δ από τις ίσες πλευρές και να αποδείξουν την εικασία τους. Προκειμένου να το πετύχουμε, δημιουργούμε το σχετικό αρχείο Example_3-1.ggb και φυσικά το σχετικό φύλλο εργασίας. Για τη δημιουργία του ισοσκελούς, αφού εμφανίσουμε το πλέγμα ( ), εμφανίζουμε τα σημεία Α, Β, και Γ και στη συνέχεια τις τρεις πλευρές του τριγώνου. Παίρνουμε το σημείο Δ στην Τρίτη πλευρά και φέρνουμε τις κάθετες. Αφού ορίσουμε τα σημεία τομής ( ) και αποκρύψουμε τις κάθετες, ορίζουμε τα ευθύγραμμα τμήματα (αποστάσεις του Δ από τις ίσες πλευρές). Τέλος, ορίζουμε μία «εισαγωγή κειμένου» κατάλληλα διαμορφωμένη και περιμένουμε να πειραματιστούν οι μαθητές μας. Προτείνω να μην εμφανίζεται το άθροισμα και να εκμεταλλευτούμε τη «στρογγύλευση», για να καταλάβουν οι μαθητές μας ότι με τα λογισμικά μόνον εικασίες μπορούμε να κάνουμε και όχι αποδείξεις, αφού το άθροισμα θα βγαίνει περίπου σταθερό.

3.6. Ερευνητικές επεκτάσεις.

Μία ίσως πλευρά της διδασκαλίας είναι η ερευνητική διάσταση αυτής. Δυστυχώς, ο φόρτος της ύλης, ο μικρός χρόνος διδασκαλίας και το μεγάλο πλήθος άλλων υποχρεώσεων των εκπαιδευτικών έχουν οδηγήσει στο περιθώριο αυτή τη διάσταση της διδασκαλίας. Το Geogebra μας δίνει την ευχέρεια για ερευνητική επέκταση των προβλημάτων. Έτσι, μία επέκταση του παραπάνω προβλήματος είναι αντί το σημείο να είναι στη βάση του τριγώνου, να είναι στην προέκταση αυτής, από τη μία ή την άλλη μεριά της. Έτσι, έχουμε μία καινούργια άσκηση.

Άσκηση 3.5 Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ θεωρήστε ένα σημείο Δ στην προέκταση της βάσης του, προς το μέρος του Β ή του Γ. Ποια σχέση συνδέει τις αποστάσεις ΔΕ και ΔΖ του σημείου Δ από τις ίσες πλευρές του τριγώνου; Ή μία επέκταση του παραπάνω.

Άσκηση 3.6 Σε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ, θεωρήστε το σημείο Δ στο εσωτερικό του. Ποια σχέση συνδέει τις αποστάσεις ΔΕ, ΔΖ και ΔΗ του σημείου Δ από τις πλευρές του τριγώνου;

Ενδεικτικό Φύλλο Εργασίας. Example_3-1.ggb

Σχολείο: ……………………………

Όνομα και Επώνυμο: …………………………

Τάξη: . . . .   Ημερομηνία . . . . . .

1. Ανοίξτε το αρχείο “Example_3-1.ggb”.
2. Μετακινήστε το σημείο Δ και καταγράψτε τα μήκη των τμημάτων ΔΕ και ΔΖ για τις διάφορες θέσεις του Δ.

ΔΕ	ΔΖ	ΔΕ/ΔΖ	ΔΕ*ΔΖ	ΔΕ+ΔΖ	ΔΕ-ΔΖ

3. Συμπληρώστε τον προηγούμενο πίνακα (χρησιμοποιήστε μία αριθμομηχανή). Τι παρατηρείτε;

…………………………………………………………………

…………………………………………………………………

4. Διατυπώστε μία εικασία. (Για να διευκολυνθείτε, μετακινήστε το Δ στα άκρα του τμήματος).

…………………………………………………………………

…………………………………………………………………

5. Αποδείξτε την εικασία σας, ώστε να γίνει πρόταση.

…………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

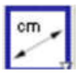
……………………………………..

Καλή Διασκέδαση

Ενδεικτικό Φύλλο Εργασίας. Askisi_3-1.ggb

Σχολείο: . . . .
Όνομα και Επώνυμο: . . . .
Τάξη: . . . . Ημερομηνία . . . . . .
1. Ανοίξτε το αρχείο : «ΑΣΚΗΣΗ 3. 1. ggb»

1. Στο σχήμα που βλέπετε, τα σημεία Α, Ρ, Μ, Λ, Φ, Π παριστάνουν τις πόλεις Αθήνα, Ρώμη, Μιλάνο, Λυών, Φρανκφούρτη, Παρίσι. Μία αεροπορική εταιρεία προσφέρει τις δύο διαδρομές που βλέπουν στον χάρτη: τη διαδρομή ΑΡΜΛΠ και τη διαδρομή ΑΦΠ.
2. Από ποια ευθύγραμμα τμήματα αποτελείται η κάθε διαδρομή;
Η ΑΡΜΛΠ αποτελείται από τα τμήματα:…………………
Η ΑΦΠ αποτελείται από τα τμήματα:……………………

3. Χρησιμοποιώντας το εικονίδιο  του Geogebra και κάνοντας κλικ στα άκρα κάθε ευθύγραμμου τμήματος, να βρείτε την απόσταση των πόλεων:

ΑΡ = ………………	ΛΠ =…………………
ΡΜ =………. ……	ΑΦ =…………………
ΜΛ =……………….	ΦΠ =…………………

4. Πόσο είναι το συνολικό μήκος της διαδρομής: ΑΡΜΛΠ; ………………………………….
5. Πόσο είναι το μήκος της δεύτερης διαδρομής ΑΦΠ;
…………………………….
6. Να χαράξετε την πιο σύντομη (κατά τη γνώμη σας) διαδρομή από την πόλη Α στην πόλη Π.
Η πιο σύντομη διαδρομή από την Αθήνα στο Παρίσι είναι:
……………………………………………………….

7. Να επαληθεύσετε την επιλογή σας, βρίσκοντας το μήκος της με το εργαλείο του Geogebra:
«Το μήκος της πιο σύντομης διαδρομής είναι ……………»

8. Να διατυπώστε μία γενικότερη διαπίστωση: «Το μήκος του………………….. τμήματος ΑΠ είναι …… ………………..από το μήκος κάθε …………… ……………… τμήματος, με άκρα τα Α και Π.»
(Διαλέξτε από τις λέξεις: τεθλασμένου, ευθύγραμμου, μεγαλύτερο, μικρότερο.)
Καλή Διασκέδαση

Κεφάλαιο 4ο

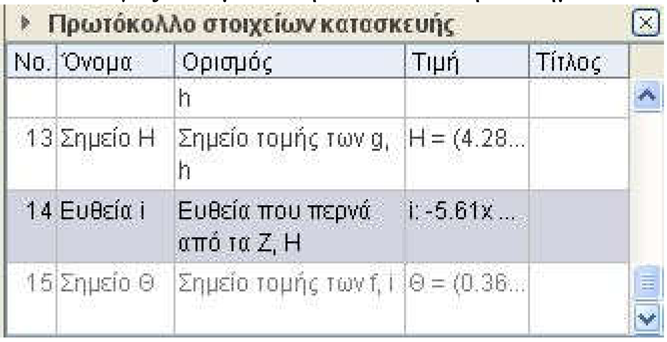
Κύκλος – Εργαλεία – Ρυθμίσεις

Στόχοι του μαθήματος**:** Μετά το 4ο κεφάλαιο οι εκπαιδευόμενοι θα είναι ικανοί:

- να δημιουργούν ένα μικροπείραμα σχετικό με έναν κύκλο ή μέρος αυτού (τόξο, τομέα κλπ).
- να εμφανίζουν, να αποκρύπτουν και να δημιουργούν εργαλεία.
- να χρησιμοποιούν τον κύκλο για να κατασκευάζουν άλλα εργαλεία.

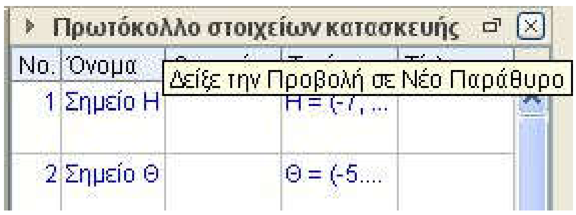
4.1. Σχεδιάζοντας κύκλους.

Προκειμένου να σχεδιάσουμε έναν κύκλο έχουμε τρεις επιλογές. **1η περίπτωση:** Όταν γνωρίζουμε δύο σημεία του κύκλου, εκ των οποίων το ένα είναι το κέντρο και το άλλο σημείο της περιφέρειας. Αφού επιλέξουμε το , επιλέγουμε το κέντρο, έστω το Α και στη συνέχεια το σημείο της περιφέρειας, έστω το Β. Ο κύκλος σχεδιάζεται αυτόματα. Μετακινώντας το κέντρο του κύκλου (το σημείο Α), ο κύκλος μεγαλώνει ή μικραίνει. Το ίδιο συμβαίνει από τη μετακίνηση του δεύτερου σημείου του (το Β). Επειδή το σημείο Β μεταβάλλει την ακτίνα του κύκλου, δεν θα πρέπει να χρησιμοποιείται στο μικροπείραμά μας, αυτός είναι και ο λόγος που μετά την κατασκευή το σημείο αυτό αποκρύπτεται (δεξί κλικ και αποεπιλέγουμε το «δείξε το αντικείμενο»). Αν κάποια στιγμή χρειαστεί να μεγαλώσουμε τον κύκλο, εμφανίζουμε το σημείο Β από το παράθυρο της άλγεβρας. Ο κύκλος μετακινείται από οποιοδήποτε σημείο της περιφέρειάς του, εκτός του Β. Στο παράθυρο της άλγεβρας εμφανίζεται ο κύκλος στην αλγεβρική του μορφή. Εξ ορισμού έχει τη μορφή $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, δίνοντάς μας το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου. Όμως, η μορφή εμφάνισης ελέγχεται από το δεξί κλικ → Ιδιότητες → Άλγεβρα, οπότε μπορούμε να την αλλάξουμε σε $x^2 + y^2 + a\,x + b\,y = k$. Επίσης, από Ιδιότητες → Χρώμα ή Στυλ, μπορούμε να ρυθμίσουμε το χρώμα, το γέμισμα του κύκλου ή το στυλ της γραμμής της περιφέρειάς του. Ίσως, εδώ, δεν πρέπει να παραλείψουμε το γεγονός ότι, αυξάνοντας την αδιαφάνεια του κύκλου, η μετακίνηση αυτού μπορεί να γίνει και από οποιοδήποτε σημείο του εσωτερικού του πλέον.



Σχήμα 4.1

2η περίπτωση: Με την επιλογή του σχεδιάζουμε κύκλο, με κέντρο που ορίζουμε με το κλικ του ποντικιού μας (σε υπάρχον σημείο ή καινούργιο) και ακτίνα, την οποία ορίζουμε στο παράθυρο που εμφανίζεται και μπορεί να είναι αριθμός ή γνωστό ευθύγραμμο τμήμα. Ο αριθμός ορίζει το μήκος της ακτίνας και το ποιο είναι το μέγεθος εξαρτάται από το ένα (1) των αξόνων.



Σχήμα 4.2

3η περίπτωση: Με την επιλογή , προκειμένου να σχεδιάσουμε τον κύκλο, επιλέγουμε πρώτα την ακτίνα και στη συνέχεια το κέντρο του. Η επιλογή της ακτίνας γίνεται με κλικ πάνω σε ένα υπάρχον ευθύγραμμο τμήμα ή σε δύο υπάρχοντα σημεία. Στις δύο τελευταίες περιπτώσεις η μετακίνηση το κύκλου γίνεται πλέον και από το κέντρο, χωρίς να αλλοιώνεται αυτός. Τα περί κύκλου, που είπαμε παραπάνω, προφανώς ισχύουν και εδώ.

4.2. Επανάληψη κατασκευής.

Πολλές φορές υπάρχει ανάγκη να επιδείξουμε κάτι, π.χ. τα βήματα μίας κατασκευής. Στο Geogebra υπάρχει το «Πρωτόκολλο στοιχείων κατασκευής», το οποίο ανοίγουμε από το «Προβολή». Εκεί αποθηκεύονται οι ενέργειες που έχουμε κάνει στο συγκεκριμένο αρχείο. Είναι προφανές ότι αντικείμενα που έχουν διαγραφεί από το αρχείο, διαγράφονται και από το πρωτόκολλο. Ας δούμε τη λειτουργία του μέσα από ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.1. Να βρεθεί γεωμετρικά το περίκεντρο ενός τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση. Το αρχείο της γεωμετρικής εύρεσης του περίκεντρου Θ του τριγώνου ΑΒΓ, από την κατασκευή του σημείου Α μέχρι το τέλος, απαιτεί δεκαπέντε (15) βήματα.

Στο Σχήμα 4.1 φαίνονται τα τρία (3) τελευταία βήματα (ολόκληρο το πρωτόκολλο μπορεί κάποιος να το δει στον Πίνακα 4.1). Με διπλό κλικ σε οποιαδήποτε εντολή αποκρύπτονται, στο αρχείο μας, όλες οι επόμενες και εμφανίζονται μόνον εκείνες, που έγιναν από την αρχή μέχρι εκείνη την στιγμή. Για παράδειγμα, αν κάνουμε διπλό κλικ στην ενέργεια Νο 6, όπου ολοκληρώνεται η κατασκευή του τριγώνου, θα αλλάξει ο φωτισμός των ενεργειών 7-15, θα μείνει ενεργός ο φωτισμός των ενεργειών 1-6 και οι ενέργειες θα εμφανίζονται και στο παράθυρο της γεωμετρίας. Οι ενέργειες 9 και 13 είναι διπλές, επειδή τα Σημεία αυτά εμφανίστηκαν συγχρόνως. Μετακινούμενοι με τα βελάκια πάνω (↑) ή κάτω (↓), αποκρύπτουμε ή εμφανίζουμε ενέργειες. Επίσης, κάνοντας κλικ στο εικονίδιο (δες Σχήμα 4.2), το πρωτόκολλο στοιχείων κατασκευής εμφανίζεται σε δικό του παράθυρο, για μεγαλύτερο έλεγχο και ευκολία μας. Θα πρέπει να τονίσουμε ότι αντικείμενα που έχουμε αποκρύψει, σε οποιαδήποτε φάση του προγράμματός μας, συνεχίζουν να βρίσκονται σε απόκρυψη.

Νο.	Όνομα	Ορισμός
1	Σημείο Α	
2	Σημείο Β	
3	Σημείο Γ	
4	Τμήμα a	Τμήμα [Α, Β]
5	Τμήμα b	Τμήμα [Β, Γ]
6	Τμήμα c	Τμήμα [Α, Γ]
7	Κύκλος d	Κύκλος που περνά από το Γ με κέντρο Β
8	Κύκλος e	Κύκλος που περνά από το Β με κέντρο Γ
9	Σημείο Δ	Σημείο τομής των e, d
9	Σημείο Ε	Σημείο τομής των e, d
10	Ευθεία f	Ευθεία που περνά από τα Ε, Δ
11	Κύκλος g	Κύκλος που περνά από το Α με κέντρο Β
12	Κύκλος h	Κύκλος που περνά από το Β με κέντρο Α
13	Σημείο Ζ	Σημείο τομής των g, h
13	Σημείο Η	Σημείο τομής των g, h
14	Ευθεία i	Ευθεία που περνά από τα Ζ, Η
15	Σημείο Θ	Σημείο τομής των f, i

Πίνακας 4.1

Άσκηση 4.1 Να βρεθεί γεωμετρικά το έκκεντρο του τριγώνου και να εμφανίσετε το Πρωτόκολλο στοιχείων κατασκευής του σε δικό του παράθυρο. Στη συνέχεια, να πάρετε ένα PrintScreen από το παράθυρο του πρωτοκόλλου, αφού κάνετε διπλό κλικ στην 7η θέση με πλήρη οθόνη και να το βάλετε ως εικόνα σε ένα αρχείο με όνομα Askisi_4-1.doc

Εκτός από τον παραπάνω τρόπο επανάληψης της κατασκευής, μπορούμε να ελέγξουμε ή να επαναλάβουμε την κατασκευή από την μπάρα ελέγχου. Από το εικονίδιο → Γραφικά →

(Ιδιότητες γραφικών) → Μπάρα πλοήγησης, για τα βήματα της κατασκευής τσεκάρουμε το «Δείξε την». Μπορούμε να εμφανίσουμε κουμπί για τον έλεγχο της εμφάνισης ή όχι του πρωτοκόλλου κατασκευής και κουμπί για των έλεγχο την κίνησης (Σχήμα 4.3).

4.3 Καινούργια εργαλεία.

Το Geogebra έχει ένα πλήθος εργαλείων για τη διευκόλυνσή μας στις κατασκευές. Όμως, μας δίνει τη δυνατότητα να δημιουργήσουμε τα δικά μας εργαλεία και να τα χρησιμοποιήσουμε, όταν τα χρειαστούμε. Έτσι, σε ένα οποιοδήποτε αρχείο ggb κατασκευάζουμε γεωμετρικά αυτό που θέλουμε να εκτελείται, όταν χρησιμοποιούμε το εν λόγω εργαλείο και στη συνέχεια από την επιλογή Εργαλεία → Δημιουργία νέο εργαλείο, επιλέγουμε τα κατάλληλα αντικείμενα εισόδου και εξόδου.

Σχήμα 4.3

Παράδειγμα 4.2 Να δημιουργηθεί ένα εργαλείο που θα κατασκευάζει το περίκεντρο ενός τριγώνου.

Λύση. Σε ένα νέο αρχείο ggb κατασκευάζουμε αρχικά τα σημεία Α, Β και Γ. Στη συνέχεια, με το κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετη των ΑΒ και ΑΓ. Έτσι ορίζεται το σημείο Δ, που δεν είναι τίποτε άλλο, παρά το περίκεντρο του τριγώνου. Στη συνέχεια, από Εργαλεία → Δημιουργία νέο εργαλείο → Αντικείμενα εξαγωγής επιλέγουμε το σημείο Δ, ενώ από το «Αντικείμενα εισαγωγής» επιλέγουμε τα αρχικά σημεία (εδώ τα Α, Β και Γ). Ίσως θα πρέπει να τονίσουμε ότι, αν κατά τη δημιουργία ενός νέου εργαλείου είναι επιλεγμένα περισσότερα του ενός αντικείμενα, τότε στα αντικείμενα εξαγωγής ή εισαγωγής εμφανίζονται περισσότερα αντικείμενα. Είναι προφανές ότι σε τέτοιες περιπτώσεις διαγράφουμε με το κουμπί ό,τι δεν χρειαζόμαστε και εμφανίζουμε ό,τι χρειαζόμαστε. Με το κουμπί ολοκληρώνουμε τη διαδικασία και το εργαλείο μας εμφανίζεται στη γραμμή των εργαλείων στο κουμπί του . Λάθος επιλογές στα εισαγόμενα αντικείμενα έχει ως αποτέλεσμα λάθος κατασκευές ή μήνυμα ότι δεν μπορεί να δημιουργηθεί το εργαλείο. Επίσης, η ύπαρξη ή όχι ετικέτας στο κατασκευασμένο σημείο έχει ως αποτέλεσμα την ύπαρξη ή όχι ετικέτας στην τελική κατασκευή.

Από το Εργαλεία → Διαχείριση εργαλείων μπορούμε να αποθηκεύσουμε το ή τα εργαλεία που δημιουργήσαμε. Η αποθήκευση γίνεται σε ένα αρχείο ggt (Geogebra tools), που μοιάζει με τα αρχεία ggb, στο παράδειγμά μας είναι το αρχείο perikentro.ggt. Αν τώρα ανοίξουμε ένα νέο αρχείο ggb, δεν εμφανίζεται το νέο εργαλείο μας. Για να το εμφανίσουμε, κάνουμε κλικ στο Αρχεία → Άνοιγμα → το αρχείο μας ggt, οπότε εμφανίζεται το εργαλείο, έτοιμο προς χρήση.

Άσκηση 4.2 Να δημιουργήσετε δύο εργαλεία, του ορθόκεντρου και του έκκεντρου και να αποθηκεύσετε αυτά σε ένα αρχείο με όνομα Askisi_4-2.ggt, προκειμένου να τα χρησιμοποιείτε σε άλλα αρχεία Geogebra.

4.4 Μία πρόταση διδασκαλίας.

Ο κύκλος του Euler ή αλλιώς ο κύκλος των 9 σημείων, στο βιβλίο της Γεωμετρίας είναι στη σελίδα 140, Γενικές ασκήσεις 8. Ίσως είναι ένα από τα κλασσικά προβλήματα που μπορούν να διδαχθούν ως «ανοιχτό πρόβλημα». Οι μαθητές θα έχουν την ευκαιρία να εξοικειωθούν, αφενός με τα δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου και αφετέρου με τα εγγράψιμα σχήματα. Αρχικά οι μαθητές θα ανακαλύψουν το κύκλο των 9 σημείων, καθοδηγούμενοι από ένα φύλλο εργασίας. Στη συνέχεια θα ανακαλύψουν νέα στοιχεία του κύκλου, καθοδηγούμενοι από ένα δεύτερο φύλλο εργασίας.

Προκειμένου να το διδάξουμε, θα χρησιμοποιήσουμε την επιλογή «κύκλος που διέρχεται από τρία σημεία» και τρία εργαλεία δικής μας κατασκευής, εκείνα των διχοτόμων, των υψών και των διαμέσων ενός τριγώνου, για να μην είναι φανερό ότι τα δευτερεύοντα στοιχεία που παίζουν κύριο ρόλο στο πρόβλημα είναι τα ύψη. Στο Πρόγραμμα ggb εμφανίζουμε μόνο το τρίγωνο Α, Β, Γ. Στο φύλλο εργασίας, «Ενδεικτικό Φύλλο Εργασίας για το Euler_4-4.ggb» στο τέλος του μαθήματος. Ζητάμε από τον μαθητή να γράψει τον κύκλο που διέρχεται από τα μέσα των τριών πλευρών και να παρατηρήσει ότι τα σημεία τομής του κύκλου αυτού με τις πλευρές του τριγώνου είναι τα ίχνη των υψών. Επιπλέον, να παρατηρήσει ότι ο κύκλος διέρχεται και από το μέσον των τμημάτων ΑΗ, ΒΗ και ΓΗ, όπου Η είναι το ορθόκεντρο. Παρατηρήστε ότι στο αρχείο Euler_4-4.ggb εμφανίζονται πολύ λίγα εργαλεία. Αυτό το κάνουμε ορισμένες φορές για να μην μπερδεύουμε τον μαθητή με περιττά εργαλεία. Μπορούμε να αφαιρέσουμε ή να προσθέσουμε εργαλεία επιλέγοντας: Εργαλεία → Προσαρμογή εργαλειοθήκης → «Εισαγωγή ή Αφαίρεση». Για την περίπτωση που κάνουμε λάθος και αφαιρέσουμε λάθος εργαλείο, μπορούμε να το επαναφέρουμε από το «Εισαγωγή» και, αν νομίζουμε ότι τα χρειαζόμαστε όλα, επανερχόμαστε στην αρχική κατάσταση από το «Επαναφορά προεπιλογών εργαλειοθήκης». Ακόμη, θα πρέπει να τονίσουμε ότι στον «κύκλο που διέρχεται από τρία σημεία» δεν έχουμε (από πριν) προσδιορίσει το κέντρο, όπως γινόταν στις άλλες μας επιλογές. Αυτό ξεπερνιέται, γράφοντας στο πεδίο εισαγωγής «Κέντρο[<το όνομα του κύκλου μας>]».

Τρεις θαυμάσιες επεκτάσεις του κύκλου του Euler είναι οι εξής:

1. Το ορθόκεντρο, το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου και το κέντρο του κύκλου του Euler είναι συνευθειακά.
2. Η ακτίνα το περιγεγραμμένου κύκλου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου του Euler.
3. Στην ίδια ευθεία βρίσκεται και το βαρύκεντρο του τριγώνου. Η ευθεία αυτή είναι η ευθεία του Euler.

Παρατήρηση: Ο περιγεγραμμένος κύκλος και ο κύκλος του Euler είναι ομοιόθετοι με κέντρο ομοιοθεσίας το Η και λόγο 2:1. Αυτό δίνει μία άλλη απόδειξη της άσκησης 4.4

Προκειμένου να διαπραγματευτούμε τις επεκτάσεις αυτές δημιουργούμε ένα αρχείο του Geogebra, όπου δίνονται, εκτός από το τρίγωνο ΑΒΓ και το ορθόκεντρο Η, τα ίχνη των υψών Α1, Α2 και Α3 και τα κέντρα των κύκλων του Euler K και του περιγεγραμμένου Ο. Ζητάμε οι μαθητές να εικάσουν για τη σχέση που συνδέει τα τρία σημεία (Η, Κ και Ο) και στη συνέχεια να αποδείξουν την εικασία τους. Να έχουμε υπόψη μας ότι είναι πιθανό να χρειαστούν υπόδειξη για την απόδειξη (προεκτείνουμε το ΗΚ κατά ίσο τμήμα προς το μέρος του Κ, προσδιορίζουμε το Ο και αποδεικνύουμε ότι βρίσκεται στις τρεις μεσοκαθέτους). Για την απόδειξη του 2ου, αν χρειαστεί, δίνουμε την υπόδειξη του παραλληλογράμμου ΑΑ'ΔΕ, όπου Α' είναι το μέσον του ΑΗ. Για το βαρύκεντρο έχουμε διάφορες επιλογές, π.χ. μπορούμε να έχουμε ετοιμάσει εργαλείο προσδιορισμού του βαρύκεντρου ή μπορούμε να το εντοπίσουμε γεωμετρικά. Αν χρειαστεί υπόδειξη, τους κατευθύνουμε στο ότι είναι η τομή της διαγωνίου του παραλληλογράμμου με το τμήμα που ενώνει την κορυφή του με το μέσον της μιας απέναντι πλευράς του (αρχείο: Euler_4-4a.ggb).

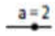
Άσκηση 4.3 Να δημιουργηθεί ένα μικροπείραμα, που θα έχει τα εξής:

1. Ένα εργαλείο δημιουργίας των υψών ενός τριγώνου, του ορθόκεντρου και των ιχνών των υψών στις πλευρές αυτού.
2. Το ελάχιστο σχήμα για να ανακαλύψουν οι μαθητές τη σχέση που συνδέει τα συμμετρικά του ορθόκεντρου ως προς τις πλευρές του τριγώνου.
3. Τον αναγκαίο αριθμό εργαλείων, στην μπάρα εργαλείων του.
4. Το σχετικό φύλλο εργασίας.

Άσκηση 4.4 Να δημιουργηθεί ένα μικροπείραμα που θα έχει τα εξής:

1. Ένα εργαλείο δημιουργίας του περιγεγραμμένου κύκλου ενός τριγώνου.
2. Το ελάχιστο σχήμα για να ανακαλύψουν οι μαθητές τη σχέση που συνδέει τα ίχνη των καθέτων από ένα σημείο του περιγεγραμμένου κύκλου, ως προς τις πλευρές ενός τριγώνου.
3. Τον αναγκαίο αριθμό εργαλείων, στην μπάρα εργαλείων του.
4. Το σχετικό φύλλο εργασίας.

4.5 Εισαγωγή δρομέα

Ο δρομέας ή μεταβολέας εισάγεται με το κουμπί . Κάνοντας κλικ στο ως άνω κουμπί και στη συνέχεια κλικ στον καμβά σχεδίασης (παράθυρο της Γεωμετρίας), εισάγουμε τον δρομέα, ουσιαστικά μία μεταβλητή, με όνομα της επιλογής μας, όπου μπορούμε να προσδιορίσουμε τη φύση του, π.χ. αν θα είναι πραγματικός αριθμός, γωνία ή ακέραιος. Επίσης, από την καρτέλα διάστημα, μπορούμε να ορίσουμε το εύρος της μεταβολής του (ελάχιστη και μέγιστη τιμή), καθώς και το βήμα της αύξησής του. Από την καρτέλα του δρομέα ορίζουμε τη θέση του στο παράθυρο (οριζόντια ή κατακόρυφη) και το μέγεθος της εμφάνισής του. Τέλος, από την καρτέλα κίνηση ορίζουμε τον τρόπο που θα κινείται, σε περίπτωση που του δώσουμε κίνηση. Φυσικά, τις παραπάνω επιλογές μπορούμε να τις αλλάξουμε καθοδόν από τις ιδιότητες (δεξί κλικ πάνω του) και να προσθέσουμε και άλλες π.χ. χρώμα, πάχος κλπ. Εκείνο που μόνιμα θα πρέπει να έχουμε στο μυαλό μας είναι ότι για την περίπτωση των γωνιών, αυτές εξ ορισμού είναι σε μοίρες. Αν κάποια στιγμή αποφασίσουμε να τις μετράμε σε ακτίνια, θα πρέπει από Επιλογές → Ιδιότητες να επιλέξουμε ως μέτρησή τους τα ακτίνια. Επίσης, αν ο δρομέας μας έχει ορισθεί ως αριθμός, όσες φορές εμείς θέλουμε με τον δρομέα αυτόν να ορίσουμε γωνία σε μοίρες, θα πρέπει να τον συνοδεύουμε με το σημάδι των μοιρών (Alt + o).

Έχουμε ήδη πει ότι από το πεδίο εισαγωγής ορίζουμε μεταβλητές, απλά θέτοντας το όνομα και την τιμή τους. Έτσι, γράφοντας α = 2, ορίζεται η μεταβλητή (αριθμού) α και έχει τιμή τον αριθμό 2, ενώ γράφοντας β = 35o (35 Alt + o) ορίζεται η μεταβλητή (γωνίας) β και έχει τιμή 35o. Ωστόσο, κοιτώντας στο παράθυρο της άλγεβρας θα δούμε τη μεταβλητή να είναι μεν ορισμένη αλλά να μην εμφανίζεται στο παράθυρο σχεδίασης (Γεωμετρίας). Εμφανίζοντάς την βλέπουμε ότι αναπαρίσταται από δρομέα αντίστοιχο κάθε φορά.

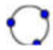
Παράδειγμα 4.2 Να δημιουργηθεί ένα αρχείο επίδειξης, προκειμένου να δειχθεί ο τρόπος που μεταβάλλονται οι συντεταγμένες ενός σημείου, που κινείται στην περιφέρεια ενός κύκλου σε σχέση με το τόξο που διαγράφει.

Προκειμένου να δημιουργήσουμε αυτό το αρχείο επίδειξης, δημιουργούμε αρχικά, χωρίς βλάβη της γενικότητας, έναν κύκλο με κέντρο Ο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ΟΑ=1, όπου Α είναι το σημείο τομής του κύκλου με τον οριζόντιο άξονα. Στη συνέχεια ορίζουμε έναν δρομέα αριθμών a με ελάχιστη τιμή -6.28 και μέγιστη 6.28 και ως βήμα μεταβολής ορίζουμε το 0.1. Επίσης δημιουργούμε μία γωνία α με κορυφή το Ο, μία πλευρά της το ΟΑ και μέτρο ίσο με a. Έτσι προσδιορίζεται το Α' και με το κουμπί ορίζουμε το τόξο ΑΑ', οπότε αποκρύπτουμε τη γωνία. Τέλος, επειδή το τόξο μας το μετράμε σε ακτίνια, προσαρμόζουμε τον οριζόντιο άξονα από το → Γραφικά → (Ιδιότητες γραφικών) → Άξονας x και τσεκάρουμε το απόσταση, επιλέγοντας π ή $\frac{\pi}{2}$. Αφού ετοιμάσαμε τα βασικά, ορίζουμε τώρα δύο σημεία, το Σ = (a, x(A')) και το Σ' = (a, y(A')), κάνουμε το ίχνος ενεργό από δεξί κλικ, τσεκάροντας το στα δύο σημεία και δίνουμε κίνηση στον δρομέα a (Paradeigma_4_2.ggb). Προφανώς η κίνηση δίνεται από το κουμπί κάτω αριστερά, όμως μπορούμε να κινήσουμε τον δρομέα με το ποντίκι, αλλά και τα βελάκια του πληκτρολογίου, αν τον επιλέξουμε.

Άσκηση 4.5 Οι παραμετρικές εξισώσεις μιας έλλειψης είναι x = 5 συν(t) και y = 3 ημ(t). Να δημιουργηθεί ένα *αρχείο επίδειξης*, προκειμένου να δειχθεί ο τρόπος που μεταβάλλεται η θέση ενός σημείου Μ με συντεταγμένες (x,y), όταν ο δρομέας t αντιπροσωπεύει ένα τόξο που κινείται στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου και μεγαλώνει ή μικραίνει, όπως και ο δρομέας. (Το τόξο θα φαίνεται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο και το Μ θα κινείται με το κουμπί).

Ενδεικτικό Φύλλο Εργασίας για το Euler_4-4.ggb

Σχολείο:……………………………………………………
Όνομα και Επώνυμο: …………………………………..
Τάξη:……………   Ημερομηνία ……………….

1. Ανοίξτε το αρχείο “Euler_4-4.ggb”.
2. Βρείτε τα μέσα Κ, Μ και Ν των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ με το κουμπί  και γράψτε τον κύκλο που ορίζουν αυτά με το κουμπί 
3. Ο Κύκλος αυτός διέρχεται και από άλλα τρία σημεία στις πλευρές του τριγώνου, που είναι σταθερά. Χρησιμοποιήστε τα εργαλεία  για να κάντε μία εικασία.

………

Αποδείξτε την εικασία σας και κάντε την πρόταση.

4. Επίσης ο κύκλος διέρχεται και από τρία σταθερά σημεία στο εσωτερικό του τριγώνου. Ανακαλύψτε τα και κάντε μία καινούργια εικασία.

……

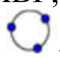
Αποδείξτε την και διατυπώστε μία ολοκληρωμένη πρόταση για τα εννιά (9) σημεία που συνολικά έχετε.

……

Καλή Διασκέδαση

Ενδεικτικό Φύλλο Εργασίας για το Euler_4-4a.ggb

Σχολείο:…………………………………………………
Όνομα και Επώνυμο: …………………………………..
Τάξη:……………   Ημερομηνία ……………….

1. Ανοίξτε το αρχείο “Euler_4-4a.ggb”.
2. Βρείτε τα Α1, Α2 και Α3 των υψών του τριγώνου ΑΒΓ, σημειώστε με Η το ορθόκεντρο και γράψτε τον κύκλο c που ορίζουν αυτά με το κουμπί . Στη συνέχεια βρείτε το κέντρο του, γράφοντας στο πεδίο εισαγωγής: Κέντρο[c]. Ο Κύκλος c διέρχεται και από τα μέσα των πλευρών του τριγώνου.
3. Να βρεθεί το περίκεντρο με τον τρόπο που περιγράφτηκε στο 2 και κάντε μία εικασία για τα τρία αυτά σημεία.

………

……………………………………………………………………

4. Αποδείξτε την εικασία σας και κάντε την πρόταση. (Υπόδειξη: Θα δοθεί από τον διδάσκοντα, αν είναι απαραίτητη).
5. Ποια σχέση συνδέει την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου με τη διάμετρο του κύκλου του Euler; Κάντε μία καινούργια εικασία και αποδείξτε την.

………

6. Βρείτε το βαρύκεντρο του τριγώνου. Κάντε μία καινούργια εικασία και αποδείξτε την.

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

Καλή Διασκέδαση

Κεφάλαιο 5ο

Κάθετες, Παράλληλες κλπ. Λογικές μεταβλητές.

Στόχοι του μαθήματος**:** Μετά το 5ο μάθημα οι εκπαιδευόμενοι θα είναι ικανοί:

- να δημιουργούν ένα μικροπείραμα χρησιμοποιώντας τα εργαλεία της καθέτου της παράλληλης, της εφαπτομένης κλπ.,
- να χρησιμοποιούν λογικές μεταβλητές για να εμφανίζουν και να αποκρύπτουν αντικείμενα και να χρησιμοποιούν το κουτί επιλογής,
- να χρησιμοποιούν λογικές μεταβλητές για να αλλάζουν δυναμικά τα αντικείμενα που έχουν δημιουργήσει.

5.1. Άλλες Γραμμές.

Στο Σχήμα 5.1 φαί-νονται ένα πλήθος γεωμετρικών γραμμών που κάποιος μπορεί να φέρει με το Geogebra, με μερικά απλά κλικ εκ των οποίων το ένα θα είναι στο εικονίδιο του εργαλείου. Για παράδειγμα, κάνοντας κλικ στο εικονίδιο της κάθετης γραμμής και στη συνέχεια κλικ σε ένα σημείο και μία ευθεία (χωρίς να έχει σημασία η σειρά των δύο τελευταίων) κατά-σκευάζεται η <u>κάθετη</u> από το εν λόγω σημείο στην ευθεία. Με παρόμοιο τρόπο κατασκευάζεται η <u>παράλληλη</u> ευθεία από ένα σημείο σε μία ευθεία. Η <u>μεσοκάθετη</u> ενός τμήματος προκύπτει, αν κάνουμε κλικ στο εικονίδιο της μεσοκάθετης τμήματος και στο ευθύγραμμο τμήμα. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι αυτή (η μεσοκάθετη) προκύπτει ακόμη και χωρίς την ύπαρξη του τμήματος, αλλά μόνο με κλικ στα δύο άκρα που ορίζουν αυτό.

Σχήμα 5.1

Η <u>διχοτόμος</u> μιας γωνίας, αλλά και εκείνη της κατακορυφήν της γωνίας, προκύπτει με κλικ σε τρία σημεία της, όπου το μεσαίο είναι το σημείο της κορυφής και τα άλλα δύο στις πλευρές της, ένα σε κάθε μία. Ωστόσο, το εργαλείο της διχοτόμου λειτουργεί και με κλικ στις πλευρές της γωνίας. Στην περίπτωση αυτή μας δίνει και τη διχοτόμο της παραπληρωματικής της, δηλαδή δίνει δύο ευθείες. Δεν μπορούμε να σβήσουμε τη μία εξ' αυτών, παρά μόνο να την αποκρύψουμε (δεξί κλικ).

Με κλικ στο εργαλείο των εφαπτόμενων και κλικ σε ένα σημείο στο εξωτερικό ενός κύκλου και στον κύκλο παίρνουμε τις εφαπτόμενές του. Αν το σημείο είναι επί του κύκλου, προφανώς παίρνουμε την εφαπτομένη του. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, δεν μπορούμε να σβήσουμε τη μία εξ' αυτών, αλλά μόνο να την αποκρύψουμε.

Το εργαλείο πολική ή διαμετρική ευθεία έχει δύο χρήσεις. Με κλικ στο εργαλείο και στη συνέχεια κλικ σε έναν κύκλο (ή μία κωνική) και σε ένα σημείο εκτός αυτού, παίρνουμε την πολική του σημείου ως προς τον κύκλο, δηλαδή την ευθεία που ενώνει τα σημεία επαφής των δύο εφαπτόμενων του κύκλου από το σημείο. Όταν το σημείο βρίσκεται επί του κύκλου, τότε η πολική συμπίπτει με την εφαπτομένη. Στην περίπτωση που το σημείο (ο πόλος) είναι στο εσωτερικό του κύκλου, η πολική του δεν τέμνει τον κύκλο και ουσιαστικά είναι η ευθεία, στην οποία βρίσκονται τα σημεία τομής των εφαπτόμενων στα άκρα των χορδών που διέρχονται από το σημείο αυτό. Επίσης, με κλικ στον κύκλο (ή μία κωνική) και μία ευθεία παίρνουμε αυτή που ονομάζεται εδώ διαμετρική ευθεία, δηλαδή την ευθεία που διέρχεται από το κέντρο της κωνικής και η τομή της με τον κύκλο μας δίνει δύο σημεία (επί του κύκλου) που οι εφαπτόμενες του κύκλου είναι παράλληλες προς την ευθεία.

Η καλύτερη κατάλληλη γραμμή, ασφαλώς, είναι η ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων. Με κλικ στο εικονίδιο και στα εν λόγω σημεία ο σχεδιασμός της γίνεται αμέσως.

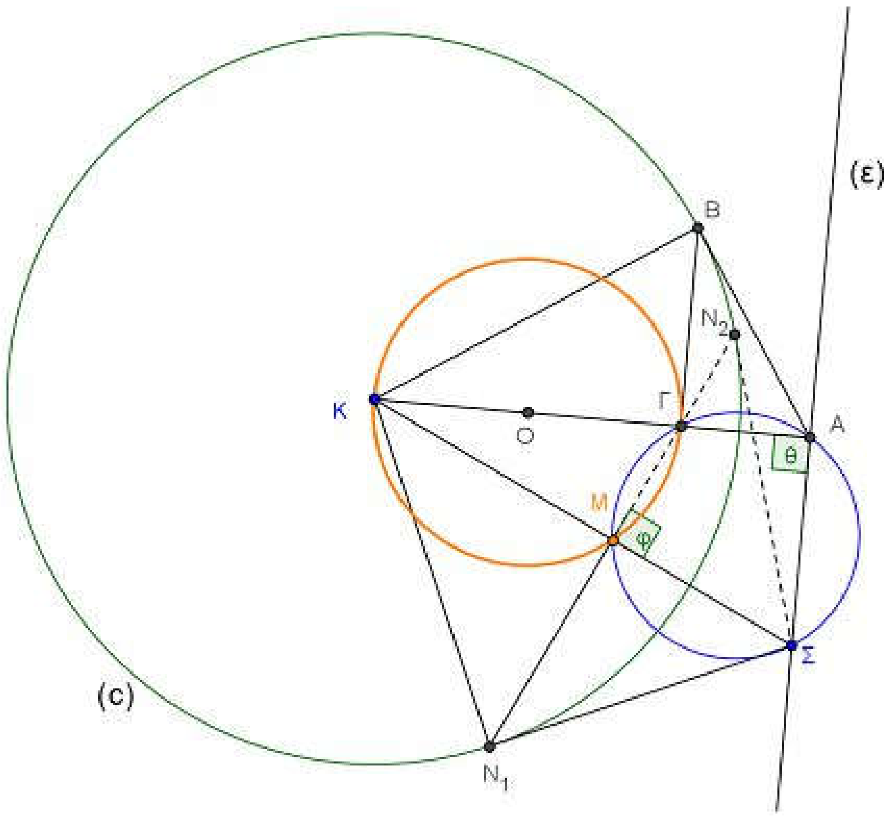
Με το εργαλείο Γεωμετρικός τόπος μπορούμε να δημιουργήσουμε το γεωμετρικό τόπο στον οποίο ανήκει ένα σημείο, υπό την προϋπόθεση ότι αυτός εξαρτάται από ένα άλλο σημείο ή έναν δρομέα. Η χρήση είναι απλή, αρκεί κάποιος, αφού κάνει κλικ στο εργαλείο, στη συνέχεια να κάνει κλικ στα δύο σημεία (του τόπου και του αρχικού σημείου) ή κάνοντας κλικ στο σημείο (του τόπου) και τον δρομέα. Βέβαια, όταν πρόκειται για γεωμετρικό τόπο, ιδιαίτερα χρήσιμο είναι η ενεργοποίηση του ίχνους.

Άσκηση 5.1 Θεωρούμε τον κύκλο (Ο, ΟΑ) και την εφαπτομένη του x'x στο σημείο Α. Έστω τυχαίο σημείο Σ επί της x'x και (ε) η πολική του Σ ως προς τον κύκλο. Έστω Μ το μέσον της χορδής που αποκόπτεται από τον κύκλο στην (ε). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος αυτού (του Μ).

Για να διδάξουμε τη λύση της άσκησης υπάρχει το αρχείο Askisi_5-1.ggb και το «ενδεικτικό φύλλο εργασίας για το Askisi_5-1.ggb».

Άσκηση 5.2 (Επέκταση της Άσκησης 5.1.) Θεωρούμε τον κύκλο (Ο, ΟΑ) και την ευθεία x'x εκτός αυτού. Έστω τυχαίο σημείο Σ επί της x'x και (ε) η πολική του Σ ως προς τον κύκλο. Έστω Μ το μέσον της χορδής που αποκόπτεται από τον κύκλο στην (ε). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος αυτού (του Μ). Να δημιουργήσετε το σχετικό αρχείο και φύλλο εργασίας, προκειμένου να διδάξετε την άσκηση.

Λύση του προβλήματος: Αναδιατυπώνουμε το πρόβλημα ως εξής. Θεωρούμε τον κύκλο (c) με κέντρο Κ και ακτίνα R και την ευθεία (ε). Έστω τυχαίο σημείο Σ επί της (ε) και οι εφαπτόμενες ΣΝ1 και ΣΝ2 από αυτό στον κύκλο (c). Ο Γεωμετρικός τόπος των μέσων Μ των χορδών Ν1Ν2 είναι ο κύκλος (Ο,$\frac{ΚΓ}{2}$), όπου Γ είναι το σημείο του κάθετου τμήματος ΚΑ στην (ε), για το οποίο ισχύει ΚΓ×ΚΑ=R^2.



Σχήμα 5.2

Απόδειξη: Έστω $ΣN_1$ και $ΣN_2$ οι εφαπτόμενες στον κύκλο (c) από το σημείο Σ της ευθείας (ε), στο Σχήμα 5.2. Τότε το σημείο Μ είναι τυχόν σημείο του τόπου και προφανώς θα ισχύουν: ΚΣ $\perp MN_1$ και ΚΜ×ΚΣ = R_2 (από τα όμοια τρίγωνα KN_1M και $KΣN_1$). Έστω τώρα η ΚΑ ⊥ (ε), επομένως το Α σταθερό και ΑΒ η εφαπτομένη από το Α στο κύκλο (c) και επιπλέον ΒΓ το ύψος του τριγώνου ΑΒΚ από την κορυφή της ορθής γωνίας Β, οπότε και το Γ σταθερό και κατασκευάσιμο. Τότε, επίσης, θα ισχύει ΚΓ×ΚΑ = R_2 (από τα όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΚΒ). Από τις δύο ισότητες προκύπτει ότι ΚΜ×ΚΣ = ΚΓ×ΚΑ, οπότε το τετράπλευρο ΑΓΜΣ είναι εγγράψιμο. Έτσι, επειδή η γωνία ΣΑΓ είναι ορθή, ορθή θα είναι και η γωνία ΣΜΓ, οπότε το Μ θα βλέπει υπό ορθή γωνία το σταθερό ευθύγραμμο τμήμα ΚΓ και συνεπώς ο Γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος που γράφεται με διάμετρο ΚΓ.

5.2. Λογικές Μεταβλητές.

Οι λογικές μεταβλητές παριστάνονται με τον ίδιο τρόπο που παριστάνονται και οι αριθμητικές και παίρνουν τιμές true και false. Μπορούν να εισαχθούν με δύο τρόπους, είτε από το πεδίο εισαγωγής, π.χ. a = true ή b = false, είτε μέσω του κουμπιού , με τον τίτλο «κουτί επιλογής για εμφάνιση /απόκρυψη αντικειμένου». Η εμφάνιση στην οθόνη είναι της μορφής a , όπου a είναι το όνομα, ενώ η εμφάνιση του τικ σημαίνει ότι η μεταβλητή έχει την τιμή true, διαφορετικά έχει την τιμή false. Φυσικά, μπορούμε να ορίσουμε ως όνομα, όνομα της αρεσκείας μας ή όνομα που θα έχει σχέση με ό,τι αυτή σηματοδοτεί. Σε ίδια αποτελέσματα θα καταλήγαμε, αν δίναμε στις μεταβλητές την τιμή 0 ή 1.

<table>
<tr><th>Τελεστές</th><th>Σύμβολα</th><th>Από πληκτρολόγιο</th><th>Παράδειγμα</th><th>Τύποι αντικειμένων</th></tr>
<tr><td>Ισότητα</td><td>$\stackrel{?}{=}$</td><td>==</td><td>a $\stackrel{?}{=}$ b ή
a == b</td><td>Αριθμοί, σημεία, γραμμές, νομίσματα.</td></tr>
<tr><td>Ανισότητα</td><td>≠</td><td>!=</td><td>a ≠ b ή a != b</td><td>Αριθμοί, σημεία, γραμμές, νομίσματα.</td></tr>
<tr><td>Μικρότερο από</td><td><</td><td><</td><td>a < b</td><td>Αριθμοί.</td></tr>
<tr><td>Μεγαλύτερο από</td><td>></td><td>></td><td>a > b</td><td>Αριθμοί.</td></tr>
<tr><td>Μικρότερο ή ίσο</td><td>≥</td><td><=</td><td>a ≥ b ή
a <= b</td><td>Αριθμοί.</td></tr>
<tr><td>Μεγαλύτερο ή ίσο</td><td>≥</td><td>>=</td><td>a ≤ b ή
a >= b</td><td>Αριθμοί.</td></tr>
<tr><td>και</td><td>∧</td><td>&&</td><td>a ∧ b ή
a && b</td><td>Λογικές μεταβλητές.</td></tr>
<tr><td>ή</td><td>∨</td><td>||</td><td>a ∨ b ή a || b</td><td>Λογικές μεταβλητές.</td></tr>
<tr><td>όχι</td><td>¬</td><td>!</td><td>¬a ή !a</td><td>Λογικές μεταβλητές.</td></tr>
<tr><td>Παράλληλη</td><td>||</td><td></td><td>a || b</td><td>Ευθείες γραμμές.</td></tr>
<tr><td>Κάθετη</td><td>⊥</td><td></td><td>a ⊥ b</td><td>Ευθείες γραμμές.</td></tr>
<tr><td>Ανήκει στην</td><td>∈</td><td></td><td>a ∈ list1</td><td>Αριθμοί, λίστα αριθμών.</td></tr>
</table>

Πίνακας 5.1

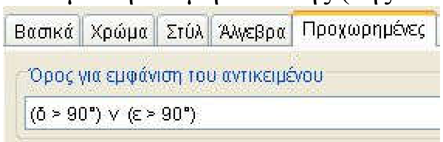
Στον πίνακα 5.1 φαίνονται οι πράξεις που αποδίδουν λογικές τιμές (true, false) μετά την εκτέλεσή τους. Για τα σύμβολα ήδη έχουμε πει ότι εμφανίζονται στο πεδίο στο οποίο κάνουμε κάποια πράξη με κλικ στο εικονίδιο α .

Για τις πράξεις μεταξύ των λογικών ποσοτήτων, προφανώς, ισχύουν οι πίνακες αλήθειας του προτασιακού λογισμού, που παραθέτουμε αμέσως στον Πίνακα 5.2.

Εκείνο που κάποιος παρατηρεί είναι ότι δεν υπάρχει η αποκλειστική διάζευξη (xor). Αυτό, όμως, αντιμετωπίζεται «περιφραστικά» με την (a&&(!b))||(b&&(!a)).

5.3. Εμφάνιση ή απόκρυψη αντικειμένων.

Η χρήση των λογικών μεταβλητών βρίσκει εφαρμογή στην εμφάνιση ή απόκρυψη αντικειμένων. Δεν είναι λίγες οι φορές που χρειάζεται να γίνει κάτι τέτοιο. Ας δούμε ένα παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε να διδάξουμε το ύψος ΑΔ ενός τριγώνου ΑΒΓ. Γνωρίζουμε ότι σε μία τέτοια περίπτωση, όταν η γωνία Β ή η γωνία Γ είναι αμβλείες, το ύψος είναι εκτός του τριγώνου. Έτσι, αφού σχηματίσουμε το τρίγωνο ΑΒΓ και την ευθεία ΒΓ (a), βρίσκουμε την τομή Δ αυτής (της a) με την κάθετη (b) από την κορυφή Α προς αυτή. Ορίζουμε το τμήμα ΑΔ και αποκρύπτουμε την ευθεία (b). Επίσης, ορίζουμε τις γωνίες ΓΒΑ και ΑΓΒ ως (δ) και (ε) αντίστοιχα. Τέλος, στην ευθεία a από δεξί κλικ → Ιδιότητες → Προχωρημένες, γράφουμε στο πεδίο «Όρος για εμφάνιση του αντικειμένου», τη συνθήκη που απαιτείται, εδώ (δ>90ο) ή (ε>90ο) Σχήμα 5.3. Στο αρχείο ypsos_5_3.ggb μπορείτε να δείτε το πώς συμπεριφέρεται η βάση του τριγώνου, καθώς μετακινείται η κορυφή του Α.



Σχήμα 5.3

Άσκηση 5.3. Σε ένα αρχείο ggb να δημιουργηθεί ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (τα Α και Β είναι στη βάση) και το ύψος του ΔΕ. Όταν το Ε δεν ανήκει στο τμήμα ΑΒ, τότε να εμφανίζεται η προέκταση της βάσης ΑΒ, αντίστοιχα προς το μέρος που βρίσκεται το Ε. Η προέκταση από την άλλη πλευρά της ΑΒ να μην εμφανίζεται.

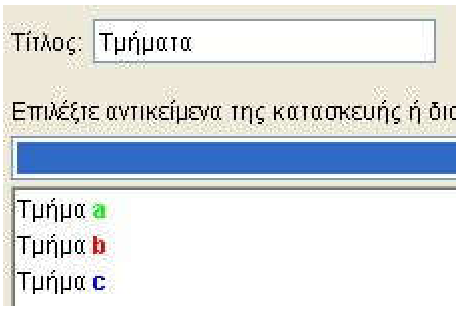
Πολλές φορές θέλουμε τα αντικείμενά μας να έχουν χρώμα ή να αλλάζουν χρώμα κάτω από κάποιες συνθήκες. Ο έλεγχος ή η αλλαγή του χρώματος μπορεί να είναι δυναμικά, αρκεί να ακολουθήσουμε τη διαδρομή δεξί κλικ → Ιδιότητες → Προχωρημένες και να γράψουμε στο πεδίο «Δυναμικά χρώματα» τιμές σε κάθε πεδίο μεταξύ του 0 και του 1. Φυσικά, στις θέσεις αυτές μπορούμε να έχουμε μεταβλητές ανεξάρτητες ή εξαρτημένες και να ελέγχουμε τα χρώματα. Στο αρχείο xromata.ggb υπάρχουν τρεις δρομείς, που ελέγχουν το χρώμα ενός κύκλου με πλήρη αδιαφάνεια. Μετακινήστε τους δρομείς για να δείτε τις αλλαγές των χρωμάτων. Επίσης, επειδή οι τιμές των λογικών μεταβλητών είναι true = 1 και false = 0, μπορούμε να ελέγχουμε τα χρώματα με τιμές των λογικών μεταβλητών. Στο ίδιο αρχείο υπάρχει ένα τρίγωνο, που μετακινώντας τις κορυφές του αυτό γίνεται πράσινο, όταν είναι ορθογώνιο, κόκκινο, όταν είναι αμβλυγώνιο και μπλε, όταν είναι οξυγώνιο. Η αδιαφάνειά του είναι 0.5 (ή 50%).

a	b	¬a (!a)	a∧b (a && b)	a∨b (a || b)
true	true	false	true	true
true	false	false	false	true
false	true	true	false	true
false	false	true	false	false

Πίνακας 5.2.

5.4. Ένα αρχείο πολλά πειράματα.

Πολλές φορές θέλουμε στο ίδιο αρχείο να έχουμε περισσότερα πειράματα του ενός, όχι τόσο για οικονομία, αλλά περισσότερο για σύγκριση και έμφαση. Θυμηθείτε το παράδειγμα, όπου θέλαμε να αλλάξουμε την άποψη των μαθητών μας, σχετικά με το ότι ο αριθμός των τμημάτων και ευθειών, που ορίζονται από έναν σταθερό αριθμό σημείων, δεν ταυτίζεται. Στην περίπτωση αυτή, δημιουργούμε πρώτα το ένα πείραμα και εισάγουμε από το κουμπί ένα «κουτί επιλογής – απόκρυψης». Κατά τη δημιουργία του, του δίνουμε ένα όνομα, πχ. «τμήματα» και επιλέγουμε τα τμήματα που θέλουμε να ελέγχουμε. Με το «εφαρμογή» το κουτί μας είναι έτοιμο, Σχήμα 5.4. Έτσι, λοιπόν, με τσεκάρισμα του κουτιού εμφανίζονται τα ευθύγραμμα τμήματα a, b και c, π.χ. eythies_tmimata_5_4.ggb. Φυσικά, τα ευθύγραμμα τμήματα συνεχίζουμε να τα ελέγχουμε με τον τρόπο που αναπτύχθηκε στην παράγραφο 5.3 και να προσθέτουμε ή να αφαιρούμε λογικές συνθήκες.



Σχήμα 5.4

Το κουτί επιλογής είναι απλά μία λογική μεταβλητή, στο παράδειγμά μας η μεταβλητή d. Με τον ίδιο τρόπο έχουμε εισαγάγει και ένα δεύτερο «κουτί επιλογής – απόκρυψης» και το έχουμε ονομάσει «ευθείες». Αυτό είναι η μεταβλητή h. Επιλέγοντας το κουτί «τμήματα» εμφανίζονται τα ευθύγραμμα τμήματα, ενώ επιλέγοντας το κουτί «ευθείες» εμφανίζονται οι αντίστοιχες ευθείες. Επιλέγοντας και τα δύο συγχρόνως δεν εμφανίζεται κανένα. Το τελευταίο έγινε, επειδή το τμήματα υπερκαλυπτόταν από τις ευθείες και το αποτέλεσμα δεν ήταν λειτουργικό. Είναι φανερό ότι στην περίπτωση αυτή χρειαστήκαμε περισσότερες συνθήκες πέραν της αρχικής και έτσι σε κάθε αντικείμενο προσθέσαμε την άρνηση της άλλης. Για παράδειγμα, σε όλα τα τμήματα στο πεδίο «Όρος για εμφάνιση του αντικειμένου» η συνθήκη που απαιτείται είναι d&&(!h), ενώ σε όλες τις ευθείες η συνθήκη που απαιτείται είναι h&&(!d). Η εμφάνιση του κουτιού επιλογής – απόκρυψης εμφανίζεται ή αποκρύπτεται με τον ίδιο τρόπο, που εμφανίζονται ή αποκρύπτονται όλα τα αντικείμενα, επειδή είναι και αυτό ένα αντικείμενο.

Άσκηση 5.4. Να δημιουργήσετε ένα αρχείο με δύο κουτιά επιλογής, όπου με το ένα να επιλέγουμε τις διχοτόμους και με το άλλο τις διαμέσους ενός τριγώνου. Η επιλογή των δύο να μη μας δίνει τίποτε.

Πριν κλείσουμε την παράγραφο αυτή, θα πούμε δύο λόγια για τη λύση του ίδιου προβλήματος με κουμπί. Με το κουμπί  εισάγουμε στο πεδίο γραφικών ένα κουμπί. Κατά την εισαγωγή κουμπιού μας προτρέπει να δώσουμε στο κουμπί μας όνομα και στη συνέχεια τις ενέργειες που θέλουμε να πραγματοποιούνται, όταν κάνουμε κλικ πάνω του. Στο αρχείο eythies_tmimata_5_4b.ggb δημιουργήσαμε δύο κουμπιά, με όνομα «τμήματα» και «ευθείες» αντίστοιχα και σε καθένα δώσαμε ως ενέργειες, στο μεν κουμπί με όνομα «τμήματα» Τιμή[d, true] και Τιμή[h, false], ενώ στο κουμπί με το όνομα «ευθείες» Τιμή[h, true] και Τιμή[d, false] (Η αντίστοιχη εντολή στα Αγγλικά είναι SetValue[<Boolean>,<0|1>]). Από δεξί κλικ → Ιδιότητες → Δέσμη ενεργειών, μπορούμε να τροποποιήσουμε τις ενέργειες που αρχικά ορίσαμε. Ο έλεγχος των χρωμάτων και των γραμμάτων γίνεται με τον τρόπο που είδαμε σε όλα τα αντικείμενα του Geogebra.

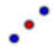
Άσκηση 5.5. Στο αρχείο eythies_tmimata_5_4b.ggb να δημιουργήσετε ένα τρίτο κουμπί με όνομα «Σημεία», ώστε να μην εμφανίζονται ούτε τα τμήματα ούτε οι ευθείες, παρά μόνο τα σημεία Α, Β και Γ.

Ενδεικτικό Φύλλο Εργασίας για το Askisi_5-1.ggb

Σχολείο:…………………………………..
Όνομα και Επώνυμο: ……………………..………..
Τάξη: ……………   Ημερομηνία ……………………….

1. Ανοίξτε το αρχείο “Askisi_5-1.ggb”.
2. Βρείτε την πολική  του σημείου Σ, ως προς τον κύκλο (Ο, ΟΑ). Τι παρατηρείτε (από πού διέρχεται); Πώς το ερμηνεύετε;

……
……
………………………………………………

3. Ο κύκλος (Ο, ΟΑ) αποκόπτει από την πολική την χορδή ΑΒ. Βρείτε το μέσον Μ αυτής . Βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του Μ καθώς το Σ διαγράφει την ευθεία της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο Α. Κάντε μία εικασία.

……
……
…………………

4. Αποδείξτε την εικασία σας και κάντε την πρόταση. (Υπόδειξη: Αφού φέρετε την ΟΒ, ενώστε το Μ με το μέσον της ακτίνας ΟΑ).

……
……
………………

Καλή Διασκέδαση

Κεφάλαιο 6ο

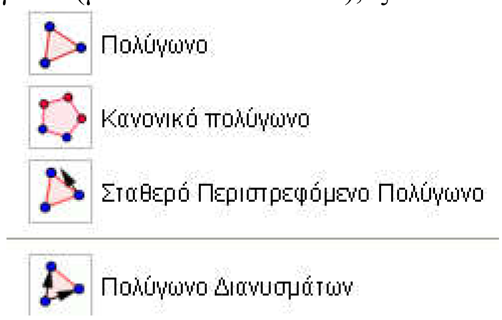
Πολύγωνα, GeogebraTube, ιστοσελίδες.

Στόχοι του μαθήματος: Μετά το 6ο μάθημα οι εκπαιδευόμενοι θα είναι ικανοί:

- να δημιουργούν ένα μικροπείραμα, χρησιμοποιώντας τα εργαλεία των πολυγώνων και κανονικών πολυγώνων κλπ.,
- να ανεβάζουν το μικροπείραμά τους στο GeogebraTube,
- να εξάγουν το μικροπείραμά τους σε ιστοσελίδα ή έτοιμο για εισαγωγή σε ιστοσελίδα.

6.1. Πολύγωνα.

Στο Σχήμα 6.1 φαίνονται οι δυνατότητες των εργαλείων του προγράμματος σχετικά με τα πολύγωνα. Έτσι, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα πολύγωνο (με το εικονίδιο), ξεκινώντας από μία κορυφή του και κινούμενοι διαδοχικά από κορυφή σε κορυφή καταλήγουμε πάλι στην αρχική. Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε, όταν στο πεδίο εισαγωγής δώσουμε: polyg = [A_1, A_2, …, A_k], όπου A_1, A_2, …, A_k είναι k σημεία από πριν καθορισμένα. Με το εικονίδιο κατασκευάζουμε κανονικά πολύγωνα, με προκαθορισμένο αριθμό κορυφών. Έτσι, με κλικ σε δύο σημεία και δίνοντας στη συνέχεια τον αριθμό k (π.χ. 5) των κορυφών έχουμε ένα κανονικό k-γωνο (π.χ. πεντάγωνο). Η κατασκευή μπορεί, επίσης, να πραγματοποιηθεί από το πεδίο εισαγωγής δίνοντας: πολυγ = Πολύγωνο[A, B, <αριθμός κορυφών>], όπου A και B δύο προκαθορισμένα σημεία και <αριθμός κορυφών> ένας φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 2.



Σχήμα 6.1

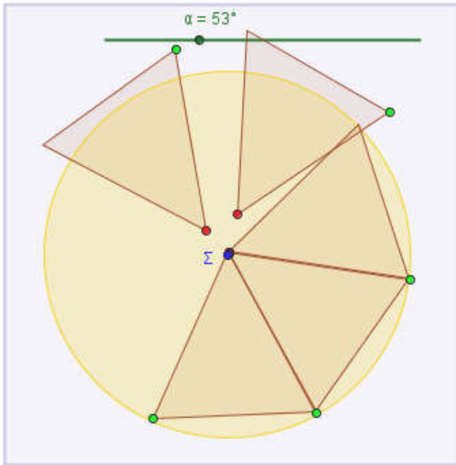
Ενδιαφέρον έχουν και τα δύο επόμενα κουμπιά. Έτσι με το κουμπί δημιουργούμε ένα πολύγωνο, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που το δημιουργήσαμε με το εικονίδιο . Η διαφορά τώρα είναι ότι το πολύγωνό μας από το αρχικό σημείο κατασκευής του μπορούμε να το μετακινούμε στον καμβά σχεδίασης, ενώ από το δεύτερο σημείο (της σειράς κατασκευής του) μπορούμε να το στρέφουμε. Εξαιρετικά χρήσιμο είναι το γεγονός ότι με κλικ στο εικονίδιο και στη συνέχεια σε ένα οποιοδήποτε πολύγωνο (π.χ. κανονικό) δημιουργούμε ένα αντίγραφο αυτού, με τις ιδιότητες που προείπαμε (δηλαδή της μεταφοράς και της στροφής). Το πολύγωνο είναι απολύτως καθορισμένο και καμία από τις κορυφές του πολυγώνου δεν είναι ελεύθερη.

Τέλος, με το κουμπί δημιουργούμε ένα πολύγωνο με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που το δημιουργήσαμε και προηγουμένως. Από το αρχικό σημείο κατασκευής του μπορούμε να το μετακινούμε στον καμβά σχεδίασης. Επίσης, με κλικ στο εικονίδιο και στη συνέχεια σε ένα οποιοδήποτε πολύγωνο (π.χ. κανονικό) δημιουργούμε ένα αντίγραφο αυτού, με τις ιδιότητες που προείπαμε (δηλαδή της μεταφοράς, όχι όμως και της στροφής). Το πολύγωνο δεν είναι προκαθορισμένο και όλες οι κορυφές του πολυγώνου είναι ελεύθερες, πλην της αρχικής-τελικής.

Μικροπείραμα 6.1. Να διδαχθεί η κεντρική γωνία κανονικού πολυγώνου στη Β' Γυμνασίου.

Μία θαυμάσια ιδέα για να διδαχθεί η παραπάνω έννοια είναι η εξής: Δίνονται στα παιδιά ισοσκελή τρίγωνα, π.χ. 5, με τη γωνία της κορυφής να ελέγχεται από ένα δρομέα, π.χ. τον α. Τα ισοσκελή τρίγωνα μπορούν να μετακινηθούν και να περιστραφούν γύρω από τη γωνία της κορυφής. Ζητάμε από τους μαθητές να τοποθετήσουν τα τρίγωνα το ένα δίπλα στο άλλο μέσα σε έναν κύκλο, ώστε να καλυφθεί ολόκληρος ο κύκλος, Σχήμα 6.2. Οι μαθητές δοκιμάζουν να πετύχουν την προτροπή μας, «παίζοντας» με τον δρομέα, έως ότου ανακαλύψουν ότι η γωνία πρέπει να είναι 72ο. Προκειμένου να δημιουργήσουμε το μικροπείραμά μας εργαστήκαμε ως εξής:

1. Αρχικά δημιουργούμε έναν δρομέα γωνίας α.
2. Επίσης δημιουργούμε μία γωνία με μέτρο αυτό του δρομέα (θυμίζουμε ότι αυτό μπορούμε να το πετύχουμε κάνοντας κλικ σε δύο σημεία (Α, Β) με το εικονίδιο και δίνοντας ως γωνία την α).
3. Δημιουργούμε το τρίγωνο των τριών σημείων (Α, Β, Α') με το εργαλείο του πολυγώνου , κάνοντας το πρώτο κλικ στο σημείο της κορυφής Β.
4. Για να δημιουργήσουμε τα αντίγραφα του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΑ', κάνουμε κλικ στο κουμπί και στη συνέχεια στο τρίγωνο ΑΒΑ' (5 φορές).
5. Μεταφέρουμε τα αντίγραφα στον καμβά και στη συνέχεια χρωματίζουμε τα σημεία των κορυφών μεταφοράς με το χρώμα επιλογής μας, καθώς και το σημείο περιστροφής. <u>Σημείωση:</u> Μπορούμε να επιλέξουμε περισσότερα του ενός αντικείμενα, κρατώντας πατημένο το Ctrl και κάνοντας αριστερό κλικ πάνω στο αντικείμενο (εδώ τα εν λόγω σημεία).
6. Σχεδιάζουμε και τον κύκλο με το κουμπί και ακτίνα κατάλληλη πλευρά του τριγώνου.
7. Αποκρύπτουμε το αρχικό τρίγωνο (δεξί κλικ κλπ.)



Σχήμα 6.2

Άσκηση 6.1. Για το Μικροπείραμα 6.1 να δημιουργηθεί το κατάλληλο αρχείο και το αντίστοιχο φύλλο εργασίας.

6.2. GeogebraTube.

Ένας πολύτιμος χώρος, με την επωνυμία GeogebraTube ανοίγεται στη διεύθυνση http://www.geogebratube.org/ Ο χρήστης θα πρέπει να κάνει εγγραφή στην πρώτη του επίσκεψη προκειμένου να εκμεταλλευτεί τις δυνατότης που του δίνονται. Κάτι τέτοιο γίνεται από την επιλογή «εγγραφή» κάτω από το Επισκέπτη καλώς ήρθες! Και όλες τις επόμενες φορές θα εισέρχεται από το «είσοδος». Με την είσοδο παίρνετε το καλωσόρισμα του Geogebra π.χ. 

, φυσικά ο καθένας με το δικό του login_name. Από το κουμπί μπορείτε να εγκαταλείψετε τον χώρο. Εμφανίζονται τα έργα σας αλλά και προτεινόμενα έργα της κοινότητας. Ίσως η μόνη προσοχή που θα πρέπει να επιδείξει κάποιος είναι όσον αφορά τον κωδικό του όπου θα πρέπει να χρησιμοποιήσει και μικρά και κεφαλαία και αριθμούς!

Στον παραπάνω χώρο ο χρήστης μπορεί να αναρτήσει τις δικές του εφαρμογές και να αναφέρεται σε αυτές όταν χρειάζεται ή όταν επιθυμεί. Φυσικά, μπορεί να δώσει τη δική του συνεισφορά στην παγκόσμια κοινότητα του Geogebra. Επισκεπτόμενος δε το χώρο μπορεί να πάρει ιδέες για ένα μεγάλο πλήθος πειραμάτων που μπορεί να χρησιμοποιήσει ή να εκπονήσει ο ίδιος.

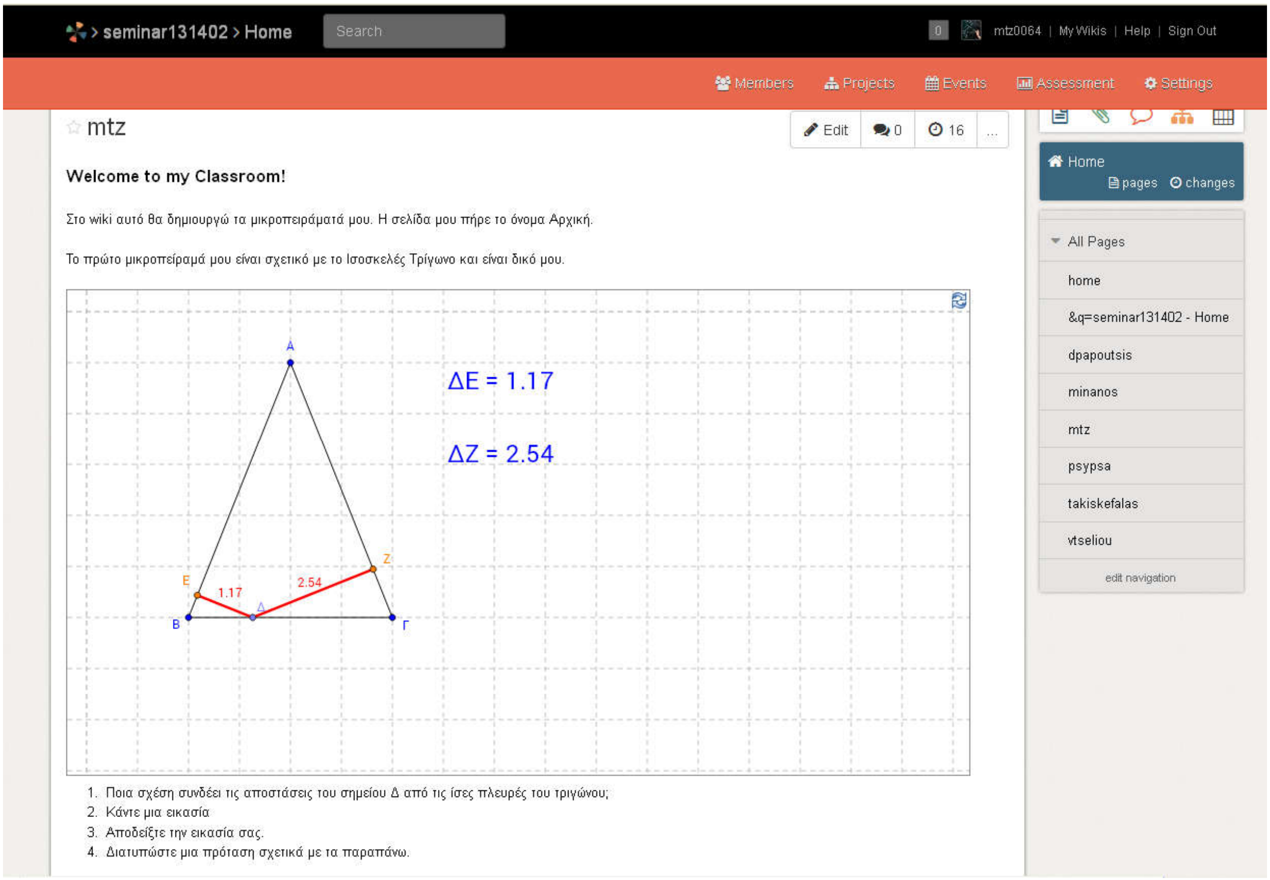
6.3 Εξαγωγή αρχείου για το GeogebraTube.

Προκειμένου να περιγράψουμε την εξαγωγή και το ανέβασμα ενός αρχείου στο GeogebraTube θα ανεβάσουμε σε αυτό, ως παράδειγμα το αρχείο Example_6_1.ggb. Το πρόγραμμα Geogebra που χρησιμοποιώ είναι της έκδοσης **5.0.181.0**, την οποία πιθανόν θα έχετε και εσείς. Αφού ανοίξετε το αρχείο Example_6_1.ggb, από το Αρχείο → Ανέβασμα αρχείου στο GeogebraTube… και κλικ στο τελευταίο, το πρόγραμμα σας βγάζει ένα μήνυμα ότι αρχίζει η εργασία του ανεβάσματος και μετά από λίγο μεταφέρεστε με τον φυλλομετρητή που χρησιμοποιείτε στο GeogebraTube. Πλέον σας ζητάει να δώσετε τα στοιχεία σας για να μπείτε σε αυτό. Αφού κάνετε υποβολή, εισέρχεστε σε ένα περιβάλλον, όπου έχει μεταφερθεί το σχήμα και σας ζητάει έναν τίτλο. Έτσι, δίνουμε έναν τίτλο (σχετικά με λίγα γράμματα ελληνικά, μέχρι 32) π.χ. Ισοσκελές Τρίγωνο, περιγράφουμε στοιχειωδώς την εφαρμογή μας επιλέγοντας το

+ ΠΡΟΣΘΗΚΗ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ή επεξεργαζόμαστε την εφαρμογή μας, επιλέγοντας το μολυβάκι από τα εργαλεία δεξιά ή ρυθμίζουμε την γλώσσα, την ηλικία που απευθύνεται, λέξεις κλειδιά και τέλος ή αν θέλουμε να είναι δημόσιο ή ιδιωτικό επιλέγοντας τις Ρυθμίσεις Φύλλου Εργασίας κάτω χαμηλά και κάνουμε αποθήκευση. Προσέχουμε!!! να έχουμε δώσει οπωσδήποτε τίτλο.

Αντίθετα, τώρα, επισκεπτόμενοι την σελίδα http://www.geogebratube.org/, κάνοντας εισαγωγή με το username και το password βλέπουμε τα έργα μας ή γράφοντας στην αναζήτηση τον τίτλο που είναι σχετικός με έργα που θα θέλαμε να δούμε (π.χ. «ισοσκελές τρίγωνο», προσέξτε ότι είναι γραμμένος μέσα σε εισαγωγικά) μας επιστρέφει όσες εγγραφές έχουν τον ίδιο τίτλο. Επιλέγουμε προφανώς την δική μας και συνεχίζουμε. Οι επιλογές είναι εμφανείς, εφόσον η εφαρμογή μας είναι δημόσια. Διαφορετικά είναι ορατή μόνο σε εμάς. Επίσης, στην παραπάνω σελίδα (http://www.geogebratube.org/) μπορούμε να κάνουμε «είσοδο» και πληκτρολογώντας τους κωδικούς μας και να ανεβάσουμε άλλα δικά μας αρχεία από το «+ new».

Προσοχή: Αν κάτι δεν πάει καλά, εμφανίζεται με κόκκινα γράμματα το σημείο που κάναμε το λάθος μας και θα πρέπει να κάνουμε τη διόρθωση, πριν επανέλθουμε.



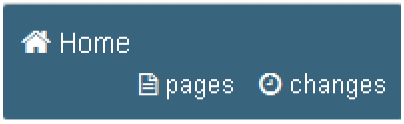
Σχήμα 6.3

6.4. Ανέβασμα στο wiki.

Ο χρήστης έχει τη δυνατότητα να ενσωματώσει το αρχείο, που ο ίδιος ή άλλος ανέβασε στο GeogebraTube, στην ιστοσελίδα του ή σε ένα wiki κλπ. Για το wiki, θα πρέπει να διαβαστούν πάλι οι σχετικές οδηγίες από το internet. Για τις ανάγκες της παρούσης παραγράφου θα πρέπει να δημιουργήσετε ένα wiki, αφού επισκεφτείτε τη σελίδα http://www.wiki-spaces.com/ . Επιλέξτε το «*I' m a teacher*» και αφού δώσετε username, password και e-mail κάντε join. Αυτό είναι! συνεχίστε και δημιουργήστε το wiki σας. Το δικό μου φαίνεται στο Σχήμα 6.3

Αφού γίνει η είσοδος στη σελίδα, θα ενσωματώσετε το δικό σας μικροπείραμα από το GeogebraTube στο wiki, ακολουθώντας την εξής διαδικασία:

1. Αφού έχετε δημιουργήσει τη σελίδα σας (Σχήμα 6.3) κάνετε Edit πάνω δεξιά.
2. Στο σημείο που θέλετε να ενσωματώσετε το αρχείο κάνετε κλικ στο Widget.
3. Από τον πίνακα που θα εμφανιστεί κάνετε κλικ στο Education και στη συνέχεια στο GeoGebraTube.
4. Βρείτε το αρχείο σας και αντιγράψτε τον κώδικα ενσωμάτωσης (Σχήμα 9.4).
5. Από το Widget, επιλέγουμε το Other HTML και επικολλάμε τον κώδικα (Ctrl+V)
6. Σώζουμε και ξανασώζουμε από το Save.

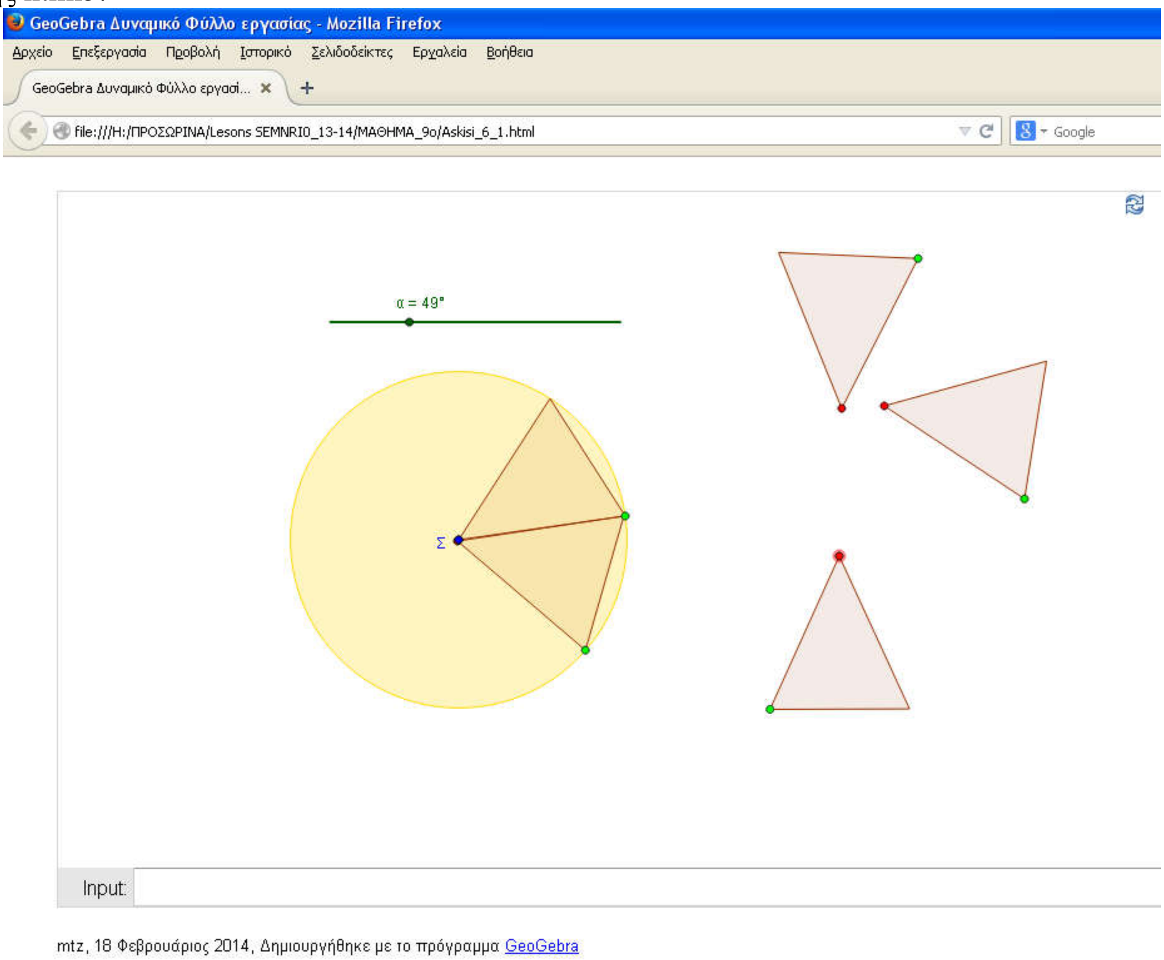


Σχήμα 6.4

Άσκηση 6.2. Α) Να δημιουργήσετε λογαριασμό στο GeogebraTube και να ανεβάσετε την Askisi_6.1.ggb, χρησιμοποιώντας τις οδηγίες της παραγράφου 6.3. Β) Να επισκεφτείτε το seminar131402 και να δημιουργήσετε μία σελίδα με όνομα το username σας. Για να το πετύχετε αυτό απλά κάντε κλικ στο pages (Σχήμα 6.4) και στη συνέχεια στο New Page. Δώστε το όνομα της καινούργιας σελίδας και όλα είναι έτοιμα. Ήδη υπάρχει η δική μου με όνομα mtz. Γράψτε μου ότι όλα πήγαν καλά και ότι μπορώ να επισκεφτώ το wiki και να δω τις δημιουργίες σας.

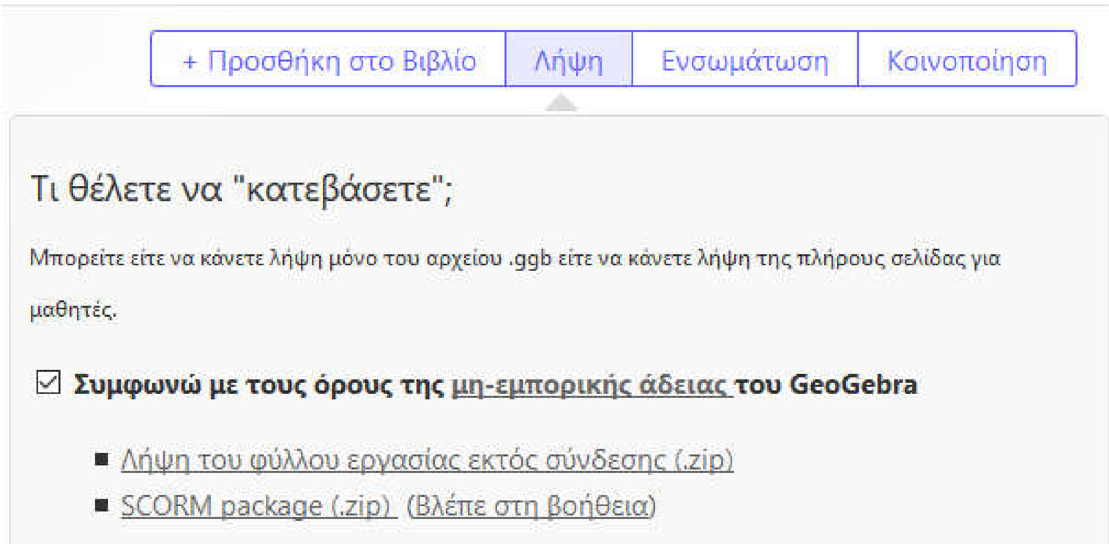
6.5. Ιστοσελίδα στο Geogebra.

Εξίσου εύκολο είναι και η εξαγωγή ιστοσελίδας στο Geogebra. Ατυχώς τον τελευταίο καιρό έχει δημιουργηθεί πρόβλημα με το πρόγραμμα, τους διάφορους browsers και την Java. Ίσως περνάμε μία μεταβατική περίοδο και μέχρι να σταθεροποιηθεί η κατάσταση θα πρέπει να κάνουμε υπομονή. Ωστόσο, σε καινούργιους Browsers δεν υπάρχει κάποιο πρόβλημα, ιδιαίτερα αν επιλέξουμε ως τύπο αυτής html5.



Σχήμα 6.5

Αφού λοιπόν δημιουργήσουμε το αρχείο μας, από το Αρχείο → Εξαγωγή, επιλέγουμε το «Δυναμικό φύλλο εργασίας ως ιστοσελίδα» και κάνουμε κλικ στην καρτέλα «εξαγωγή ως ιστοσελίδα». Εδώ πλέον έχουμε να συμπληρώσουμε, αν το επιθυμούμε το κείμενο που θέλουμε να εμφανίζεται πριν την εφαρμογή και μετά από αυτήν. Ουσιαστικά μας μεταφέρει στο Geogebra tube όπου αφού κάνουμε τις όποιες προσαρμογές θέλουμε από το «Λήψη» και αφού συμφωνήσουμε με τους όρους… κάνουμε λήψη εκτός σύνδεσης.



Σχήμα 9.4

Στο Σχήμα 6.5 φαίνεται η ιστοσελίδα που δημιουργείται από το αρχείο Askisi_6_1.ggb, αφού πρώτα δύο τρίγωνα έχουν μεταφερθεί στον κύκλο.

Άσκηση 6.3. Με την άσκηση 6.1 να δημιουργήσετε μία ιστοσελίδα, όπου πάνω από το μικροπείραμα να περιγράφεται το πρόβλημα, κάτω από αυτό να είναι οι ερωτήσεις που θα έχετε βάλει στο φύλλο εργασίας (χωρίς να υπάρχει χώρος για απάντηση). Στο μικροπείραμα να υπάρχει και εργαλειοθήκη. (Στο σχήμα 6.5 δεν υπάρχει εργαλειοθήκη).

Ανοίξτε την ιστοσελίδα σας με έναν browser και απολαύστε τη δημιουργία σας.

Ενδεικτικό Φύλλο Εργασίας για το Askisi_6-1.ggb

Σχολείο: ……………………………………………………
Όνομα και Επώνυμο: ……………………………………
Τάξη: ……………Ημερομηνία …………………………

Ανοίξτε το αρχείο «Askisi_6_1.ggb» που βρίσκεται στην επιφάνεια εργασίας.

1. Τι σχήματα βλέπετε;……………………………….
   …………………………………………………….
2. Συγκρίνετε τα τρίγωνα μεταξύ τους, τι παρατρείτε;
   ………………………………………………….
3. Τι συμβαίνει, όταν μετακινείτε το δρομέα α; …………
   ………………………………………………………
4. Προσπαθήστε να τοποθετήσετε τα τρίγωνα, το ένα δίπλα στο άλλο, μέσα στον κύκλο, ώστε να τον καλύψουν ολόκληρο (Η γωνία της κορυφής να τοποθετείται στο κέντρο του κύκλου). Είναι πάντα εφικτό αυτό;
   …………… ……………………………………………………
5. Ποιο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας α, ώστε να επιτύχετε το παραπάνω;
   ……………………………………………………………………………………………
6. Τι σχήμα προέκυψε από τα τρίγωνα που τοποθετήσατε στον κύκλο;
   ……………………………………… …………………………………………………
7. Με δεδομένο ότι οι γωνίες αυτές έχουν την κορυφή τους στο κέντρο, πως θα τις ονομάζατε;
   ………………………………………………………
8. Αν αντί για πέντε είχαμε έξι τρίγωνα, ποιο το μέτρο της κεντρικής γωνίας;
   ……………………………………………………………………………………………
   …………………
9. Διατυπώστε έναν τύπο για τον υπολογισμό της κεντρικής γωνίας κανονικού ν–γώνου, εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο,ρ):
   ……………………………………… …………………………

Καλή Διασκέδαση

Κεφάλαιο 7ο

Κωνικές Τομές

Στόχοι του μαθήματος: Μετά το 7ο κεφάλαιο οι εκπαιδευόμενοι θα είναι ικανοί:

- Να δημιουργούν κωνικές τομές, τους άξονες αυτών κλπ.
- Να δημιουργούν ένα μικροπείραμα σχετικό με μία κωνική τομή
- Να δημιουργούν στο μικροπείραμα κουτί εισαγωγής.

7.1. Κωνική τομή.

Είναι ήδη γνωστό από την Αναλυτική Γεωμετρία ότι η κωνική τομή έχει ως εξίσωση την

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

Αν υποθέσουμε ότι $A \neq 0$ (ή $B \neq 0$), τότε η (1) παίρνει τη μορφή

$$x^2 + B'y^2 + C'xy + D'x + E'y + F' = 0 \quad (2)$$

Η τελευταία, φυσικά, προσδιορίζει πλήρως την κωνική τομή. Εκείνο που φαίνεται είναι ότι τελικά η κωνική τομή της (2) και επομένως της (1), στην Αναλυτική Γεωμετρία, καθορίζεται πλήρως από πέντε μεταβλητές. Με τη σειρά τους οι μεταβλητές καθορίζονται πλήρως από ένα σύστημα πέντε εξισώσεων με (αυτούς τους) πέντε αγνώστους, που προφανώς μπορούμε να πάρουμε, αν γνωρίζουμε πέντε σημεία, από τα οποία διέρχεται η κωνική μας.

Η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 5x5 για τον ηλεκτρονικό υπολογιστή (ΗΥ) είναι «α-στεία υπόθεση». Έτσι, δίνοντας πέντε σημεία, ο ΗΥ εύκολα μπορεί να σχεδιάσει την κωνική τομή, που αντιστοιχεί σε αυτή. Μια, λοιπόν, κωνική τομή μπορεί να σχεδιαστεί κάνοντας κλικ στο εικονίδιο και σε πέντε σημεία του επιπέδου.

7.1. Άσκηση. Ανάλογα με την επιλογή των πέντε σημείων είναι δυνατόν η κωνική τομή να είναι:

1. Έλλειψη
2. Υπερβολή
3. Παραβολή
4. Κύκλος
5. Δύο τεμνόμενες ευθείες.

Χρησιμοποιώντας το εικονίδιο να σχεδιάσετε τις παραπάνω κωνικές τομές στο ίδιο αρχείο και να ελέγχονται από αντίστοιχα κουτιά επιλογής. Το τελευταίο σημείο που θα καθορίζει και την τελική μορφή της κωνικής να είναι με διαφορετικό χρώμα από τα άλλα τέσσερα. Επιπλέον, να φροντίσετε, ώστε να μην επιτρέπεται δεύτερη επιλογή στα κουτιά επιλογής. Τέλος τα σημεία να έχουν ως όνομα τα Α, Β, Γ, Δ, Ε και δείκτες τους αριθμούς 1 για την έλλειψη, 2 για την υπερβολή κλπ.

7.2 Έλλειψη, Υπερβολή.

Η έλλειψη και η υπερβολή είναι προφανώς ειδικές κωνικές τομές και έχουν ως τύπους τους ακόλουθους,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ και } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (3)$$

αντίστοιχα. Φυσικά, οι εξισώσεις της (3) ισχύουν για την έλλειψη που έχει τις εστίες της στον οριζόντιο άξονα. Προκειμένου, λοιπόν, να ορίσουμε πλήρως την έλλειψη ή την υπερβολή, χρειαζόμαστε μόνο δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους και τη διεύθυνση του οριζόντιου άξονα. Έτσι, ορίζοντας τον οριζόντιο άξονα, δίνοντας τις δύο εστίες της έλλειψης (ή της υπερβολής), δίνουμε, επίσης, και τη μία εξίσωση που χρειαζόμαστε, την για την έλλειψη (ή την για την υπερβολή), καθώς καθορίζουμε πλήρως και το σύστημα συντεταγμένων της. Η άλλη εξίσωση παίρνεται από τη θέση ενός σημείου. Η επίλυση πλέον είναι εύκολη για τον ΗΥ, όπως εύκολος είναι και ο σχεδιασμός τους. Έτσι, δίνοντας τις δύο εστίες και ένα σημείο με το εικονίδιο , σχεδιάζουμε την έλλειψη, ενώ με το εικονίδιο την υπερβολή.

Προκειμένου να σχεδιάσουμε, τόσο την έλλειψη, όσο και την υπερβολή, δεν χρειάζεται να επιλέξουμε οι εστίες μας να είναι στον οριζόντιο άξονα, αφού είναι γνωστό ότι με τους μετασχηματισμούς

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \text{ και } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (4)$$

εξασφαλίζουμε τη μεταφορά των αξόνων στο σημείο $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ και τη στροφή τους κατά γωνία θ.

7.3 Παραβολή.

Η παραβολή δίνεται ως γνωστό από τον τύπο

$$y^2 = 2px \qquad (5)$$

οπότε γίνεται φανερό ότι η εστία της αρκεί για να προσδιορίσουμε τον τύπο της, αρκεί να γνωρίζουμε τη διευθετούσα της. Έτσι, προκειμένου να σχεδιάσουμε την παραβολή με το εικονίδιο , κάνουμε κλικ στην εστία και τη διευθετούσα της, που ορίζουν πλήρως το σύστημα συντεταγμένων της. Όπως και προηγουμένως, οι τύποι της (4) μας επιτρέπουν να επιλέξουμε οπουδήποτε την εστία της και οποιαδήποτε για διευθετούσα. Πριν μιλήσουμε για τις εντολές των κωνικών, θα ήταν, ίσως, σκόπιμο να πούμε ότι τα εικονίδια με την εφαπτομένη και την πολική, που είδαμε στον κύκλο, λειτουργούν εξίσου καλά και εδώ. Έτσι, με κλικ στο εικονίδιο της εφαπτομένης () και στη συνέχεια σε ένα σημείο και μία έλλειψη θα μας δώσει τις εφαπτόμενες της έλλειψης από το εν λόγω σημείο.

7.4. Εντολές Κωνικών.

Από το πεδίο εισαγωγής έχουμε τη δυνατότητα να δώσουμε ένα πλήθος από εντολές, προκειμένου να δημιουργήσουμε τις κωνικές μας. Έτσι, γράφοντας έναν από τους τύπους (3) ή (5) στο πεδίο εισαγωγής, θέτοντας όμως αριθμούς στη θέση των σταθερών, προκύπτει και αντίστοιχη κωνική. Οι σταθερές a, b και p μπορούν να χρησιμοποιηθούν, υπό την προϋπόθεση ότι αντιστοιχούν σε δρομείς. Έτσι, προκειμένου να διδάξουμε το πώς συμπεριφέρεται η έλλειψη (ή υπερβολή), καθώς μεταβάλλονται συγχρόνως οι μεταβλητές (ή οι α, β), δημιουργούμε δύο δρομείς και στη συνέχεια τις κωνικές με τύπους εκείνους της σχέσης (3) (δες το παράδειγμα Elleipsi-Yperboli.ggb). Επιπλέον, με τις εντολές:

- ❖ Ellipse[<Εστία>, < Εστία >, <μήκος μεγάλου ημιάξονα>] ή
  - Ellipse[<Εστία>, < Εστία >, <τμήμα>] ή
  - Ellipse[< Εστία >, < Εστία >, <σημείο αυτής>]
- ❖ Hyperbola[<Εστία>, < Εστία >, <μήκος μεγάλου ημιάξονα>] ή
  - Hyperbola [<Εστία>, < Εστία >, <τμήμα>] ή
  - Hyperbola [< Εστία >, < Εστία >, <σημείο αυτής>]
- ❖ Parabola[<σημείο>, <ευθεία>]

δημιουργούμε τις αντίστοιχες κωνικές μας, π.χ. αν ήδη έχουμε δημιουργήσει το τμήμα ΑΒ, τότε με την εντολή Ellipse[(1,1), (3,5), AB] δημιουργούμε την έλλειψη, με εστίες τα σημεία (1,1) και (3,5) και μεγάλο ημιάξονα ίσο με το τμήμα ΑΒ. Προφανώς, μεταβάλλοντας το τμήμα ΑΒ, μεταβάλλεται και η έλλειψη.

7.2. Άσκηση. Να δημιουργήσετε ένα τμήμα ΑΒ και στη συνέχεια την Έλλειψη, με εστίες τα σημεία (1,1) και (3,5). Διερευνήστε την κατασκευή, σε σχέση με το τμήμα ΑΒ. Καταγράψτε και ερμηνεύστε τα συμπεράσματά σας για διαφορετικά ευθύγραμμα τμήματα.

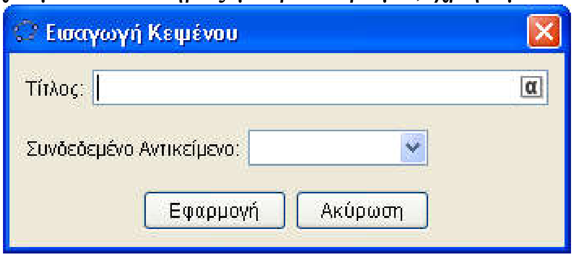
Από τη γραμμή εντολών μπορούμε, πλέον, να πάρουμε και ένα πλήθος από πληροφορίες, σχετικές με την κωνική τομή που σχεδιάσαμε. Έτσι, αν υποθέσουμε ότι έχουμε σχεδιάσει μία κωνική με όνομα c, τότε

- Axes[c], μας σχεδιάζει τους άξονες της κωνικής.
- Center[<Conic>], μας σχεδιάζει το κέντρο της κωνικής.
- Directrix[<Conic>], μας σχεδιάζει τη διευθετούσα στην περίπτωση της παραβολής.
- Eccentricity[<Conic>], μας δίνει την εκκεντρότητα της κωνικής ως αριθμό (μπορούμε να τον δούμε στο παράθυρο της άλγεβρας.

- Focus[<Conic>], μας σχεδιάζει τις εστίες της κωνικής.
- MajorAxis[<Conic>], σχεδιάζει το μεγάλο ημιάξονα.
- MinorAxis[<Conic>], σχεδιάζει το μεγάλο ημιάξονα.
- Polar[<Σημείο>, <Conic>], σχεδιάζει την πολική της κωνικής. Αντίστοιχη έννοια η πολική στο κύκλο.
- SemiMajorAxisLength[<Conic>], επιστρέφει το μήκος του μεγάλου ημιάξονα.
- SemiMinorAxisLength[<Conic>], επιστρέφει το μήκος του μικρού ημιάξονα.

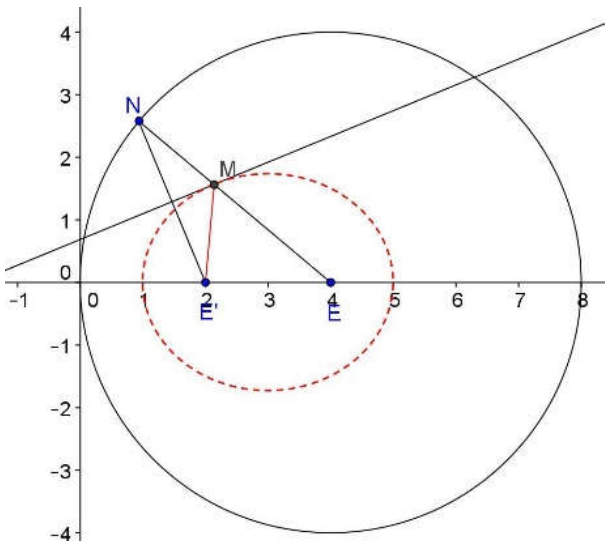
7.5. Κουτί εισαγωγής.

Σε πολλές περιπτώσεις και προκειμένου να έχουμε ένα πλήρες μικροπείραμα, χρησιμοποιούμε το κουτί εισαγωγής. Είναι ένα ορθογώνιο από το οποίο μπορούμε να δίνουμε τιμές σε μεταβλητές μας, αλλά να επηρεάζουμε και άλλα αντικείμενα. Η εισαγωγή γίνεται με το κουμπί της προτελευταίας ομάδος κουμπιών. Κάνοντας κλικ πρώτα στο κουμπί και στη συνέχεια σε κάποιο σημείο του καμβά σχεδίασης, εμφανίζεται το Σχήμα 7.1. Είναι, ήδη, οικείο το γεγονός ότι εδώ δίνουμε τον τίτλο, που θέλουμε, στο κουτί εισαγωγής και στη συνέχεια επιλέγουμε το συνδεδεμένο αντικείμενο.

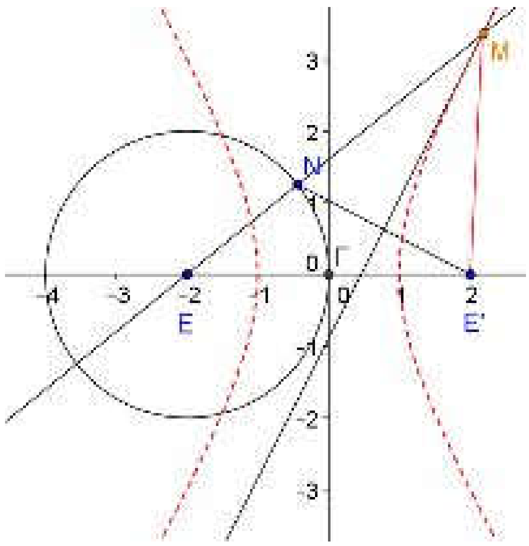


Σχήμα 7.1

Εκείνο που θα πρέπει να προσέχουμε είναι ότι μοιάζει με το πεδίο εισαγωγής (στο κάτω μέρος του παραθύρου του Geogebra), αλλά δεν είναι όπως αυτό. Εδώ, σε κάθε κουτί δίνουμε τιμές ή μορφές που αντιστοιχούν στο αντικείμενο που έχει ορισθεί. Για παράδειγμα, αν έχει ορισθεί να παίρνει τιμές μία μεταβλητή, τότε στο εν λόγω κουτί δίνουμε αριθμητικές τιμές, ενώ, αν είναι να δώσουμε τη μορφή μίας γραμμής, δίνουμε την εξίσωσή της κλπ. Ως παράδειγμα, δίνουμε το αρχείο Paradeigma_7_1_ggb και το αντίστοιχο φύλλο εργασίας στο τέλος του μαθήματος. Με δεξί κλικ στο όνομα του κουτιού μπορούμε να μεταφερθούμε στις ιδιότητες αυτού (ή Επεξεργασία → Ιδιότητες) και να το τροποποιήσουμε κατά βούληση, όπως έχουμε δει μέχρι τώρα σε άλλα αντικείμενα.



Σχήμα 7.2



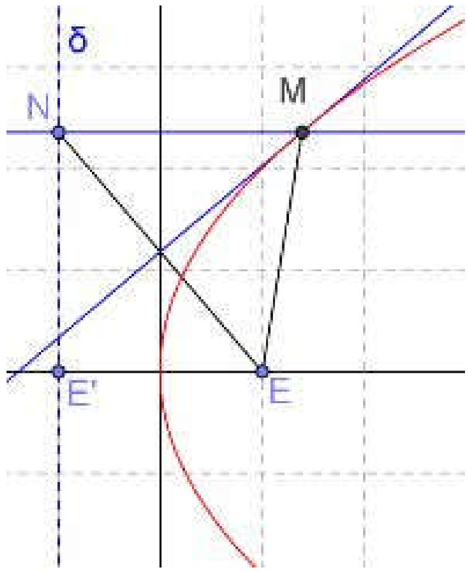
Σχήμα 7.3

Παράδειγμα 7.1. Για να διδάξετε τη σχέση των παραμέτρων των κωνικών με τις ίδιες τις κωνικές και τους άξονές τους, να δημιουργήσετε ένα μικροπείραμα και το αντίστοιχο φύλλο εργασίας.

Σε ένα αρχείο “Paradeigma_7_1.ggb” δημιουργούμε δύο μεταβλητές a και b, δίνοντας στο πεδίο εισαγωγής τις τιμές π.χ. a=1 και b=1. Στη συνέχεια πάλι από το πεδίο εισαγωγής δημιουργούμε την έλλειψη γράφοντας $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Είμαστε πλέον έτοιμοι για το κουτί εισαγωγής. Με κλικ στο εικονίδιο a=1 και στη συνέχεια στο πεδίο σχεδίασης δίνουμε τίτλο και συνδεδεμένο αντικείμενο. Από τις ιδιότητες το χρωματίζουμε, για να το κάνουμε ελκυστικό και ευανάγνωστο.

7.6. Οι Κωνικές τομές ως Γεωμετρικοί Τόποι.

Για να σχεδιάσουμε κωνικές τομές υπάρχουν πάρα πολλοί τρόποι. Το Βιβλίο της κατεύθυνσης της Β' Λυκείου, έχει τρεις τρόπους για την κατασκευή τους, που αξίζει κανείς να προσπαθήσει να υλοποιήσει. Ένας, ίσως, αρκετά ενδιαφέρον τρόπος, όπου φαίνεται περισσότερο η συνέχεια και ο τρόπος σύνδεσης αυτών είναι ο εξής: Θεωρούμε τον κύκλο (Ε, ΕΟ) στο Σχήμα 7.2. Από το σημείο Ε' του Κύκλου φέρνουμε την Ε'Ν και στη συνέχεια τη μεσοκάθετη αυτής. Τότε το σημείο Μ είναι σημείο της έλλειψης, αφού ΕΜ+Ε'Μ = ΕΜ+ΜΝ = ΕΝ, που είναι η ακτίνα του κύκλου και επομένως σταθερή. Καθώς λοιπόν το Ν διατρέχει τον κύκλο, το Μ σχεδιάζει την έλλειψη, Σχήμα 7.2.



Σχήμα 7.4

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι το Ν «τρέχει» πάλι στον κύκλο (Ε, ΕΟ), Σχήμα 7.3. Από το Ε', εξωτερικό του κύκλου (Ε, ΕΟ), φέρουμε την Ε'Ν και στη συνέχεια τη μεσοκάθετη αυτής που τέμνει την ΕΝ στο Μ. Προφανώς το Μ είναι σημείο μίας υπερβολής, αφού γι' αυτό ισχύει ΕΜ-Ε'Μ = ΕΜ-ΝΜ = ΕΝ, που είναι η ακτίνα του κύκλου και επομένως σταθερή. Έστω, τώρα, η ευθεία (δ) (Σχήμα 7.4.) κάθετη στο Ε' (συμμετρικό του Ε ως προς τον κατακόρυφο άξονα y'y) στον οριζόντιο άξονα και το σημείο Ν αυτής. Η μεσοκάθετη στο ΕΝ τέμνει στο Μ την κάθετη στη (δ) στο σημείο Ν και ισχύει ΜΕ=ΜΝ, συνεπώς το Μ ανήκει σε Παραβολή με εστία το Ε και διευθετούσα την (δ).

Άσκηση 7.3. Σε ένα αρχείο ggb να σχεδιαστούν ως γεωμετρικοί τόποι οι τρεις παραπάνω κωνικές. Μπορείτε να επιλέξετε για το σχεδιασμό είτε τον τρόπο που περιγράφεται στην παράγραφο 7.5. είτε τον τρόπο που υποδεικνύει το σχολικό βιβλίο κατεύθυνσης της Β' Λυκείου (http://ebooks.edu.gr/2013/allcour-ses.php). Για κάθε περίπτωση θα υπάρχει το αντίστοιχο κουμπί με το σχετικό όνομα. Γενικά στο διαδίκτυο υπάρχουν αρκετά αρχεία σε Geogebra που ασχολούνται με τις κατασκευές των τριών περιπτώσεων των Κωνικών (conics), δηλαδή της Έλλειψης (Ellipse), της Παραβολής (Parabola) και της Υπερβολής (Hyperbola)

Άσκηση 7.4. Επισκεφτείτε το GeogebraTube και αφού βρείτε το αρχείο «Line creates a Hyperbola», να το κατεβάσετε στον Υπολογιστή σας. Να δώσετε απόδειξη για την κατασκευή και να δημιουργήσετε ένα φύλλο εργασίας, για να διδάξετε το σχετικό θέμα.

Ενδεικτικό Φύλλο Εργασίας για το Paradeigma_7_1.ggb

Σχολείο: . . . .……….
Όνομα και Επώνυμο: . . . . ………..
Τάξη: . . . . …   Ημερομηνία . . . . . . …………

Ανοίξτε το αρχείο "Paradeigma_7_1.ggb".
1. Δώστε διαδοχικά τιμές 3 και 2, 4 και 1, 4 και 2, και αντιστρόφως 2 και 3, 1 και 4, 2 και 4 στο κουτί εισαγωγής των μεταβλητών a και b. Τι παρατηρείτε;
……
…………………………
2. Στο κουτί εισαγωγής αλλάξτε τη μορφή της κωνικής, ώστε να γίνει υπερβολή. Στη συνέχεια επαναλάβετε τη διαδικασία της 2.
……
…………………………
3. Στο κουτί εισαγωγής αλλάξτε τη μορφή της Υπερβολής, ώστε οι εστίες της να είναι στον κατακόρυφο άξονα.
……
…………………………
4. Στο κουτί εισαγωγής αλλάξτε την μορφή της κωνικής, ώστε να γίνει παραβολή (y2 = 2*a*x). Στη συνέχεια δώστε τις τιμές 1, 2, 3, 4 στη μεταβλητή a. Καταγράψτε τις παρατηρήσεις σας.
……
…………………………
Καλή Διασκέδαση

Κεφάλαιο 8ο

Λίστες – Ακολουθίες

Στόχοι του μαθήματος: Μετά το 8ο κεφάλαιο οι εκπαιδευόμενοι θα είναι ικανοί:

- Να δημιουργούν Λίστες.
- Να διαχειρίζονται Λίστες.
- Να εργάζονται με ακολουθίες.

8.1. Λίστες.

Πολλές φορές δημιουργώντας μικροπειράματα χρειάζεται να αντιμετωπίσουμε ένα σύνολο αντικειμένων ενιαία. Οι λίστες δεν είναι τίποτε άλλο από ένα σύνολο αντικειμένων, με συγκεκριμένη όμως σειρά. Για παράδειγμα, ένα διάνυσμα είναι μία μορφή λίστας, όταν τα στοιχεία της είναι αριθμοί.

Ο πιο απλός τρόπος για να ορίσουμε μία λίστα είναι να γράψουμε τα στοιχεία της ανάμεσα σε δύο άγκιστρα, π.χ. αν έχουμε ορίσει τρία σημεία στον καμβά σχεδίασης, τα A, B, G, τότε το Lista1={A, B, G} ορίζει τη λίστα Lista1, με στοιχεία τα σημεία A, B, G. Επίσης το Lista2={A, G, B} ορίζει την λίστα Lista2, με στοιχεία τα A, G, B. Οι δύο προηγούμενες λίστες είναι δύο διαφορετικές λίστες. Από το πεδίο εισαγωγής με την εντολή L3={(0,1), (1,1), (1,2)} ορίζουμε τη λίστα L3, με στοιχεία που έχουν ως συντεταγμένες εκείνες των στοιχείων της λίστας. Εξ ορισμού, τα σημεία της τελευταίας λίστας δεν εμφανίζονται στην οθόνη. Αν θέλουμε να τα δούμε, θα πρέπει να τα εμφανίσουμε από το παράθυρο της Άλγεβρας (με τους γνωστούς τρόπους εμφάνισης απόκρυψης).

8.2. Απλές πράξεις στις Λίστες.

Έχουμε, ήδη, πει ότι οι λίστες μάς δίνουν τη δυνατότητα να αντιμετωπίζουμε τα αντικείμενα που περιέχουν ενιαία. Έτσι, αν υποθέσουμε ότι έχουμε τις λίστες L1={2, 4, 6, 8} και L2={1, 2, 3, 4}, τότε οι απλές γνωστές πράξεις αποδίδουν πράξεις μεταξύ των στοιχείων αυτών, υπό την προϋπόθεση ότι αυτές μπορούν να γίνουν. Για παράδειγμα, η γραφή στο πεδίο εντολών L1+L2 (L1-L2, L1*L2, L1/L2) αποδίδει λίστα με στοιχεία το άθροισμα των στοιχείων (αντίστοιχα τη διαφορά, το γινόμενο ή το πηλίκο αυτών), δηλαδή λίστα1 = {3, 6, 9, 12} ({1, 2, 3, 4}, {2, 8, 18, 32}, {2, 2, 2, 2} αντίστοιχα). Όταν οι δύο λίστες δεν έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων, πράξη δεν γίνεται και εκείνο που επιστρέφει είναι η κενή λίστα ({}). Παρόμοια λειτουργούν και οι πράξεις μιας λίστας με αριθμό. Έτσι, για τις παραπάνω λίστες έχουμε L1+2 = {4, 6, 8, 10}, L1-2 = {0, 2, 4, 6}, L1*2 = {4, 8, 12, 16}, L1/2 = {1, 2, 3, 4} και τέλος η δύναμη αποδίδει L1^2 = {4, 16, 36, 64}. Στην πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό, λόγω της αντιμεταθετικότητας αυτών, δεν επηρεάζεται το αποτέλεσμα, αν αντιμετατεθούν. Αντίθετα, στις άλλες πράξεις (αφαίρεση, διαίρεση και δύναμη) το αποτέλεσμα είναι επίσης λίστα, με στοιχεία το αποτέλεσμα της πράξης του αριθμού με τα στοιχεία της λίστας και έτσι στο παράδειγμά μας θα έχουμε 2-L1 = {0, -2, -4,-6}, 2/L1 = {1, 2, 1/3, 0.25} και 2^L1 = {22, 24, 26, 28}.

Άσκηση 8.1. Να ορίσετε λίστες με τρία σημεία (με τις συντεταγμένες τους) και αφού δοκιμάσετε τις πράξεις της παραγράφου 8.2, να γράψετε μία αντίστοιχη παράγραφο για τα ευρήματά σας. Να καταγράψετε και όσες από τις πράξεις δεν μπορείτε να ορίσετε! (Η λύση της άσκησης είναι η καταγραφή που θα κάνετε).

8.3. Απλές πράξεις με Λίστες.

Πολλές φορές μας είναι απαραίτητη η επεξεργασία μιας ή περισσότερων λιστών, ως ένα ενιαίο αντικείμενο, όπως ήδη είπαμε ότι είναι. Για το σκοπό αυτό υπάρχουν μία σειρά από πράξεις που μπορούμε να εφαρμόσουμε, προκειμένου να έχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.

<αντικείμενο> ∈ <Λίστα>: έχει ως αποτέλεσμα μία λογική τιμή true ή false. Π.χ. χρησιμοποιώντας τα παραδείγματα της προηγούμενης παραγράφου η τιμή 4 ∈ L1 αποδίδει την τιμή true, ενώ η τιμή 5 ∈ L1 αποδίδει την τιμή false.

- Παρόμοια αποτελέσματα αποδίδουν και οι παρακάτω τελεστές
  - **L1 = = L2** Ελέγχει αν οι δύο λίστες είναι ίσες και επιστρέφει μία λογική τιμή.
  - **L1 != L2** Ελέγχει αν οι δύο λίστες είναι διαφορετικές και επιστρέφει μία λογική τιμή.
  - **L1 $\subseteq$ L2** Ελέγχει αν η L1 είναι υποσύνολο της L2. Προσοχή: Οι λίστες αντιμετωπίζονται ως σύνολα και όχι ως λίστες. Σε παρόμοια συμπεράσματα οδηγούμαστε και με το τελεστή $\supseteq$.
  - **Unique[list1]:** Επιστρέφει μία λίστα όπου το κάθε στοιχείο εμφανίζεται μόνο μία φορά και είναι ταξινομημένη από το μικρότερο στοιχείο της στο μεγαλύτερο.
  - **Sort[list1]:** Επιστρέφει τη λίστα ταξινομημένη από το μικρότερο στοιχείο της στο μεγαλύτερο.
  - **Insert[<Object>, <List>, <Position>]:** Επιστρέφει μία λίστα όπου το αντικείμενο <Object> τοποθετείται στη θέση <Position> της λίστας <List>. Η μεταβλητή <Position> παίρνει τιμές ακέραιες, εκτός του μηδέν. Οι θετικές τιμές μετράνε τη θέση από την αρχή, ενώ οι αρνητικές από το τέλος. Έτσι η L3 = Insert[1, L1, 2] αποδίδει τη λίστα L3={2, 1, 4, 6, 8} ενώ η L3 = Insert[1, L1, -2] αποδίδει τη λίστα L3={2, 4, 6, 1, 8}. Ο τελεστής Insert[] χρησιμοποιείται και για τη συνένωση λιστών.

8.4. Σύνθετες πράξεις με Λίστες.

Πολλές φορές μας είναι απαραίτητη μία πιο σύνθετη επεξεργασία των λιστών. Για το σκοπό αυτό υπάρχουν μία σειρά από περισσότερο ειδικές πράξεις, που μπορούμε να εφαρμόσουμε, προκειμένου να έχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.

- **Append** (ΕπισύναψηΣεΛίστα). ΕπισύναψηΣεΛίστα [α, L1]: Επισυνάπτει το αντικείμενο α στη L1, στην 1η θέση, ενώ η
- ΕπισύναψηΣεΛίστα [λίστα1, α]: Επισυνάπτει το αντικείμενο α στη L1, στην τελευταία θέση.
- **Classes** (Κλάσεις) Κλάσεις[L1, ν]: Επιστρέφει μία λίστα με τα στοιχεία χωρισμού της κάθε κλάσης, ανεξάρτητα αν αυτά ανήκουν ή όχι στην κλάση. Πρώτο είναι το πρώτο στοιχείο της λίστας και τελευταίο το τελευταίο αυτής. Κλάσεις[L1, α, ω]: Επιστρέφει λίστα με 1ο στοιχείο το α. Τα υπόλοιπα στοιχεία αυξάνονται κατά ω και το πλήθος τους είναι ίσο με το πλήθος των κλάσεων πλάτους ω.
- **Element** (ΣτοιχείοΛίστας) ΣτοιχείοΛίστας[L1, ν]: Επιστρέφει το στοιχείο της L1 που βρίσκεται στη θέση ν. Όταν έχουμε λίστα που τα στοιχεία της είναι επίσης λίστες: ΣτοιχείοΛίστας[λίστα1, κ, ν] : Επιστρέφει το ν-οστό στοιχείο της λίστας που βρίσκεται στη θέση κ της L1. Όταν έχουμε πίνακα: ΣτοιχείοΛίστας[Πίνακας,κ,ν]: Επιστρέφει το στοιχείο του πίνακα που βρίσκεται στην κ γραμμή και στην ν στήλη.
- **First** (ΠρώτοςΛίστας) ΠρώτοςΛίστας[λίστα1]: Επιστρέφει το πρώτο στοιχείο της L1. ΠρώτοςΛίστας[λίστα1,ν]: Επιστρέφει τα ν πρώτα στοιχεία της L1.
- **Frequency** (Συχνότητα) Συχνότητα[L1]: Επιστρέφει μία λίστα που τα στοιχεία της είναι οι συχνότητες, με τις οποίες εμφανίζονται τα στοιχεία της L1, τα οποία βάζει σε αύξουσα σειρά. Συχνότητα[true, L1]: Το στοιχείο της θέσης ν είναι το άθροισμα των συχνοτήτων των ν πρώτων διακεκριμένων στοιχείων της L1, ενώ Συχνότητα[false, L1] : Το στοιχείο της θέσης ν είναι η συχνότητα του νου διακεκριμένου στοιχείου της L1.
- **IndexOf** (ΤάξηΤου) ΤάξηΤου[κ, L1] : Επιστρέφει τη θέση στην οποία εμφανίζεται για 1η φορά το αντικείμενο κ. ΤάξηΤου[κ, L1, ν] : Επιστρέφει τη θέση στην οποία εμφανίζεται για 1η φορά το αντικείμενο κ, ξεκινώντας όμως από τη θέση ν.
- **Insert** (Εισαγωγή) Εισαγωγή[α,L1,ν] : Επιστρέφει μία λίστα που στη θέση ν παρεμβάλλεται το αντικείμενο α. Εισαγωγή[L1, L2, ν] : Επιστρέφει τη λίστα που στη θέση ν της L2 παρεμβάλλεται η L1.

- **Join** (ΣυνένωσηΛστών) ΣυνένωσηΛιστών[L1, L2,…] : Επιστρέφει μία λίστα στην οποία εμφανίζονται τα στοιχεία όλων των λιστών, ακόμα κι αν κάποια είναι κοινά. ΣυνένωσηΛιστών[λίστα από λίστες]: Επιστρέφει μία λίστα στην οποία εμφανίζονται τα στοιχεία όλων των λιστών, ακόμα κι αν κάποια είναι κοινά.
- **Intersection** (ΤομήΛιστών) ΤομήΛιστών[L1, L2] : Επιστρέφει μία καινούρια λίστα, που αποτελείται από τα κοινά στοιχεία των δύο λιστών.
- **Last** (ΤελευταίοςΛίστας) ΤελευταίοςΛίστας[L1]: Επιστρέφει το τελευταίο στοιχείο της L1. ΤελευταίοςΛίστας[L1,ν] : Επιστρέφει τα ν τελευταία στοιχεία της L1.
- **RandomElement** (ΤυχαίοΣτοιχείο) ΤυχαίοΣτοιχείο[L1]: Επιστρέφει τυχαία ένα στοιχείο της λίστας.
- **Reverse** (ΑναστροφήΛίστας) ΑναστροφήΛίστας[L1] : Επιστρέφει τα στοιχεία της L1 με ανάποδη σειρά.
- **Sort** (ΔιάταξηΣτοιχείωνΛίστας) ΔιάταξηΣτοιχείωνΛίστας[L1] : Επιστρέφει τα στοιχεία της λίστας L1 σε αύξουσα σειρά. Αν τα στοιχεία της λίστας είναι κείμενα, τα βάζει κατ’ αλφαβητική σειρά. Αν τα στοιχεία της λίστας είναι σημεία, τα διατάσσει, ώστε οι τετμημένες τους να είναι σε αύξουσα σειρά.
- **Take** (ΜέροςΛίστας) ΜέροςΛίστας[L1,ν] : Επιστρέφει τα στοιχεία της λίστας από τη θέση ν μέχρι το τέλος. ΜέροςΛίστας[L1, ν, κ] : Επιστρέφει τα στοιχεία της λίστας από τη θέση ν μέχρι τη θέση κ.
- **Union** (ΈνωσηΛιστών) ΕνωσηΛιστών[L1, L2] : Επιστρέφει μία λίστα με τα στοιχεία των δύο λιστών, όπου το καθένα εμφανίζεται μία φορά. Πρώτα εμφανίζονται τα στοιχεία της L1 και μετά όσα από τα στοιχεία της L2 δεν έχουν ήδη εμφανιστεί.
- **Unique** (Μοναδικότητα) Μοναδικότητα[L1] : Επιστρέφει τα στοιχεία της L1 σε σειρά, μία φορά το καθένα.

Άσκηση 8.2. Κάθε έναν από τους επόμενους τελεστές: Append, Classes, Element, First, Frequency, IndexOf, Insert, Join, Intersection, Last, RandomElement, Reverse, Sort, Take, Union, Unique να τον σχολιάσετε. Πληροφορίες για καθένα από αυτούς θα βρείτε στη διεύθυνση: http://wiki.geogebra.org/en/Manual θέτοντας την αντίστοιχη λέξη, με copy-paste, στο Search δεξιά στη σελίδα. (Προσοχή: Αν κάποιον όρο από τους παραπάνω δεν τον θεωρείται σημαντικό, αγνοήστε τον).

8.5. Ακολουθίες (Sequences).

Οι ακολουθίες είναι, ίσως, ο σημαντικότερος εκπρόσωπος των λιστών. Ουσιαστικά είναι μία δομή επανάληψης και συγκεκριμένα της For … End, σε ψευδοκώδικα, για τον προγραμματισμό σε κάποια γλώσσα. Η τυπική δομή αυτών στο Geogebra είναι Ακολουθία[<Expression>, <Variable>, <Start_value>, <End_Value>, <Step>]. Έτσι, Expression είναι η έκφραση (ο τύπος) της ακολουθίας, ενώ Variable είναι μεταβλητή και συνήθως χρησιμοποιούμε τα i, j, k, n και m. Επίσης Start_value και End_Value, είναι η αρχική και η τελική τιμή (που δεν μπορεί να υπερβαίνει η Variable) της μεταβλητής. Τέλος, Step είναι το βήμα αύξησης ή μείωσης της μεταβλητής και μπορεί να είναι πραγματικός αριθμός. Αξιοσημείωτο είναι το ότι, όταν το <Step> παραλείπεται, τότε θεωρείται ότι είναι το 1. Για παράδειγμα, η λίστα L1={1, 9, 25, 49, 81} περιέχει τα τετράγωνα των περιττών μονοψήφιων. Η δομή που παράγει αυτή τη λίστα είναι:

```
For i = 1:5, Step 1
    (2*i-1)^2
End
```

Για το Geogebra η αντίστοιχη έκφραση είναι L1 = Ακολουθία[(2*i-1)^2, i, 1, 5, 1], προφανώς το βήμα (Step) 1 μπορούσε να παραλειφθεί. Ένας άλλος δρόμος που μας δίνει την ίδια λίστα σε φθίνουσα πορεία είναι ο εξής: L1 = Ακολουθία[i^2, i, 9, 1, -2], φυσικά αντί για 1, ως τελική τιμή, μπορούσαμε να είχαμε γράψει 0, χωρίς να αλλάξει το αποτέλεσμα.

Για να εμφανίσουμε την ακολουθία στο παράθυρο των γραφικών δημιουργούμε λίστα σημείων. Έτσι για να δούμε τα σημεία της ακολουθίας , Σχήμα 8.1, δημιουργούμε την ακολουθία L1 =

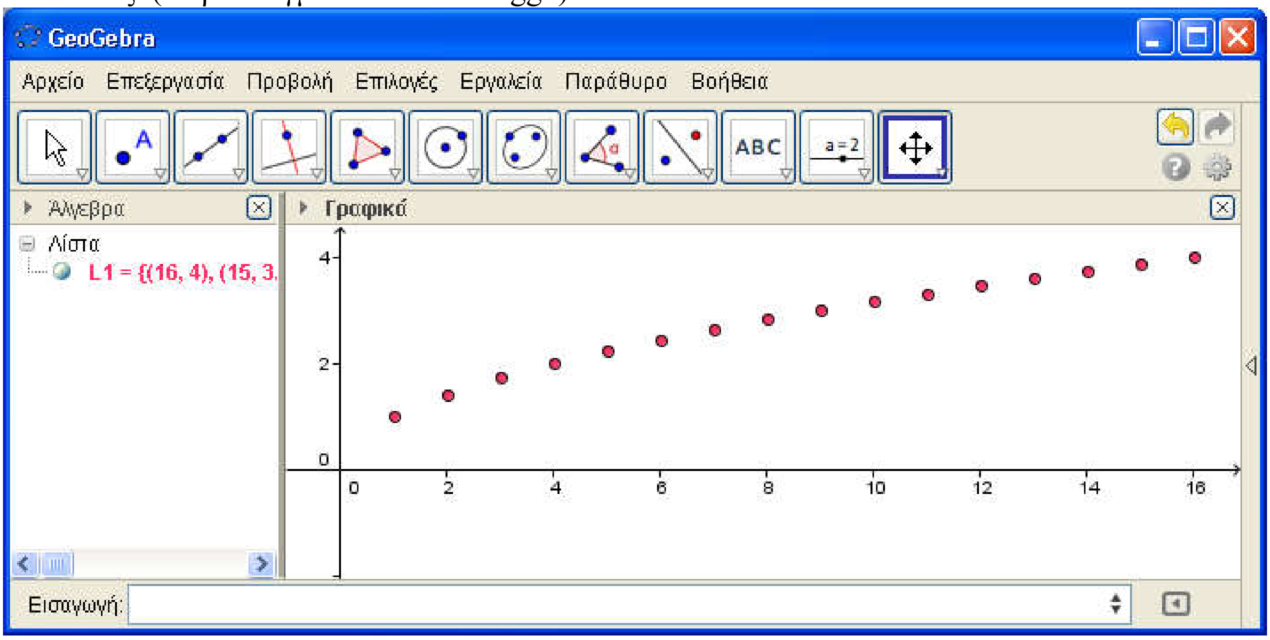
Ακολουθία[(i, sqrt(i)), i, 16, 1, -1] και εμφανίζουμε τη λίστα με έναν από τους πολλούς τρόπους που έχουμε, π.χ. με δεξί κλικ και «δείξε το αντικείμενο» στο παράθυρο της άλγεβρας, επειδή εξ ορισμού η λίστα δεν εμφανίζεται.

8.6. Αναδρομικές ακολουθίες.

Οι αναδρομικές ακολουθίες είναι της μορφής , και . Η μελέτη αυτών γίνεται με δύο τρόπους. Ο ένας είναι να πάρουμε την ακολουθία ως συνάρτηση του n (αν τα καταφέρουμε) και να ακολουθήσουμε τα της παραγράφου 8.4. Ο δεύτερος τρόπος που προτείνεται είναι με τη χρήση της έκφρασης ΛίσταΕπανάληψης[<Τύπος>, <Πρώτος_όρος>, <Πλήθος>], όπου <Τύπος> είναι ο τύπος που συνδέει τον όρο με τον όρο , Πρώτος_όρος είναι ο πρώτος όρος της ακολουθίας και Πλήθος είναι το πλήθος των όρων. Έτσι, για να ορίσουμε την ακολουθία με και να δούμε τα σημεία της ακολουθίας στο περιβάλλον των γραφικών, κάνουμε τα εξής:

1. Ορίζουμε το τύπο: (Προσοχή: αυτός ο τύπος θα δώσει εξ ορισμού μία γραφική παράσταση, οπότε αποκρύπτουμε το αντικείμενο).
2. Ορίζουμε την ακολουθία: L1 = ΛίσταΕπανάληψης[f, 1, 10].
3. Δημιουργούμε την ακολουθία σημείων Ακολουθία[(i, ΣτοιχείοΛίστας[L1, i]), i, 1, 10].

Γίνεται πλέον φανερός ο τρόπος που αντιμετωπίζονται οι πρόοδοι, αφού δεν είναι παρά αναδρομικές ακολουθίες. (Παρά-δειγμα: Anadromiki.ggb)



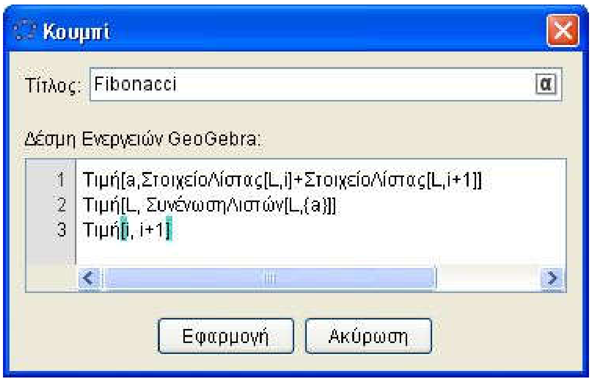
Σχήμα 8.1

Άσκηση 8.3. Σε ένα αρχείο ggb να ορίσετε τρεις προόδους με δεκαπέντε όρους την καθεμία, μία αριθμητική με πρώτο όρο το 1 και λόγο 0.3, μία γεωμετρική με πρώτο όρο 10 και λόγο 0.7 και μία αρμονική με πρώτο όρο το 9 και λόγο το 0.2. Επίσης, να χρωματιστούν με διαφορετικά χρώματα και να αποτυπωθούν στην οθόνη με κουτί επιλογής εμφάνισης/απόκρυψης. (Λύση στο Proodoi.ggb)

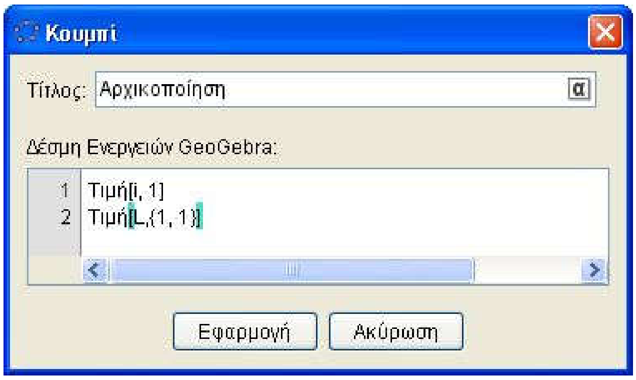
Το πρόβλημα των αναδρομικών ακολουθιών με περισσότερους του ενός προηγούμενους όρους είναι μάλλον δύσκολο πρόβλημα για το Geogebra. Στη συνέχεια, θα δώσουμε έναν τρόπο κατασκευής της ακολουθίας Fibonacci, που στηρίζεται στην επαναληπτική δομή For … End και είναι περισσότερο κατανοητός. Η ακολουθία Fibonacci είναι ως γνωστό η

$$a_0 = 1, a_1 = 1 \ \ \kappa\alpha\iota \ a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, n = 1, 2, \cdots$$

Σε ένα αρχείο file.ggb δημιουργούμε δύο μεταβλητές π.χ. a=1 και i =1, μία λίστα με στοιχεία τους πρώτους όρους π.χ. L = {1, 1} και δύο κουμπιά. Στο ένα κουμπί δίνουμε όνομα «Fibonacci» και στη δέσμη ενεργειών γράφουμε τον κώδικα που φαίνεται στο Σχήμα 8.2. Η πρώτη εντολή, στο κουμπί Fibonacci, δίνει στη μεταβλητή a την τιμή των δύο τελευταίων στοιχείων της λίστας L. Η δεύτερη εντολή βάζει στην τελευταία θέση της λίστας L το στοιχείο a και η Τρίτη εντολή αυξάνει τη μεταβλητή i κατά 1. Επίσης, στο δεύτερο κουμπί δίνουμε το όνομα «αρχικοποίηση» και γράφουμε τον κώδικα του Σχήματος 8.3, όπου απλά επαναφέρουμε τη λίστα στην αρχική κατάσταση. Για βοήθεια, ανοίξτε το αρχείο Fibonacci.ggb και επεξεργαστείτε το.

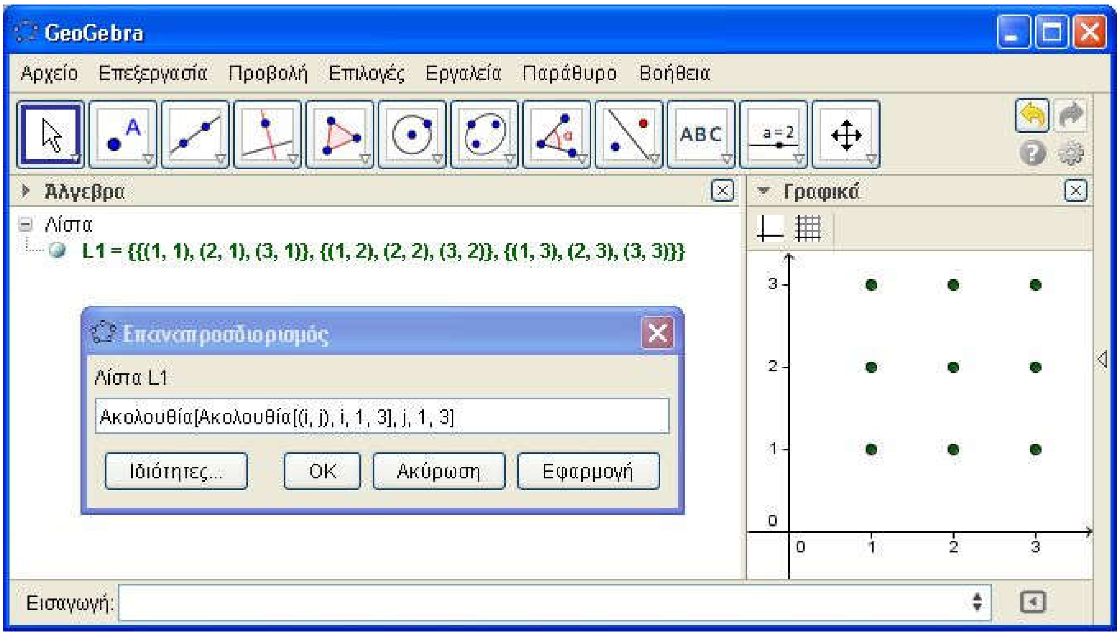


Σχήμα 8.2



Σχήμα 8.3

Άσκηση 8.4. Σε ένα αρχείο Askisi_8_4.ggb να δημιουργήσετε μία αναδρομική ακολουθία με $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu + \alpha_{\nu-1}$. Να χρησιμοποιήσετε την τεχνική που αναπτύχθηκε παραπάνω ή οποιαδήποτε άλλη εσείς νομίζεται πρόσφορη. Με την εντολή TableText[<List>, <List>, ...] να την εμφανίσετε στη οθόνη σας.



Σχήμα 8.4

8.7. Ακολουθίες ακολουθιών.

Ενδιαφέρον, επίσης, παρουσιάζουν οι ακολουθίες ακολουθιών. Ουσιαστικά είναι μία διπλή δομή επανάληψης της For … End, σε ψευδοκώδικα, για τον προγραμματισμό σε κάποια γλώσσα. Η τυπική δομή αυτών στο Geogebra είναι Ακολουθία [Ακολουθία [<Expression>, <Variable1>, <Start_value1>, <End_Value1>, <Step1>], <Variable2>, <Start_value2>, <End_Value2>, <Step2>], όπου, όπως και προηγουμένως, Expression είναι η έκφραση (ο τύπος) της ακολουθίας, ενώ Variable είναι μεταβλητή και συνήθως χρησιμοποιούμε τα i, j, k, n και m. Επίσης, Start_value και End_Value είναι η αρχική και η τελική τιμή (που δεν μπορεί να υπερβαίνει η Variable) των μεταβλητών. Τέλος, Step είναι το βήμα αύξησης ή μείωσης των μεταβλητών και μπορεί να είναι πραγματικός αριθμός. Συνεχίζει να ισχύει ότι, όταν κάποιο από τα <Step> παραλείπεται, τότε θεωρείται ότι είναι το 1. Για παράδειγμα, η λίστα L1={{(1,1), (2,1), (3,1)}, {(1,2), (2,2), (3,2)}, {(1,3), (2,3), (3,3)}} παράγεται από τη δομή:

For j = 1:3, Step 1
    For i = 1:3, Step 1

(i, j)
End
End
Για το Geogebra η αντίστοιχη έκφραση είναι L1 = Ακολουθία [Ακολουθία [(i, j), i, 1, 3], j, 1, 3], προφανώς το βήμα (Step) έχει παραλειφθεί. Το αποτέλεσμα της παραπάνω εντολής είναι αυτό στο Σχήμα 8.4.

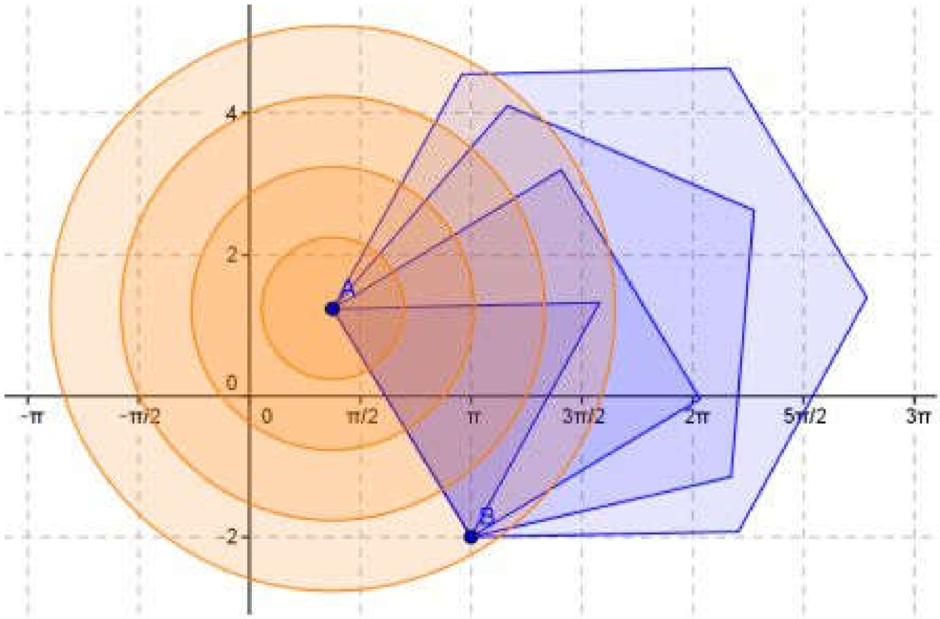
Κεφάλαιο 9ο

Αναδρομικές Ακολουθίες

Στόχοι του μαθήματος: Μετά το 9ο κεφάλαιο οι εκπαιδευόμενοι θα είναι ικανοί:

- Να δημιουργούν σχέδια μαθήματος και φύλλα εργασίας χρησιμοποιώντας Λίστες και ακολουθίες.

Η δημιουργία και η επεξεργασία μίας ακολουθίας και κατ’ επέκταση μίας λίστας έγινε στο Κεφάλαιο 8ο. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τις λίστες για να αναπτύξουμε μικροπειράματα και θα τα μελετήσουμε μέσα από παραδείγματα. Εκείνο που θα έχουμε έντονα στο μυαλό μας είναι το γεγονός ότι οι λίστες και οι ακολουθίες περιέχουν αντικείμενα και όχι μόνο αριθμούς. Έτσι, η λίστα Ακολουθία[Κύκλος[A, m], m, 1, 4] δημιουργεί τέσσερις ομόκεντρους κύκλους, όπως φαίνονται στο Σχήμα 9.1, ενώ η λίστα Ακολουθία[Πολύγωνο[A, B, ν], ν, 3, 6] δημιουργεί τέσσερα κανονικά πολύγωνα (Σχήμα 9.1), μπορεί κάποιος να δει το πρόγραμμα στο Κυκλοι_Πολυγωνα.ggb.



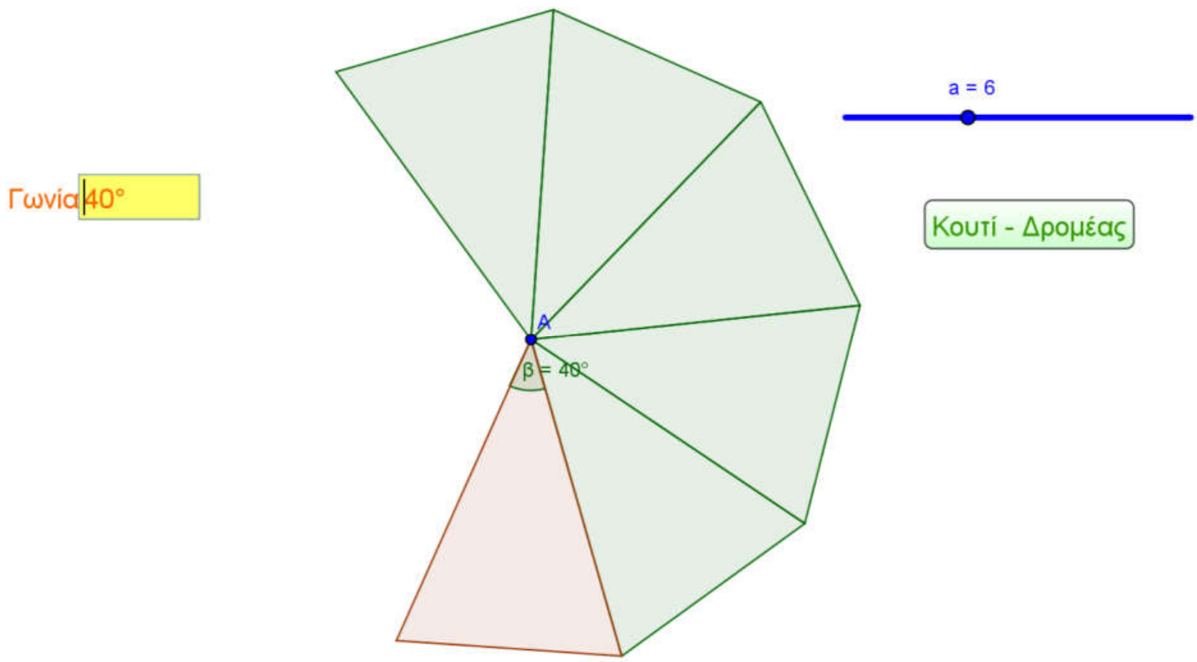
Σχήμα 9.1

9.1. Κεντρική γωνία πολυγώνου.

Στο 9ο Μάθημα έχουμε δει τη δημιουργία ενός μικροπειράματος σχετικού με την κεντρική γωνία κανονικού πολυγώνου. Εδώ θα δούμε το ίδιο μικροπείραμα με έναν διαφορετικό τρόπο, χρησιμοποιώντας τις λίστες. Στην επιφάνεια σχεδίασης θα υπάρχουν n ίσα ισοσκελή τρίγωνα, με διαδοχικές τις γωνίες της κορυφής, ένα κουτί εισαγωγής για τον αριθμό των πλευρών και ένας δρομέας (εναλλακτικά ένα δεύτερο κουτί εισαγωγής) για το μέτρο των γωνιών. Η ακολουθία που δημιουργεί τα παραπάνω είναι η εξής: Ακολουθία[Πολύγωνο[A, Στροφή[B,ν*α, A], Στροφή[B', ν*α, A]], ν,1, a - 1].

Το αρχικό τρίγωνο είναι το ABB'. Για να δημιουργηθούν τα πολύγωνα της ακολουθίας μας χρησιμοποιείται ο τύπος Πολύγωνο[Σημείο, Σημείο, Σημείο], το σημείο A μένει σταθερό και ως εκ τούτου δεν το πειράζουμε, τα άλλα δύο σημεία πρέπει να στραφούν κατά γωνία ν*α, όπου για ν=1 παίρνουμε το πρώτο τρίγωνο, για ν=2 το δεύτερο κ.ο.κ, φυσικά όλες οι στροφές γίνονται γύρω από το σημείο A. Τέλος, το ν μεταβάλλεται από 1 μέχρι a-1, αφού το αρχικό τρίγωνο υπάρχει. Στο Σχήμα 9.2 φαίνονται τα όσα περιγράψαμε. Στο αρχείο Polyg-Kentriki_Gonia.ggb, μπορείτε να δείτε και να επεξεργαστείτε τα παραπάνω. Εκείνο που πρέπει να γίνει σαφές είναι ότι το μικροπείραμα αυτό είναι απλά διαφορετικό από το προηγούμενο. Σε εκείνο, του 6ου κεφαλαίου, ο Μαθητής μπορούσε να πειράξει τα τρίγωνα, ενώ εδώ δεν του δίνεται η δυνατότητα, μπορεί όμως να πειραματιστεί περισσότερο εύκολα με το πλήθος των τριγώνων και την κεντρική γωνία και να κάνει εικασίες. Ο κάθε εκπαιδευτικός έχει τη δυνατότητα να διαλέξει κάποιο από αυτά ή να δημιουργήσει μία άλλη δική του εκδοχή.

Άσκηση 9.1. Αφού μελετήσετε το Polyg-Kentriki_Go nia.ggb, να επιλέξετε ανάμεσα στο Κουτί και τον Δρομέα (και να διαγράψετε το ένα από αυτά). Να κάνετε έτσι το δικό σας ggb αρχείο με το αντίστοιχο φύλλο εργασίας, για να διδάξετε την κεντρική γωνία κανονικού πολυγώνου.



Σχήμα 9.2

9.2. Πρόσθεση n διαδοχικών αριθμών.

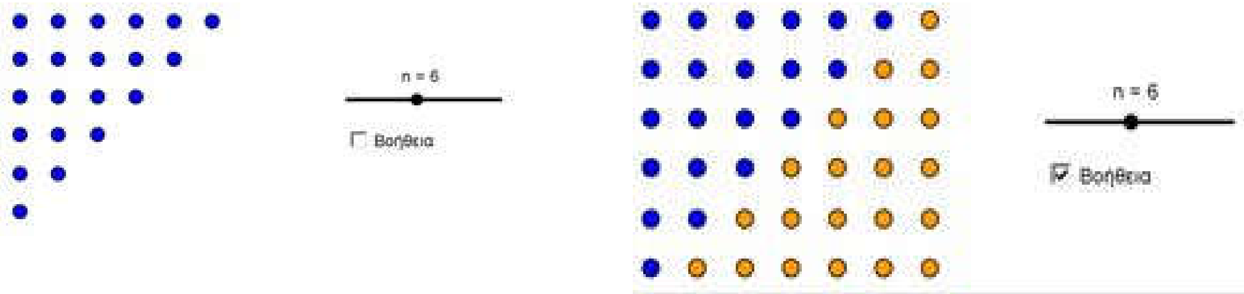
Προκειμένου να διδάξουμε το άθροισμα των n πρώτων αριθμών, δημιουργούμε το εξής μικροπείραμα. Ένας δρομέας ακεραίων αριθμών, καθώς αυξάνει, προσθέτει και μία σειρά από κουκίδες. Οι μαθητές καλούνται να βρουν έναν τρόπο για να υπολογίσουν το σύνολο των κουκίδων, όπως δείχνει το πρώτο μέρος από το Σχήμα 9.3. Προκειμένου να τους βοηθήσουμε, στο ίδιο σχήμα δημιουργούμε άλλες τόσες κουκίδες, όπως φαίνεται στο δεύτερο μέρος του Σχήματος 9.3. Οι κουκίδες είναι σημεία σε μία εκδοχή με μεγαλύτερο μέγεθος. Είναι πλέον εύκολο, πατώντας τη βοήθεια, οι μαθητές μας να διαπιστώσουν ότι .

Στο αρχείο Sum_Euler.ggb έχει δημιουργηθεί η λίστα1= Ακολουθία[Ακολουθία[(ι, ξ), ι, 1, ξ], ξ, 1, n] και η Ακολουθία[Ακολουθία[(ι + 1, ξ), ξ, 1, ι], ι, n, 1, -1] που δημιουργούν το σχήμα 9.3. Σε ψευδοκώδικα τα σημεία δίνονται από το εξής:

```
For ι = 1 : n
    For ξ = 1 : ι
        (ι, ξ)        /* Η πρώτη ακολουθία */
    End
End
For ι = n : 1 : (-1)
    For ξ = 1: ι
        (ι+1, ξ)    /* Η δεύτερη ακολουθία */
    End
End
```

Στο τμήμα του προγράμματος του ψευδοκώδικα μπορούμε να δούμε με ποια σειρά δημιουργούνται τα σημεία.

Άσκηση 9.2. Να τροποποιήσετε το Sum_Euler.ggb, ώστε να υλοποιηθεί το Σχήμα 9.4 και να δημιουργήσετε το αντίστοιχο φύλλο εργασίας, για να διδαχθεί το άθροισμα των ν διαδοχικών πρώτων αριθμών. (Αθροισμα-Euler_01.ggb)

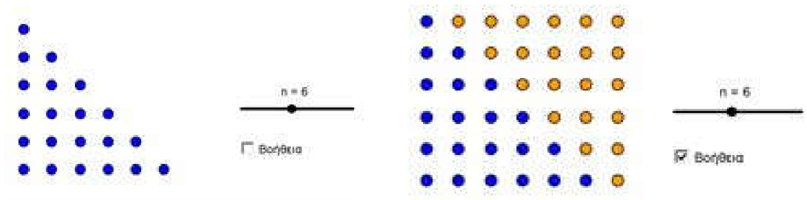


Σχήμα 9.3

9.3. Πρόσθεση n διαδοχικών περιττών.

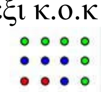
Προκειμένου να διδάξουμε το άθροισμα των n πρώτων περιττών αριθμών, δημιουργούμε το εξής μικροπείραμα. Ένας δρομέας ακεραίων αριθμών, καθώς αυξάνει, προσθέτει και δύο σειρές από κουκίδες του ιδίου χρώματος. Οι μαθητές καλούνται να βρουν έναν τρόπο για να υπολογίσουν το σύνολο των κουκίδων, όπως δείχνει το Σχήμα 9.5. Είναι πλέον εύκολο να διαπιστώσουν ότι, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \frac{6 \cdot 7}{2}$

Στο αρχείο Sum_odd.ggb έχουν δημιουργηθεί δώδεκα λίστες, χρωματίστηκαν με διαφορετικά χρώματα και ελέγχονται από τον δρομέα k, με την απλή εντολή Ενωση[Ακολουθία[(i, 5), i, 1, m], Ακολουθία[(5, i), i, 1, m-1]], που την τρέχουμε κατάλληλα 11 φορές, θέτοντας αντί του m τους αριθμούς 2 έως 12.



Σχήμα 9.4

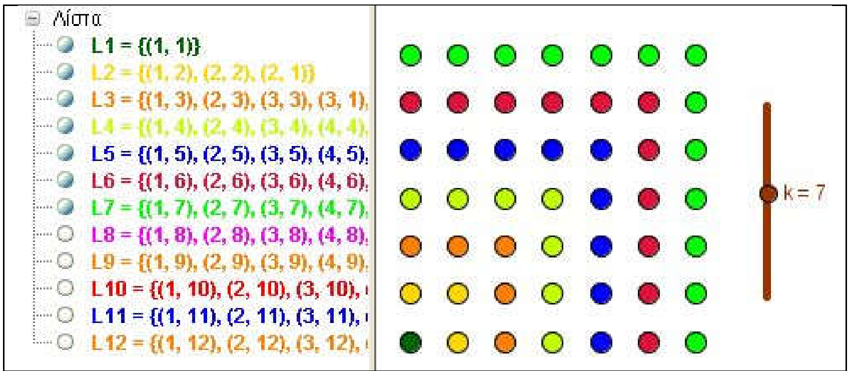
Άσκηση 9.3. Να δημιουργήσετε το Sum_even.ggb, που θα υπολογίζει το άθροισμα των αρτίων αριθμών και το αντίστοιχο φύλλο εργασίας. Σχηματικά έχουμε μικρά ορθογώνια από σημεία. Στην αρχή δύο, στη συνέχεια τέσσερα, έπειτα έξι κ.ο.κ

<u>Σημείωση:</u> Η λύση θα είναι κάπως έτσι: 

9.4. Μία εφαρμογή από τη Γεωμετρία.

Ένα κλασικό πρόβλημα προόδων από τη Γεωμετρία είναι το ακόλουθο (Tetragona_esoterika.ggb).

Πρόβλημα 9.1. Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ ενώνουμε τα μέσα των πλευρών. Στο καινούργιο τετράγωνο που δημιουργείται ενώνουμε πάλι τα μέσα των πλευρών του κ.ο.κ. Σχήμα 9.6 α) Να εξετάσετε αν η περίμετρος και το εμβαδών των διαδοχικών τετραγώνων αποτελούν πρόοδο. β) Να βρεθεί το άθροισμα των απείρων όρων των προόδων που δημιουργούνται.



Σχήμα 9.5

Λύση: Θα ακολουθήσουμε την τεχνική που ακολουθήσαμε στην ακολουθία Fibonacci στο Μάθημα 8. Θα δημιουργήσουμε δύο κουμπιά, ένα για την «αρχικοποίηση» του προβλήματος και ένα για να αλλάζουμε «επίπεδο». Επίσης, μία ετικέτα θα μας δείχνει τη μεταβλητή n η οποία θα αυξάνει, καθώς θα γίνεται κλικ πάνω στο κουμπί «επίπεδο». Αρχικά, ορίζουμε τη μεταβλητή n ακέραια από 1 μέχρι 12 και δύο λίστες, την L={(0, 0), (0, 4), (4, 4), (4, 0)}τα αρχικά σημεία και την L1= Ακολουθία[Μέσο[ΣτοιχείοΛίστας[L, i], ΣτοιχείοΛίστας[L, Αν[Υπόλοιπο[i, 4] $\stackrel{?}{=}$ 0, 0, i] + 1]], i, 1, 4], η οποία περιέχει τα μέσα των πλευρών των τεσσάρων πρώτων σημείων της λίστας L. Τέλος ορίζουμε την L2 = Ακολουθία[Ακολουθία[Τμήμα[ΣτοιχείοΛίστας[L, (k - 1) (4) + i], Στοιχείο Λίστας[L, Αν[Υπόλοιπο[i, 4] $\stackrel{?}{=}$ 0, (k - 1) (4) + 1, (k - 1) (4) + i + 1]]], i, 1, 4], k, 1, n]. Αξίζει να προσέξει κανείς τον τρόπο που συντάσσεται η εντολή Αν[«Υπόθεση», επιστροφή1, επιστροφή2]. Στην προκειμένη περίπτωση, όταν η «Υπόθεση» είναι αληθής, επιστρέφει την τιμή 0, διαφορετικά την τιμή i, που μαζί με το + 1 γίνεται i+1, στην περίπτωση της λίστας L1.

Σχήμα 9.6

Το κουμπί «αρχικοποίηση» είναι απλό. Η εντολή Τιμή[n,1] επιστρέφει στη μεταβλητή την τιμή 1. Η εντολή Τιμή[L, {(0, 0), (0, 4), (4, 4), (4, 0)}] επιστρέφει μία λίστα με όνομα L και στοιχεία τα τέσσερα σημεία των κορυφών του τετραπλεύρου. Η εντολή Τιμή[L2, Ακολουθία [Τμήμα [ΣτοιχείοΛίστας[L, i], ΣτοιχείοΛίστας [L, Αν[Υπόλοιπο[i, 4] $\stackrel{?}{=}$ 0, 1, i + 1]]], i,1,4]], επιστρέφει μία λίστα με όνομα L2, με στοιχεία τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται από τα σημεία της λίστας L. Ο κώδικας που γράφουμε στη «δέσμη ενεργειών» του κουμπιού είναι ο ακόλουθος:

Τιμή[n,1]
Τιμή[L, {(0, 0), (0, 4), (4, 4), (4, 0)}]
Τιμή[L2, Ακολουθία[Τμήμα[ΣτοιχείοΛίστας[L, i], Στοιχείο Λίστας[L,Αν[Υπόλοιπο[i,4] □ 0,1,i+1]]],i,1,4]]

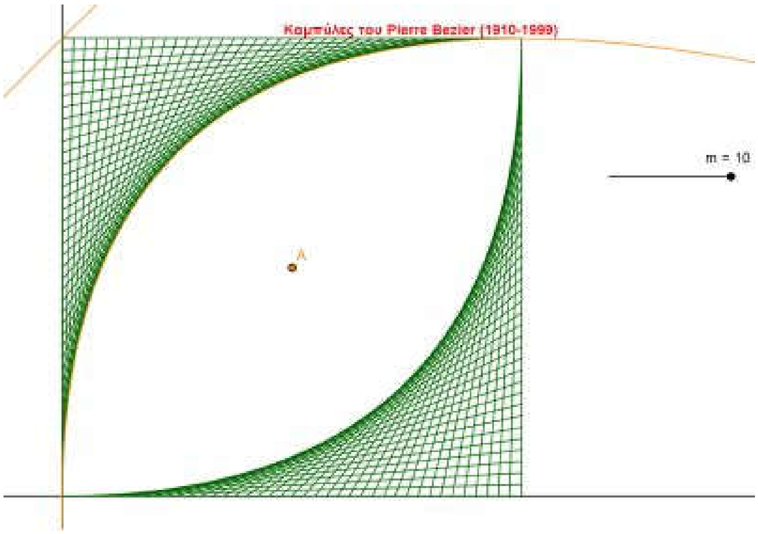
Το κουμπί «επίπεδο» είναι πιο σύνθετο. Η εντολή Τιμή[n,n+1] επιστρέφει στη μεταβλητή την τιμή n+1 και βλέπουμε το αποτέλεσμα στο «κείμενο». Η εντολή Τιμή[L, Εισαγωγή[L1, L, 1]] επιστρέφει τη λίστα με όνομα L, αυξημένη με τα στοιχεία των μέσων στην αρχή, οπότε η Η λίστα L1 βρίσκει τα καινούργια μέσα. Η εντολή Τιμή[L2, Ακολουθία[Ακολουθία[Τμήμα[ΣτοιχείοΛίστας [L, (k-1)*4+i], Στοιχείο Λίστας[L, Αν[Υπόλοιπο[i,4] $\stackrel{?}{=}$ 0,(k-1)*4 +1,(k-1)*4+i+1]]],i,1,4], k,1,n]], επιστρέφει τη λίστα με όνομα L2 και με στοιχεία τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται από τα σημεία της λίστας L. Ο κώδικας που γράφουμε στη «δέσμη ενεργειών» του κουμπιού είναι ο ακόλουθος:

Τιμή[n,n+1]
Τιμή[L,Εισαγωγή[L1,L,1]]
Τιμή[L2, Ακολουθία[Ακολουθία [Τμήμα[Στοιχείο Λίστας[L, (k-1)*4+i], ΣτοιχείοΛίστας[L,Αν[Υπόλοιπο [i,4] $\stackrel{?}{=}$ 0, (k-1)*4 +1,(k-1)*4+i+1]]],i,1,4], k,1,n]]

Άσκηση 9.4. Να δημιουργήσετε και να λύσετε το αντίστοιχο πρόβλημα με το Πρόβλημα 9.1. για ισόπλευρο τρίγωνο.

9.5. Καμπύλες Bézier.

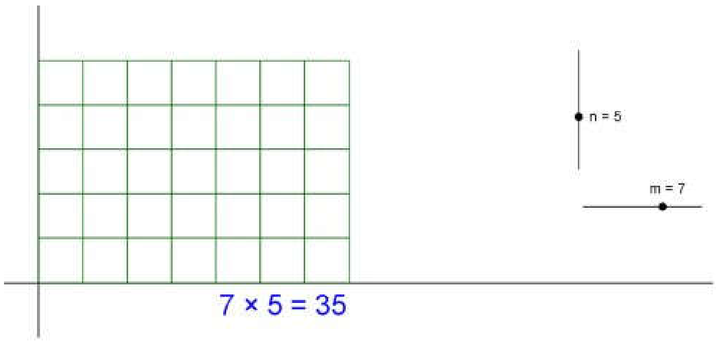
Μία τετραγωνική καμπύλη Bézier έχει τη μορφή, όπου P0, P1 και P2 είναι σημεία του επιπέδου. Σε τετράγωνο σχηματίζουμε μία τέτοια καμπύλη με κατάλληλα ευθύγραμμα τμήματα. Στο Σχήμα 9.7. φαίνονται δύο τέτοιες καμπύλες. Μάλιστα οι καμπύλες δευτέρου βαθμού αυτής της μορφής είναι παραβολές (στο Σχήμα 9.7 φαίνεται η παραβολή που παράγεται με την εστία της και τη διευθετούσα της).



Σχήμα 9.7

Άσκηση 9.5. Να συμπληρώσετε το σχήμα 9.7 στο αρχείο kampyles_Bezier.ggb, ώστε να έχουμε τις αντίστοιχες καμπύλες από τις άλλες δύο κορυφές του τετραγώνου.

Άσκηση 9.6. Να δημιουργήσετε ένα πλέγμα τετραγώνων που να εμφανίζονται τόσα τετράγωνα, όσο είναι το γινόμενο , όπως αυτό του σχήματος 9.8. (Plegma.ggb)



Σχήμα 9.8.

Κεφάλαιο 10ο

Λογιστικά φύλλα – Συναρτήσεις

Στόχοι του μαθήματος: Μετά το 10ο κεφάλαιο οι εκπαιδευόμενοι θα είναι ικανοί:

- Να χρησιμοποιούν το Λογιστικό φύλλο.
- Να δημιουργούν ακολουθίες και πίνακες με το Λογιστικό φύλλο.
- Να δημιουργούν μικροπειράματα με συναρτήσεις.

10.1. Λογιστικό Φύλλο.

Ένα εξαιρετικό εργαλείο του Geogebra είναι το λογιστικό του φύλλο. Μπορούμε να το εμφανίσουμε από την εκκίνησή του κάνοντας κλικ στο Πίνακες και Γραφικά ή από το Προβολή → Λογιστικό Φύλλο (ή Ctrl+Shift+S). Το χρησιμοποιούμε, περίπου, όπως και στο Excel. Σε κάθε κουτί θέτουμε ένα αντικείμενο και η εισαγωγή του γίνεται με την αλλαγή κουτιού (π.χ. Enter).

Για περισσότερη ευκολία, όσον αφορά την κατανόηση της διαδικασίας λειτουργίας αυτού, θα δώσουμε ως παράδειγμα τη γνωστή ακολουθία Fibonacci, που ήδη έχουμε δει. Έτσι στο κελί A1 γράφουμε τη λέξη «όροι», ενώ στο κελί B1 τη λέξη «τιμές». Οι δύο αυτές λέξεις αναγνωρίζονται ως κείμενο. Στο κελί A2 και A3 γράφουμε τους αριθμούς 1 και 2. Αυτοί αναγνωρίζονται ως αριθμοί. Πολλές φορές χρειαζόμαστε να αναγνωριστούν αριθμοί ως κείμενο, π.χ. στην περίπτωση που οι αριθμοί είναι αριθμοί τηλεφώνου. Στην περίπτωση αυτοί οι αριθμοί γράφονται μέσα σε διπλά εισαγωγικά, π.χ. "6947555555". Στη συνέχεια επιλέγουμε τα δύο κελιά (A2 και A3) και από την κάτω δεξιά γωνία τραβάμε με το ποντίκι το επιλεγμένο ορθογώνιο μέχρι τον όρο που επιθυμούμε π.χ. τον 20ο. Ήδη έχουν γραφτεί οι αριθμοί από το 1 μέχρι το 20, κάτι που επιθυμούσαμε. Είναι οι 20 πρώτοι όροι της αριθμητικής προόδου που έχει πρώτο όρο το 1 και λόγο 1(2-1). Τώρα στο κελί B2 γράφουμε το 1, στο κελί B2 γράφουμε το 1 και στο κελί B3 το «=B1+B2» και πατάμε Enter. Με επιλογή πάλι του B3 και τραβώντας από την κάτω δεξιά γωνία το μικρό ορθογώνιο μέχρι το 20ο όρο, παίρνουμε τους 20 πρώτους όρους της ακολουθίας Fibonacci. Δηλαδή εκείνο που έγινε ήταν σε κάθε κελί να μπει το άθροισμα των δύο προηγούμενων, όπως ήταν και στο κελί B3.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	$x^2 - y$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	
2	0	0	-0.2	-0.4	-0.6	-0.8	-1	-1.2	-1.4	-1.6	-1.8	-2	
3	0.2	0.04	-0.16	-0.36	-0.56	-0.76	-0.96	-1.16	-1.36	-1.56	-1.76	-1.96	
4	0.4	0.16	-0.04	-0.24	-0.44	-0.64	-0.84	-1.04	-1.24	-1.44	-1.64	-1.84	
5	0.6	0.36	0.16	-0.04	-0.24	-0.44	-0.64	-0.84	-1.04	-1.24	-1.44	-1.64	
6	0.8	0.64	0.44	0.24	0.04	-0.16	-0.36	-0.56	-0.76	-0.96	-1.16	-1.36	
7	1	1	0.8	0.6	0.4	0.2	0	-0.2	-0.4	-0.6	-0.8	-1	
8	1.2	1.44	1.24	1.04	0.84	0.64	0.44	0.24	0.04	-0.16	-0.36	-0.56	
9	1.4	1.96	1.76	1.56	1.36	1.16	0.96	0.76	0.56	0.36	0.16	-0.04	
10	1.6	2.56	2.36	2.16	1.96	1.76	1.56	1.36	1.16	0.96	0.76	0.56	
11	1.8	3.24	3.04	2.84	2.64	2.44	2.24	2.04	1.84	1.64	1.44	1.24	
12	2	4	3.8	3.6	3.4	3.2	3	2.8	2.6	2.4	2.2	2	
13													

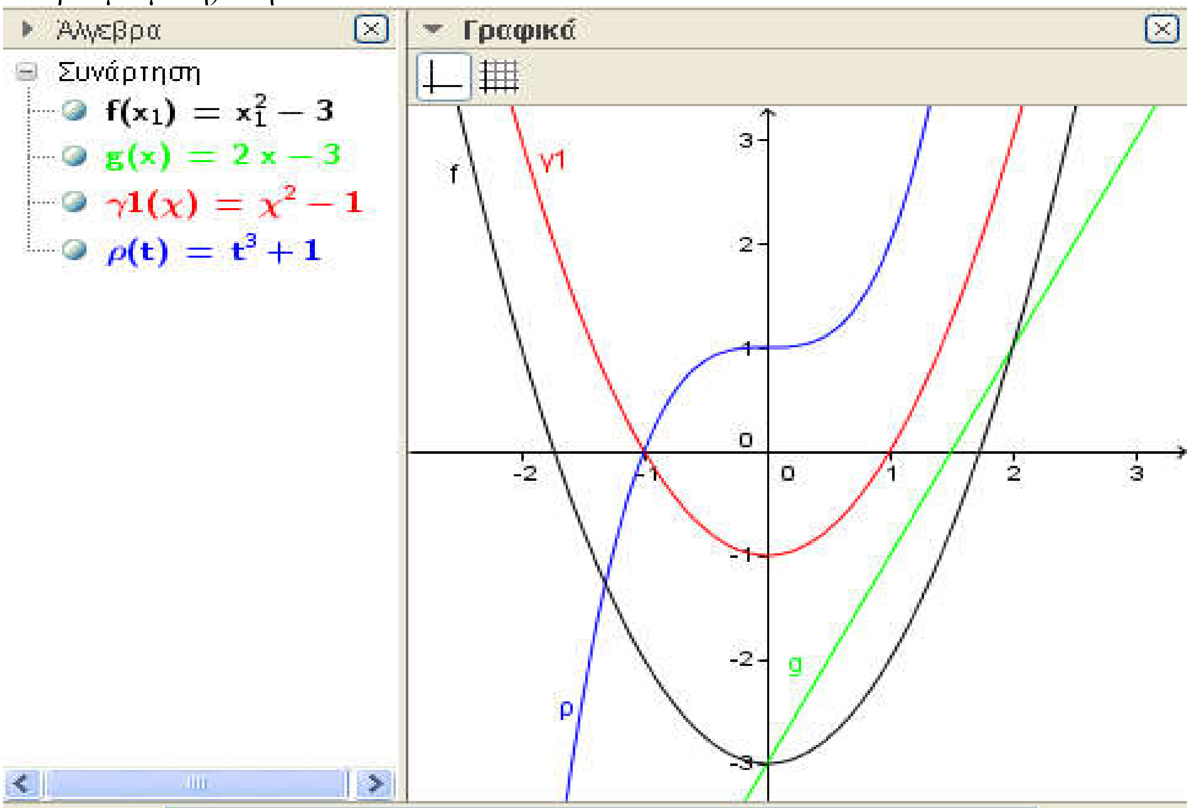
Πίνακας 10.1

Επιλέγοντας όλα τα κελιά της στήλης B (από το B2 μέχρι το B20), η επιλογή γίνεται πλέον με κλικ στο κελί και πατημένο το αριστερό πλήκτρο του ποντικιού το κατεβάζουμε μέχρι το τέλος. Στη συνέχεια, κάνοντας δεξί κλικ πάνω τους, από το Δημιουργία επιλέγουμε το Λίστα. Εμφανίζεται έτσι η λίστα1 στο παράθυρο της άλγεβρας. Μπορούμε πλέον να διαχειριστούμε την λίστα αυτή με ό,τι μάθαμε στο προηγούμενο Μάθημα. Επίσης, επιλέγοντας και τις δύο στήλες, δηλαδή από το A2 μέχρι το B20, έχουμε τη δυνατότητα να επιλέξουμε να δημιουργηθούν είτε μία λίστα με όλα τα κελιά (πρώτα τα κελιά της στήλης A και στη συνέχεια τα κελιά της στήλης B) είτε μία λίστα σημείων και τα σημεία αυτής, τα οποία απεικονίζονται και στο γραφικό περιβάλλον της Geogebra. Εκείνο που πρέπει να προσέξουμε είναι το ότι σε όλες τις λίστες που προαναφέραμε στοιχεία είναι τα κελιά και όχι το περιεχόμενο των κελιών. Αλλάζοντας οποιοδήποτε στοιχείο στο λογιστικό φύλλο αλλάζει και η τιμή στις λίστες.

Μεγάλο ενδιαφέρον αποτελεί το γεγονός ότι μπορούμε να παρακολουθήσουμε τη συμμεταβολή των μεγεθών. Έτσι, γράφοντας στο κελί A1 την παράστασή μας (εδώ είναι η f(x,y) = x2 – y) και στα κελιά A2:A12 (οι δύο τελείες μεταφράζονται “μέχρι”) τις διαδοχικές τιμές x=0:0.2:2 (από μηδέν μέχρι το 2 με βήμα 0.2), καθώς και στα κελιά B1:L1 τις τιμές y=0:0.2:2, μπορούμε να πάρουμε τον Πίνακα 10.1, επιλέγοντας την περιοχή A1:L12 και με δεξί κλικ ? Δημιουργία ? Πίνακας πράξεων. Η μελέτη της συμμεταβολής της f(x,y) = x2 – y γίνεται στο ενδεικτικό φύλλο εργασίας.

Τέλος, μία μεγάλη συλλογή εντολών στατιστικής είναι ενσωματωμένη στο Geogebra και μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε. Περισσότερες πληροφορίες θα μπορούσε να αντλήσει κάποιος από τη διεύθυνση http://wiki.geogebra.org/en/Sta-tistics_Commands. Απλά αναφέρουμε ότι καλούμε σε κάποιο κουτί το αποτέλεσμα της εντολής με το « = » μπροστά από αυτή. Π.χ. για να πάρουμε το μέσο όρο των στοιχείων μιας στήλης (ας πούμε το μέσο όρο των τιμών της στήλης C του πίνακα 10.1), γράφουμε κάπου, έστω στο κελί C13, το « =Mean[C2:C12] ». Βέβαια, θα δείτε ότι αυτή η στατιστική εντολή συντάσσεται και με άλλους τρόπους, αντιμετωπίζοντας όλα αυτά τα στοιχεία ως λίστα.

Άσκηση 10.1. Να δημιουργήσετε σε λογιστικό φύλλο του Geogebra την ακολουθία $\alpha_{\nu+2} = \alpha_{\nu+1} + 2\alpha_\nu$, με πρώτους όρους α) $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_2 = 2$, β) $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_2 = 1$. Να χρησιμοποιήσετε (φύλλο εργασίας) και τις δύο ακολουθίες που δημιουργήσατε ώστε να διδάξετε την επαγωγή (ίσως λίγο αναβαθμισμένη) στη Β' Λυκείου.



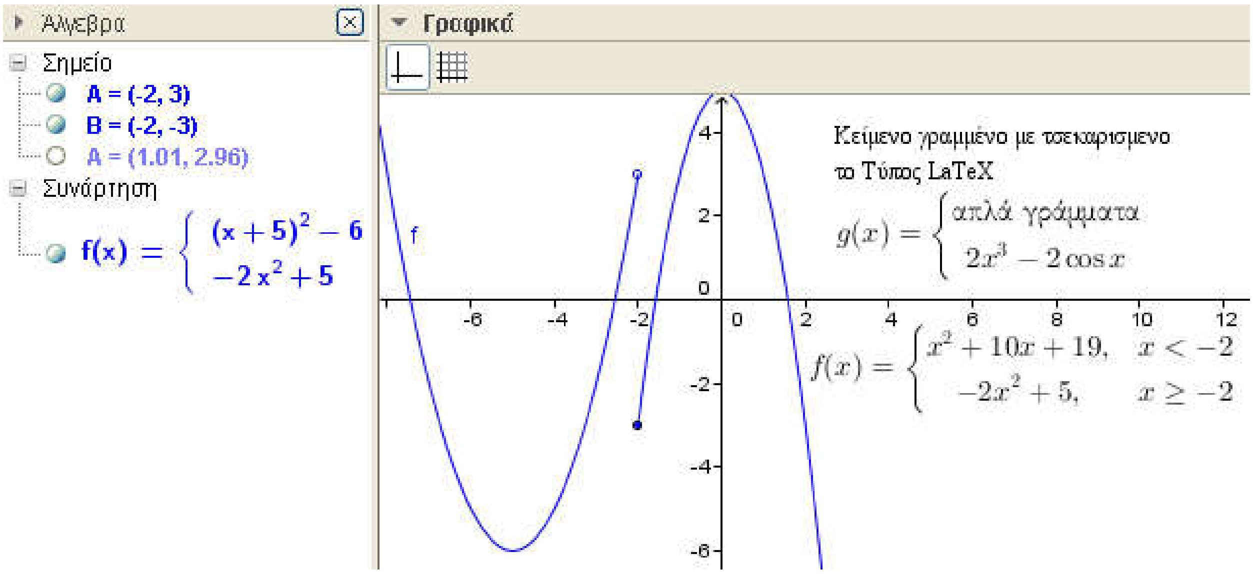
Σχήμα 10.1

10.2. Συναρτήσεις.

Το μεγάλο πλεονέκτημα του Geogebra είναι οι συναρτήσεις. Η φιλικότητα του λογισμικού με τη γραφική σχεδίαση αλλά και το μεγάλο πλήθος συναρτήσεων με τις οποίες είναι εφοδιασμένο το φέρνουν μεταξύ των πρώτων, όσον αφορά τη διδασκαλία αυτών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Προκειμένου να ορίσουμε μία συνάρτηση, δεν έχουμε παρά να γράψουμε στο πεδίο εισαγωγής τον τύπο της, π.χ. f(x) = 2 x + 3 ή g(x) = -x^2 + 3 x -2 κλπ. Παρόλο που το πρόγραμμα σχεδιάζει εξ ίσου καλά τις συναρτήσεις με οποιαδήποτε μεταβλητή, προτείνουμε, για να μην γίνονται παρανοήσεις, ο χρήστης να χρησιμοποιεί μόνο μία μεταβλητή και ιδιαίτερα εκείνη του λατινικού x. Στο Σχήμα 10.1 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις τεσσάρων συναρτήσεων με διαφορετική κάθε φορά μεταβλητή και ονομασία. Παρατηρήστε την ποικιλία αυτών από γράμματα του ελληνικού και Λατινικού αλφαβήτου, καθώς και την εμφάνιση δεικτών σε αυτές.

Σημαντικό ρόλο στη μελέτη των συναρτήσεων με το Geogebra, έχουν οι δρομείς. Οι συντελεστές των πολυωνυμικών και όχι μόνον συναρτήσεων μπορούν να αντικατασταθούν από δρομείς και η μετακίνηση αυτών να οδηγήσει τους μαθητές στην ανακάλυψη ενός πλήθους ιδιοτήτων. Επίσης, μας δίνεται η δυνατότητα να δημιουργήσουμε συναρτήσεις πολλαπλού τύπου με την εντολή Αν[«συνθήκη», «τότε», «διαφορετικά»]. Παρατηρήστε το Σχήμα 10.2 που έχει τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 10x + 19, & \alpha\nu\ x < -2 \\ -2x^2 + 5, & \alpha\nu\ x \geq -2 \end{cases}$$



Σχήμα 10.2

Η εντολή που γράφτηκε στο πεδίο εντολών είναι η εξής: Αν[x<2, (x+5)^2-6, -2x^2+3]. Προκειμένου να εμφανιστεί το μικρό κυκλάκι στο σημείο (-2,3), εισάγουμε το σημείο Α=(-2,3) και επιλέγουμε για εμφάνιση το κυκλάκι, ενώ στο σημείο (-2,-3) που η συνάρτηση είναι συνεχής από δεξιά εισάγουμε το σημείο Β=(-2,-3) με το γεμάτο κυκλάκι. Με διπλό Αν[] μπορούμε να ορίσουμε συναρτήσεις με τρεις κλάδους, π.χ. γράφοντας στο πεδίο εισαγωγής g(x)=Αν[x<-2, x^2-3, Αν[x>2, -x^2-3, x+1]], έχουμε ορίσει τη συνάρτηση:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & \alpha\nu\ x < -1 \\ x, & \alpha\nu -1 \leq x \leq 1 \\ -x^2 - 3, & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$

Για να εμφανίσουμε τον τύπο της συνάρτησης σε ένα σημείο της, «κρεμάσαμε» σε ένα σημείο της συνάρτησης μία ετικέτα γραμμένη στο εισαγωγή κειμένου, επιλέγοντας τον τύπο LaTeX. Ήδη έχουμε πει ότι το LaTeX είναι ένα ειδικό πρόγραμμα για να γράφουμε Μαθηματικά. Όταν πρόκειται για απλούς τύπους, χρησιμοποιούμε το μικρό πλήθος εντολών που υπάρχει ενσωματωμένο, γραμμένο μεταξύ των συμβόλων $ $. Οι γνώστες του προγράμματος χρησιμοποιούν και τις εντολές που γνωρίζουν ή μπορούν να βρουν σε ειδικούς editors. Ωστόσο, στη διεύθυνση http://www.codecogs.com/latex/eqn-editor.php υπάρχει ένας εύχρηστος τρόπος, όπου γράφεις τον σχετικό κώδικα με απλά κλικ και στη συνέχεια τον μεταφέρεις στο Εισαγωγή κειμένου, πάντα ανάμεσα από $ $. Στο αρχείο με τίτλο pollaplos_typos.ggb υπάρχουν οι ετικέτες του Σχήματος 10.2 που μπορείτε να δείτε τη γραφή τους. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι, όταν πρόκειται για πίνακες, για να αλλάξουμε γραμμή χρησιμοποιούμε \\, ενώ για να γράψουμε άλλο στοιχείο της ίδιας γραμμής το &. Προσέχουμε να έχουμε τον ίδιο αριθμό στοιχείων σε κάθε γραμμή. Για παράδειγμα, στον παρακάτω μαθηματικό τύπο του LaTeX (παράδειγμα από το αρχείο pollaplos_typos.ggb)

```
$ f(x)=\left\{\begin{matrix}
 -x^2-3x, & x<-1 \\
 x, & x\leq 1\\
 -2x^2+5, & \mbox{αλλιώς}
 \end{matrix}\right. $
```

έχουμε τα εξής: το \left\{ δημιουργεί το άγκιστρο ({), ενώ το \begin{matrix}λέει ότι ξεκινάει ένας πίνακας. Το \end{matrix} λέει ότι ο πίνακας τελειώνει, ενώ το \right. ότι δεξιά δεν θα μπει τίποτε (προσέξτε την τελεία που υπάρχει στο τέλος μετά το \right! Αυτή λέει να μην μπει τίποτε). Ανάμεσα υπάρχουν οι τρεις γραμμές του πίνακα, όπου τα στοιχεία χωρίζουν με & και οι γραμμές με \\, τέλος το \mbox{} χρησιμοποιείται για να γράψουμε το κείμενο.

Άσκηση 10.2. Στις οδηγίες διαχείρισης της §7.3 των Μαθηματικών της Α' Λυκείου αναφέρεται:

«Να δοθεί έμφαση στη χάραξη και διερεύνηση της γραφικής παράστασης συγκεκριμένων πολυωνυμικών συναρτήσεων της μορφής f(x)=αx2+βx+γ μέσω κατάλληλων μετατοπίσεων της g(x)=αx2 και στη μελέτη της μονοτονίας, των ακρότατων και της συμμετρίας της συνάρτησης με τη βοήθεια της γραφικής της παράστασης. Επίσης, να γίνει γεωμετρική ερμηνεία των συμπερασμάτων των §3.3 και §4.2 (ρίζες και πρόσημο τριωνύμου) με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f(x) = αx2+βx+γ (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.32 του ΑΠΣ).

Ειδικότερα, όσον αφορά στη χάραξη της γραφικής παράστασης και στη μελέτη της συνάρτησης $f(x) = αx^2 + βx + γ$, η ιδέα που βρίσκεται και πίσω από τη δραστηριότητα Δ.30 του ΑΠΣ είναι η εξής: Οι μαθητές, με τη βοήθεια λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας, χαράσσουν τη γραφική παράσταση της $g(x) = αx^2$ για διάφορες τιμές του $α$. Τη μετατοπίζουν κ μονάδες οριζόντια για διάφορες τιμές του κ (π.χ. κατά 3 μονάδες αριστερά, κατά 4 μονάδες δεξιά) και παρατηρούν τη μορφή που παίρνει ο τύπος της συνάρτησης. Στη συνέχεια τη μετατοπίζουν λ μονάδες κατακόρυφα για διάφορες τιμές του λ (π.χ. κατά 2 μονάδες κάτω, κατά 5 μονάδες πάνω) και κάνουν ανάλογες παρατηρήσεις. Συνδυάζοντας τις δύο μετατοπίσεις, μπορούν να παρατηρήσουν ότι η συνάρτηση που θα προκύψει θα είναι της μορφής $f(x) = α(x+κ)^2 + λ$. Τέλος, δίνονται στους μαθητές συγκεκριμένες συναρτήσεις της μορφής $f(x) = αx^2 + βx + γ$ και εκείνοι προσπαθούν, με κατάλληλες μετατοπίσεις της $g(x) = αx^2$, να οδηγηθούν στη γραφική παράσταση της f. Στη συνέχεια μελετούν, με τη βοήθεια της γραφικής της παράστασης, ιδιότητες της f και επεκτείνουν τα συμπεράσματα που αφορούν στη μονοτονία, στα ακρότατα και στις συμμετρίες της $g(x) = αx^2$ στην $f(x) = αx^2 + βx + γ$». Με βάση τις παραπάνω οδηγίες να δημιουργήσετε τρία (3) μικροπειράματα, καθώς και τα αντίστοιχα φύλλα εργασίας τους για να διδάξετε την παράγραφο αυτή σε τρεις (3) διδακτικές ώρες.

Άσκηση 10.3. Να δημιουργήσετε σε λογιστικό φύλλο του Geogebra τη συμμεταβολή του μεγέθους στο τετράγωνο, με κορυφές τα σημεία Α(0,0), Β(2,0), Γ(2,2) και Δ(0,2). Να χρησιμοποιήσετε φύλλο εργασίας για να διδάξετε το μέγιστο και το ελάχιστο α) σε όλο το τετράγωνο, β) στη διαγώνιο ΑΓ και γ) στη διαγώνιο ΒΔ.

Ενδεικτικό Φύλλο Εργασίας 10.1

Σχολείο: . . . .
Όνομα και Επώνυμο: . . . .
Τάξη: . . . .
Ημερομηνία . . . .
Ανοίξτε το αρχείο " symetaboli.ggb"

1. Στη διαγώνιο του πίνακα με τα ροζ κουτάκια (από πάνω αριστερά μέχρι κάτω δεξιά) βρείτε το κουτάκι με τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή. Δικαιολογήστε την παρατήρησή σας.

……………………………………………………………….
……………………………………………………………….
……………………………………………………………….

2. Στη διαγώνιο του πίνακα με τα μπλε κουτάκια (από κάτω αριστερά μέχρι πάνω δεξιά) βρείτε το κουτάκι με τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή. Δικαιολογήστε την παρατήρησή σας.

…………………………………………………………….
…………………………………………………………….

3. Σε κάθε γραμμή βρείτε το μεγαλύτερο κουτάκι και χρωματίστε το, καθώς και το μικρότερο και επίσης χρωματίστε το. Τι παρατηρείτε; Πώς δικαιολογείται; Κάντε το ίδιο για κάθε στήλη.

……………………………………………………………….
……………………………………………………………….

4. Σε ολόκληρο τον πίνακα βρείτε το μεγαλύτερο και το μικρότερο κουτάκι. Τι παρατηρείτε; Πώς το βρήκατε; Πώς το δικαιολογείτε;

…………………………………………………………….
…………………………………………………………….

Καλή Διασκέδαση

Κεφάλαιο 11ο

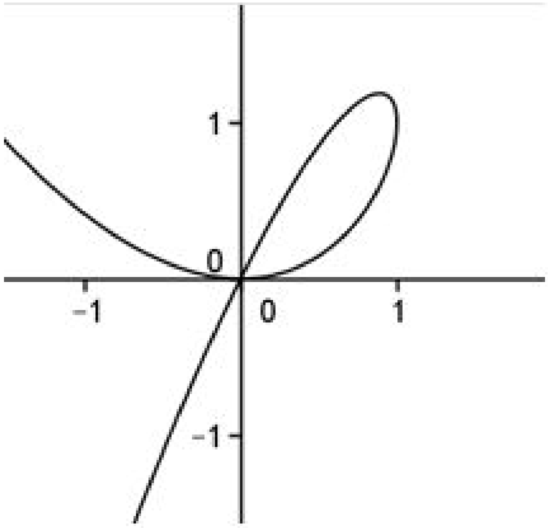
Πεπλεγμένες – Γραφικά 2 – Παράγωγοι

Στόχοι του μαθήματος: Μετά το 11ο μάθημα οι εκπαιδευόμενοι θα είναι ικανοί:

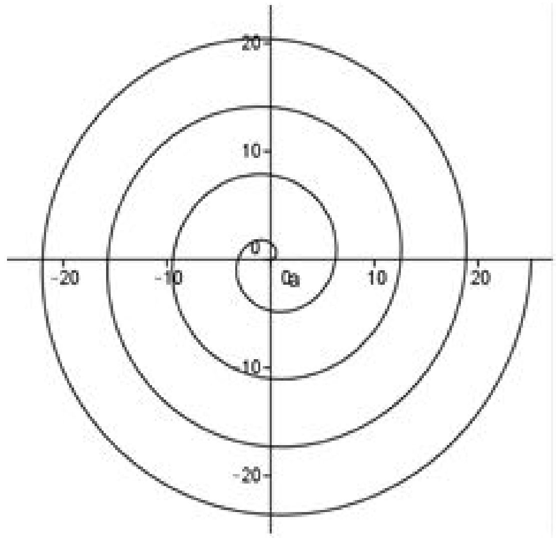
- Να δημιουργούν μικροπειράματα και φύλλα εργασίας με τις συναρτήσεις.

11.1. Παραμετρικές και Πεπλεγμένες Συναρτήσεις.

Το Geogebra υποστηρίζει, εν γένει, τόσο τις πεπλεγμένες συναρτήσεις, όσο και τις παραμετρικές. Ήδη, έχουμε δει την υποστήριξη των πεπλεγμένων συναρτήσεων στις κωνικές. Εδώ, απλά γράφοντας τη συνάρτηση Φ(x, y) = 0 έχουμε το αποτέλεσμα. Ωστόσο, οι συναρτήσεις πρέπει να είναι πολυωνυμικές! Έτσι, γράφοντας στη γραμμή εντολών $x^3 - 2x\ y + y^2 = 0$, έχουμε τη γραφική παράσταση αυτής, το φιόγκο του Σχήματος 11.1. Η αντίστοιχη εντολή είναι ΠεπλεγμένηΚαμπύλη [<f(x,y)>], π.χ. για την πεπλεγμένη του Σχήματος 11.1 γράφουμε ΠεπλεγμένηΚαμπύλη[x^3 - 2x y + y^2].



Σχήμα 11.1



Σχήμα 11.2

Παρόμοια οι παραμετρικές εξισώσεις ορίζονται με το ΠαραμετρικήΚαμπύλη[<Εκφραση1>, <Εκφραση2>, <Παράμετρος>, <Αρχική τιμή>, <Τελική τιμή>], όπου Έκφραση1 είναι η x(t) και Έκφραση2 είναι η y(t), Παράμετρος είναι η μεταβλητή μας t και τέλος μία αρχική και μία τελική τιμή. Για παράδειγμα, οι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου είναι x(t)=r*cos(t) και y(t)=r*sin(t). Έτσι, η ΠαραμετρικήΚαμπύλη[2*cos(t), 2*sin(t), t, 0, 2pi] ορίζει τον κύκλο με κέντρο (0,0) και ακτίνα 2. Παρόμοια η ΠαραμετρικήΚαμπύλη[t*cos(t), t*sin(t), t, 0, 8*pi] μας δίνει την έλικα του Σχήματος 11.2

11.2. Γραφικά 2

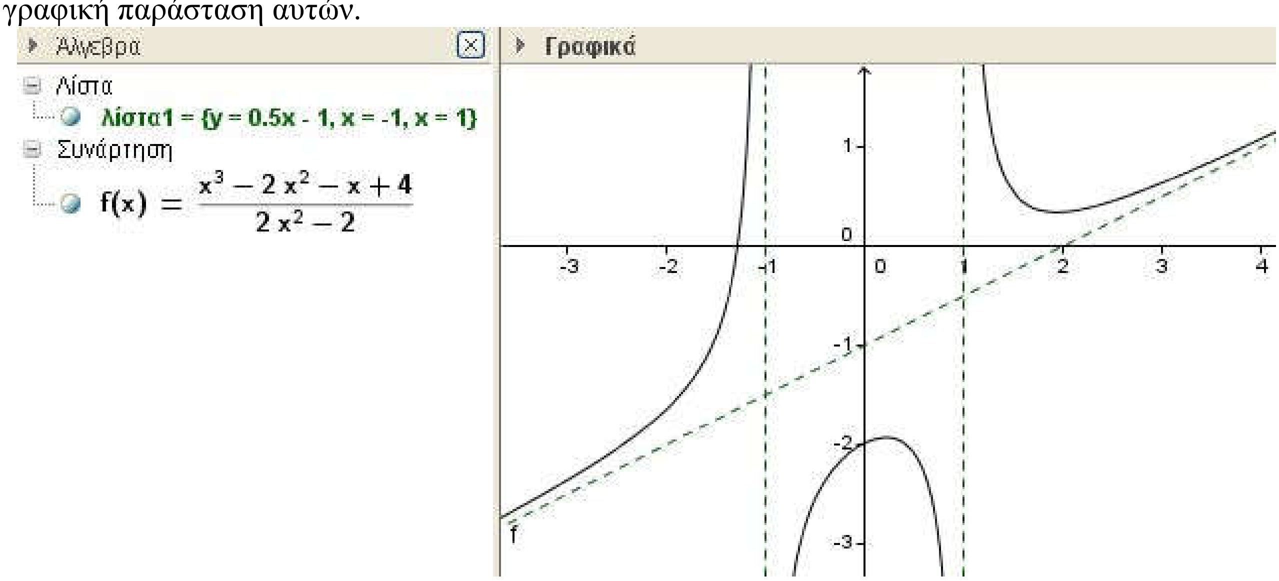
Όπως, ήδη, θα έχετε παρατηρήσει το Geogebra υποστηρίζει και δεύτερο παράθυρο με γραφικά. Εμφανίζεται από το Προβολή → Γραφικά 2 και γίνεται ενεργό με το κλικ πάνω του. Γενικότερα με το κλικ αλλάζουμε ενεργό παράθυρο. Στο καινούργιο παράθυρο μπορούμε να κάνουμε οτιδήποτε θα κάναμε και στο αρχικό, χωρίς κάποια ιδιαιτερότητα. Χρησιμοποιείται δε είτε για να γράψουμε κείμενο σε χώρο διαφορετικό από το παράθυρο εργασίας μας είτε για να λειτουργήσουμε σε ένα διαφορετικό επίπεδο σκέψης, π.χ. μελετάμε στο ένα παράθυρο γεωμετρικά την κίνηση ενός σημείου σε έναν κύκλο, ενώ στο άλλο μελετάμε την κίνηση των συντεταγμένων του σημείου στο επίπεδο, καθώς μεταβάλλεται η γωνία.

Εφαρμογή 11.1. Προκειμένου να διδάξουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας μεγαλύτερης των 360ο δημιουργούμε το μικροπείραμα του αρχείου Megala-toxa.ggb . Υπάρχουν στο μικροπείραμα με το Geogebra το ανοιχτό παράθυρο του «Γραφικά» και του «Γραφικά 2». Στο πρώτο υπάρχουν τέσσερα κουτιά επιλογής, όπου, όταν επιλέγουμε ένα από αυτά, μας εμφανίζεται η εκφώνηση ενός σχετικού προβλήματος. Στο Γραφικά 2 υπάρχει ένας δρομέας με τιμές στο διάστημα (-1500, 1500), ο τριγωνομετρικός κύκλος και μία ακτίνα του που περιστρέφεται, καθώς μεταβάλλεται ο δρομέας. Καθώς μετακινείται η ακτίνα, ξετυλίγεται μία έλικα και κάνει κατανοητή την έννοια της γωνίας που είναι μεγαλύτερη από 360 μοίρες. Η έλικα παράγεται με μία μικρή τροποποίηση της έλικας της παραγράφου 11.1. Ο τύπος της είναι Αν[a > 0, ΠαραμετρικήΚαμπύλη[(0.1 + 0.01t) συν(t), (0.1 + 0.01t) ημ(t), t, 0, a°], ΠαραμετρικήΚαμπύλη[(0.1 - 0.01t) συν(t), (0.1 - 0.01t) ημ(t), t, a°, 0]] . Το a είναι η μεταβλητή (ο δρομέας) που δείχνει μέχρι πού πάει η μεταβλητή t στον τύπο της συνάρτησης. Το Αν χρησιμοποιήθηκε, επειδή η γωνία μας παίρνει και αρνητικές τιμές. Ο αναγνώστης μπορεί να πειραματιστεί με το αρχείο Megala-toxa.ggb.

Άσκηση 11.1. Να τροποποιήσετε κατάλληλα το αρχείο Megala-toxa.ggb (ή να δημιουργήσετε καινούργιο), για να διδάξετε την άσκηση 2 της σελίδας 70 του βιβλίου της Άλγεβρας Β' Γενικού Λυκείου.

11.3. Όρια, Παράγωγος, Ασύμπτωτος.

Σημαντικό είναι το γεγονός ότι το Geogebra έχει εμπλουτιστεί με εντολές εύρεσης του ορίου μιας συνάρτησης. Έτσι, η εντολή Limit[g(x), a] αποδίδει το όριο της g(x) στο σημείο a, υπό την προϋπόθεση ότι αυτό υπάρχει και η συνάρτηση και ο αριθμός έχουν ορισθεί. Επίσης, το ίδιο θα συμβεί, αν στη θέση της συνάρτησης γράψουμε τον τύπο της και στη θέση του a κάποιον πραγματικό αριθμό ή το άπειρο (∞), π.χ. Όριο[x/(x^2-4), 2]. Το άπειρο μπορούμε να το εισάγουμε από τον πίνακα συμβόλων του Geogebra (το τετραγωνάκι με το α) είτε με το Alt+U είτε γράφοντας τη λέξη infinity. Για το δεξιό και αριστερό όριο υπάρχουν τα ΌριοΑποΔεξιά[<Συνάρτηση>, <Τιμή>] για το όριο από δεξιά και το ΌριοΑποΑριστερά[<Συνάρτηση>, <Τιμή>] για το όριο από αριστερά (Πληροφορίες για τη σύνταξη στη διεύθυνση: http://wiki.geogebra. org/en/Limit_Command επίσης στην http://wiki.geogebra. org/en/LimitAbove_Command καθώς επίσης και την http:// wiki.geogebra.org/en/LimitBelow_Command). Τις παραπάνω εντολές μπορούμε να τις χρησιμοποιήσουμε για να διδάξουμε τη συμπεριφορά μίας συνάρτησης είτε για επαλήθευση των αποτελεσμάτων μας είτε για την εύρεση αυτών και να ζητήσουμε στη συνέχεια την αιτιολόγηση του αποτελέσματος, αφού ο τυπικός ορισμός του ορίου δεν συμπεριλαμβάνεται στην ύλη που διδάσκονται οι μαθητές και ως εκ τούτου δίνεται βάρος στη διαισθητική προσέγγιση των εννοιών, μέσα από τη γραφική παράσταση αυτών.



Σχήμα 11.3

Εφαρμογή 11.2. Προκειμένου να διδάξουμε την παράγραφο 1.4 της κατεύθυνσης της Γ' Λυκείου δημιουργούμε το μικροπείραμα oria_2.ggb. Στο μικροπείραμα, στο «Γραφικά», υπάρχει η γραφική παράσταση της g(x) και στο «Γραφικά 2» υπάρχουν:

- Ένα κουτί επιλογής για τη συνάρτηση (υπάρχουν ήδη στις οδηγίες διαχείρισης της ύλης αρκετές συναρτήσεις που μπορεί ο μαθητής να χρησιμοποιήσει).
- Ένα κουτί επιλογής για το x0
- Ένας δρομέας με βήμα 0.001
- Ένα κείμενο που δείχνει τις τιμές της συνάρτησης κοντά στο x0 (π.χ. της g(x0+h)) με πέντε δεκαδικά ψηφία
- Ένα κείμενο που δείχνει το όριο της g(x) (το $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$)

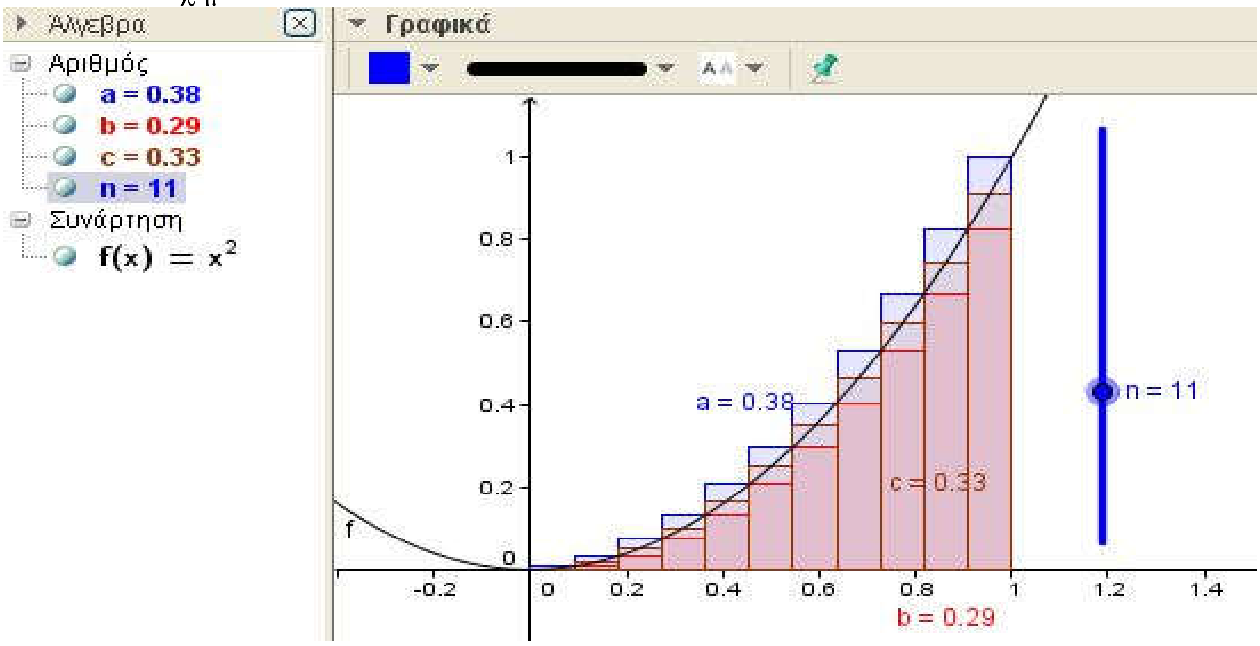
Ο μαθητής επιλέγει τη συνάρτηση με την καθοδήγηση του καθηγητή του και μπορεί να παρατηρήσει τη συμπεριφορά των τιμών αυτής για τιμές της μεταβλητής x κοντά στο x0. Είναι ενδιαφέρον να επανέλθουμε στο μικροπείραμα αυτό, τόσο στο κριτήριο παρεμβολής, όσο και στη μελέτη του ορίου στο άπειρο.

Άσκηση 11.2. Να δημιουργήσετε ένα μικροπείραμα και το αντίστοιχο φύλλο εργασίας για να άρετε την ψευδή εντύπωση που δημιουργεί το σχήμα του βιβλίου στη σελίδα 280 (ότι δηλαδή η τιμή f(x)−y(x) βαίνει μειούμενη, όπου y(x) είναι η ασύμπτωτη) χρησιμοποιώντας ως f(x) τη συνάρτηση

Επίσης, το πρόγραμμα υπολογίζει την παράγωγο μίας συνάρτησης είτε γράφοντας αυτή με τον συνήθη τρόπο γραφής (π.χ. f'(x) ή f''(x)) είτε χρησιμοποιώντας τις σχετικές εντολές Παράγωγος[f] ή Παράγωγος[f, 2]. Η γενικότερη σύνταξη είναι Παράγωγος [<Συνάρτηση>, <Αριθμός>], όπου ο <Αριθμός> εκφράζει την τάξη της παραγώγου. Στη συνέχεια παραθέτουμε ένα σύνολο από διαφορετικές προσεγγίσεις της σύνταξης της Παραγώγου συνάρτησης.

- **Παράγωγος**[<Συνάρτηση>]
  Επιστρέφει την Παράγωγο της Συνάρτησης σε σχέση με την κύρια Μεταβλητή.
  Παράδειγμα: Παράγωγος[x^3 + x^2 + x] αποδίδει 3 x^2 + 2 x +1.
- **Παράγωγος**[<Συνάρτηση>, <Αριθμός>]
  Επιστρέφει τη ν-οστή Παράγωγο της Συνάρτησης σε σχέση με την κύρια Μεταβλητή.
  Παράδειγμα: Παράγωγος[x^3 + x^2 + x, 2] αποδίδει 6x + 2.
- **Παράγωγος**[<Συνάρτηση>, <Ματαβλητή>]
  Επιστρέφει τη μερική Παράγωγο της Συνάρτησης σε σχέση με τη δοσμένη Ματαβλητή.
  Παράδειγμα: Παράγωγος[x^3 y^2 + y^2 + x y, y] αποδίδει 2x^3 y + x + 2 y.
- **Παράγωγος**[<Συνάρτηση>, <Ματαβλητή>, <Αριθμός>]
  Επιστρέφει τη ν-οστή μερική Παράγωγο της Συνάρτησης σε σχέση με τη δοσμένη Ματαβλητή.
  Παράδειγμα: Παράγωγος[x^3 + 3 x y, x, 2] αποδίδει 6x.
- **Παράγωγος**[<Καμπύλη>]
  Επιστρέφει την Παράγωγο της Καμπύλης.
  Παράδειγμα: Παράγωγος[ΠαραμετρικήΚαμπύλη[cos(t), t sin(t), t, 0, π]] αποδίδει την Καμπύλη x = -sin(t), y = sin(t) + t cos(t).
  Σημείωση: Αυτή δουλεύει μόνο για τις παραμετρικές καμπύλες.
- **Παράγωγος**[<Καμπύλη>, <Αριθμός>]
  Επιστρέφει τη ν-οστή Παράγωγο της Καμπύλης.
  Παράδειγμα: Παράγωγος[ΠαραμετρικήΚαμπύλη[cos(t), t sin(t), t, 0, π], 2] αποδίδει την Καμπύλη x = -cos(t), y = 2cos(t) - t sin(t).
  Σημείωση: Αυτή δουλεύει μόνο για τις παραμετρικές καμπύλες.

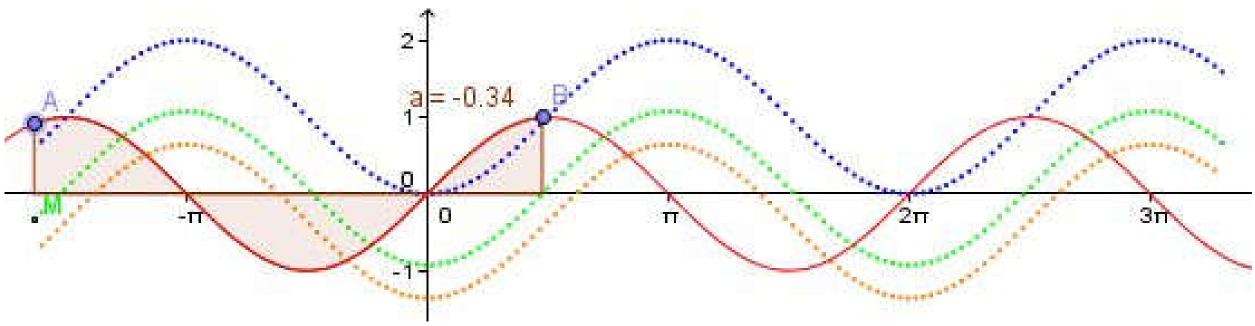
Σε παρόμοια αποτελέσματα καταλήγουμε, αν χρησιμοποιήσουμε την f'(x) αντί για Παράγωγο[f], ή f''(x) αντί για Παράγωγο[f, 2], κλπ. Ωστόσο, επειδή οι μαθητές πρέπει να εξοικειωθούν και με τους κανόνες εύρεσης αυτής, καλό είναι να αποφεύγονται αυτές οι πρακτικές, τουλάχιστον στα πρώτα μαθήματα. Όμως, οι δυνατότητες που έχουμε, χρησιμοποιώντας το Geogebra για να διδάξουμε λεπτές έννοιες του διαφορικού λογισμού, είναι μεγάλες. Για παράδειγμα αναφέρουμε την έννοια της εφαπτομένης, όπου αμέσως μπορούμε να δούμε τα προβλήματα που παρουσιάζονται με τον κλασικό ορισμό αυτής. Επίσης, εξαιρετικά χρήσιμο μπορεί να αποδειχθεί το Geogebra στην υλοποίηση της Δραστηριότητας που προτείνεται στη διδασκαλία του κανόνα του De L' Hospital στην παράγραφο 2.9 του Σχολικού βιβλίου. Ακόμη, σημαντική βοήθεια μπορούμε να έχουμε σε κάθε περίπτωση που η γεωμετρική ερμηνεία είναι απαραίτητη. Τέλος αναφέρουμε την εντολή Ασύμπτωτη [<Συνάρτηση>] που μας επιστρέφει μία λίστα με στοιχεία τις ασύμπτωτες της συνάρτησης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.3.



Σχήμα 11.4

11.4. Ολοκληρώματα.

Στις εντολές των συναρτήσεων υπάρχουν δύο καταπληκτικές εντολές, οι ΠάνωΑθροισμα[<Συνάρτηση>, <Αρχική τιμή του x>, <Τελική τιμή του x>, <Αριθμός ορθογωνίων>] και η ΚάτωΑθροισμα[<Συνάρτηση>, <Αρχική τιμή του x>, <Τελική τιμή του x>, <Αριθμός ορθογωνίων>]. Επιπλέον υπάρχει και η εντολή Αθροισμα Ορθογωνίων[<Συνάρτηση>, <Αρχική τιμή x>, <Τελική τιμή x>, <Αριθμός ορθογωνίων>, <Θέση για το Ορθογώνιο>], όπου η θέση του ορθογωνίου είναι ένας αριθμός d μεταξύ μηδέν και ένα. Οι τρεις παραπάνω εντολές υπολογίζουν κατά προσέγγιση το αλγεβρικό εμβαδόν μεταξύ της καμπύλης και του οριζόντιου άξονα από την αρχική μέχρι την τελική



Σχήμα 11.5

τιμή. Στο Σχήμα 11.4 ο δρομέας n αυξάνει ή μειώνει τον αριθμό των ορθογωνίων, με τα οποία προσεγγίζουμε το εμβαδόν της καμπύλης f, μεταξύ αυτής, του οριζόντιου άξονα και των κάθετων στο 0 και το 1. Το a είναι το πάνω άθροισμα, το b είναι το κάτω άθροισμα και το c είναι το άθροισμα των ορθογωνίων που το ύψος τους είναι στο μέσον των διαστημάτων διαμερισμού, ήτοι το d = 0.5. Στο Σχήμα 11.5 η κόκκινη συνεχής γραμμή είναι η συνάρτηση *f(x)=ημ(x)*. Οι καμπύλες με τις στιγμές είναι η γραφική παράσταση του ορισμένου ολοκληρώματος , καθώς το A κινείται πάνω στην *f(x)* για τρεις διαφορετικές θέσεις του B. Ουσιαστικά, δηλαδή, κάθε μία από αυτές είναι μία παράγουσα της f(x). Είναι φανερό, πλέον, ότι η παράγουσα είναι ολόκληρη οικογένεια καμπύλων και ίσως ο μαθητής αρχίσει να συνειδητοποιεί το ρόλο του C στο αόριστο ολοκλήρωμα.

Για το ολοκλήρωμα, το Geogebra έχει περισσότερες επιλογές. Η εντολή Ολοκλήρωμα[<Συνάρτηση>] επιστρέφει το αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης (με c = 0), π.χ. η εντολή Ολοκλήρωμα[x^3] αποδίδει την 0.25 x^4, ενώ η εντολή Ολοκλήρωμα[<Συνάρτηση>, <Αρχική τιμή>, <Τελική τιμή>] επιστρέφει το ορισμένο ολοκλήρωμα, π.χ. Ολοκλήρωμα[x^2, 0, 1] επιστρέφει την τιμή 0.333.

Άσκηση 11.3. Να δημιουργήσετε το μικροπείραμα και το σχετικό φύλλο εργασίας, για να διδάξετε το ορισμένο ολοκλήρωμα, χρησιμοποιώντας το ΠάνωΑθροισμα και ΚάτωΑθροισμα.

Μάθημα 12ο

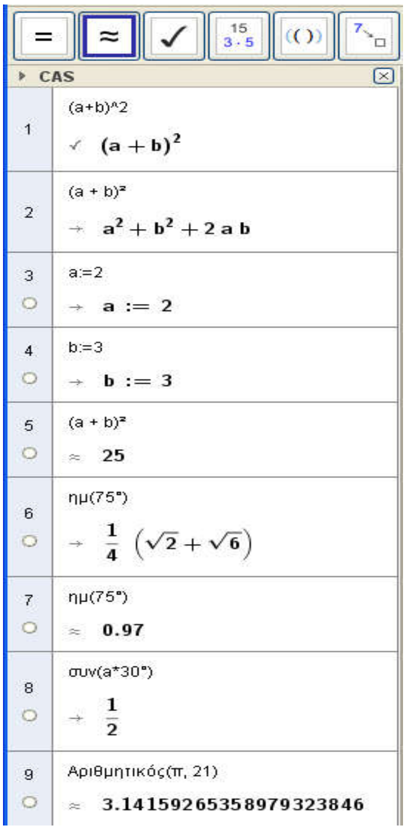
Computer Algebra System – Συμβολικοί υπολογισμοί.

Στόχοι του μαθήματος: Μετά το 12ο μάθημα οι εκπαιδευόμενοι θα είναι ικανοί:

- Να χρησιμοποιούν το CAS για τη λύση προβλημάτων
- Να χρησιμοποιούν το CAS για να δημιουργούν μικροπειράματα και φύλλα εργασίας.

12.1. Τι είναι το CAS.

Τα αρχικά των τριών λέξεων Computer Algebra System δημιουργούν το CAS, με το οποίο έχει εφοδιαστεί τελευταία το Geogebra και μας επιτρέπει να το χρησιμοποιούμε για να κάνουμε συμβολικούς υπολογισμούς, κάτι που μέχρι τώρα μόνον με τα μεγάλα μαθηματικά πακέτα (Mathe matica, Maple, Sage κλπ.) μπορούσαμε να κάνουμε. Στο Σχήμα 12.1, φαίνεται η μπάρα με τα κουμπιά των εργαλείων, και μερικά παραδείγματα. Το πρώτο κουμπί κάνει ακριβείς υπολογισμούς (συμβολικούς), το δεύτερο αριθμητικούς και το τρίτο διατηρεί και ελέγχει τα εισαγόμενα. Ως παράδειγμα, στο ίδιο σχήμα στην πρώτη γραμμή, αφού γράψαμε την έκφραση (a+b)^2, κάναμε κλικ στο τρίτο εικονίδιο για να διατηρήσουμε την ποσότητα. Στη συνέχεια, κάναμε κλικ στη διατηρούμενη ποσότητα και κλικ στο πρώτο εικονίδιο και πήραμε το ανάπτυγμα. Έπειτα, ορίσαμε το a:=2 και το b:=3 (προσέξτε τις δύο τελείες) και στην 5η γραμμή, κάνοντας κλικ στη διατηρούμενη ποσότητα και στο δεύτερο κουμπί, πήραμε το αριθμητικό αποτέλεσμα. Στην 6η γραμμή γράψαμε το ημ(75^o) και ζητήσαμε την ακριβή τιμή (1ο κουμπί), ενώ στην 7η γραμμή ξαναγράψαμε (αφού δεν το είχαμε διατηρήσει) το ημ(75^o) και πήραμε το προσεγγιστικό αποτέλεσμα (κλικ στο 2ο εικονίδιο). Επίσης, παρατηρήστε ότι στην 8η γραμμή το συν(a*30^o) απέδωσε ½, αφού το a έχει ορισθεί ίσο με 2 στην 3 γραμμή. Τέλος, στην 9η γραμμή μας δίνει το π προσεγγιστικά με 20 δεκαδικά ψηφία.



Σχήμα 12.1

Στην 3η και 4η γραμμή ορίσαμε τις μεταβλητές a και b. Για να αλλάξουμε τιμές στις μεταβλητές αυτές, έχουμε δύο επιλογές: 1) στην ίδια γραμμή που έχουν ορισθεί μπορούμε να τις ορίσουμε εκ νέου. Προσοχή: Αν προσπαθήσουμε να δώσουμε τιμές, σε αυτές, σε καινούργια γραμμή, τότε το πρόγραμμα ορίζει καινούργια μεταβλητή και την αρχική δεν την πειράζει. 2) Σε καινούργια γραμμή γράφουμε Διαγραφή[<μεταβλητή>] (π.χ. Διαγραφή[a]) και την ορίζουμε σε καινούργια γραμμή εκ νέου (π.χ. a:=−7.5).

Άσκηση 12.1 Να αναφέρετε, δίνοντας κατάλληλα παραδείγματα, τις λειτουργίες των κουμπιών του Σχήματος 12.2.


Σχήμα 12.2

12.2. CAS, Αριθμητικοί Υπολογισμοί και Τυχαίοι Αριθμοί.

Προκειμένου να δώσει αριθμητική λύση το Geogebra, «συμβουλεύεται» τη Στρογγυλοποίηση σε… που έχουμε ορίσει στις Επιλογές. Έτσι, η εντολή Αριθμητικός[4/3] ή Numeric[4/3] δίνει 1.333, ενώ το Αριθμητικός[5/3] δίνει 1.667, όταν έχουμε ορίσει τη Στρογγυλοποίηση σε 3 δεκαδικά ψηφία. Ωστόσο, με το Αριθμητικός[exp(1), 15] παίρνουμε την τιμή 2.71828182845904, δηλαδή την τιμή του e με 15 ψηφία. Παρόμοιες είναι και οι εντολές ΛύσηN[<Εξίσωση>, <Μεταβλητή>], καθώς και η ΛύσειςN[<Εξίσωση>, <Μεταβλητή>], όπου ουσιαστικά λύνουν τις εξισώσεις ως προς την επιθυμητή μεταβλητή. Έτσι, η ΛύσηN[x^2=3, x] αποδίδει {x = -1.7321, x = 1.7321}. Πολλές φορές και προκειμένου να βρούμε κάποια λύση εξίσωσης αριθμητικά χρειάζεται να δοθεί μία αρχική τιμή στη μεταβλητή. Έτσι, με την εντολή ΛύσειςN[συν(x) = ημ(x), x = 0] παίρνουμε ως λύση {x = 0.7854}, ενώ με την εντολή ΛύσειςN[συν(x) = ημ(x), x = 2π] παίρνουμε τη λύση {x = 7.0686}, την αντίστοιχη λύση κοντά στο 2π.

Δεν είναι λίγες οι φορές που μας ενδιαφέρει να παράγουμε τυχαίους αριθμούς. Υπάρχουν αρκετές γεννήτριες παραγωγής τυχαίων αριθμών, ωστόσο το Geogebra έχει ενσωματωμένες κάποιες από αυτές. Έτσι, η εντολή RandomBetween[<Ελάχιστο>, <Μέγιστο>] παράγει έναν τυχαίο αριθμό μεταξύ του Ελάχιστου και του Μέγιστου της ομοιόμορφης κατανομής, ενώ η ΤυχαίαΚανονικήΚατανομή[<Μέση τιμή>, <Τυπική Απόκλιση>] παράγει έναν τυχαίο αριθμό από μία κανονική κατανομή με μέση τιμή και τυπική απόκλιση δοσμένη. Με το πλήκτρο F9 οι δύο παραπάνω γεννήτριες παράγουν καινούργιους αριθμούς. Η χρήση των Λιστών, που είδαμε σε προηγούμενο μάθημα. μπορεί να φανεί χρήσιμη, ώστε να έχουμε περισσότερους αριθμούς. Στο Σχήμα 12.3 φαίνονται δύο τέτοια παραδείγματα, που παράγουμε από δέκα τυχαίους αριθμούς με τις δύο γεννήτριες.

Ακολουθία[RandomBetween[0, 20], i, 1, 10]

≈ {16, 20, 4, 11, 6, 11, 18, 10, 14, 15}

Ακολουθία[ΤυχαίαΚανονικήΚατανομή[3, 0.5], i, 1, 10]

≈ {1.96, 4.32, 2.6, 2.82, 3.19, 2.8, 2.42, 2.82, 3.24, 1.92}

Σχήμα 12.3

12.3. Συμβολικοί Αλγεβρικοί Υπολογισμοί.

Το μεγάλο πλεονέκτημα του Geogebra σε σχέση με άλλα διδακτικά πακέτα είναι ότι, πλέον, μπορεί κάποιος να κάνει συμβολικούς υπολογισμούς. Έτσι, το (x-3)(x+2) αποδίδει $x^2 - x - 6$. Ένα πλήθος από εντολές μας διευκολύνουν σε αυτούς. Εδώ θα αναφερθούν ορισμένοι από αυτούς ως παραδείγματα. Ο αναγνώστης μπορεί να βρει το σύνολο των εντολών αυτών στη διεύθυνση http://wiki.geogebra.org/en/CAS_Specific_ Commands

Αρχικά, με την ΕκτέλεσηΠράξεων[<Εκφραση>] εκτελούμε τις πράξεις σε μία έκφραση, π.χ. η ΕκτέλεσηΠράξεων[(2 x - 1)^2 + 2 x + 3] αποδίδει 4x2 - 2x + 4, παρόμοια είναι και η Απλοποίηση[<Εκφραση>], ενώ αντίθετα η εντολή Παράγοντες[<Πολυώνυμο>] παραγοντοποιεί την μεταξύ των αγκυλών έκφραση, π.χ. η εντολή Παράγοντες[x^9-x^8 - x+1] αποδίδει την έκφραση {{x - 1, 2}, {x + 1, 1}, {x^{2} + 1, 1}, {x^{4} + 1, 1}} υπό μορφή πίνακα, έτσι έχουμε ότι,
x9 - x8 – x + 1 = (x - 1)2·(x + 1)·(x2 + 1)·(x4 + 1)

Η ίδια εντολή με όρισμα αριθμούς αποδίδει τους παράγοντες του αριθμού, π.χ. Παράγοντες[48] δίνει {{2, 4}, {3, 1}}, δηλαδή 48 = $2^4 \times 3$. Όσον αφορά την παραγοντοποίηση, ενώ η έκφραση Παράγοντες[x^2+4] επιστρέφει την ίδια ποσότητα, η έκφραση ΠαραγοντοποίησηΜιγαδική[x^2 + 4] επιστρέφει την (x + 2i) (x − 2i). Σχετικά με την Ευκλείδεια Διαίρεση, η εντολή Διαίρεση[<Αριθμός>, <Αριθμός>], καθώς και η Διαίρεση[<Πολυώνυμο>, < Πολυώνυμο >] μας επιστρέφει Πηλίκο και Υπόλοιπο, ενώ υπάρχουν ενσωματωμένες και οι εντολές: Πηλίκο[<Αριθμός>, <Αριθμός> ή <Πολυώνυμο>, < Πολυώνυμο >], Υπόλοιπο[<Αριθμός>, <Αριθμός> ή <Πολυώνυμο>, < Πολυώνυμο >], ΔιαιρετώνΠλήθος[<Αριθμός>], Διαι ρετώνΛίστα[<Αριθμός>], ΔιαιρετώνΑθροισμα[<Αριθμός>]. Η πρόσθεση και η αφαίρεση ρητών παραστάσεων εξασφαλίζεται από το κουμπί των ακριβών υπολογισμών, π.χ. 1/(x^2-4) + 3/(x^2-5 x+6) επιστρέφει $\frac{4x+3}{x^3-3x^2-4x+12}$.

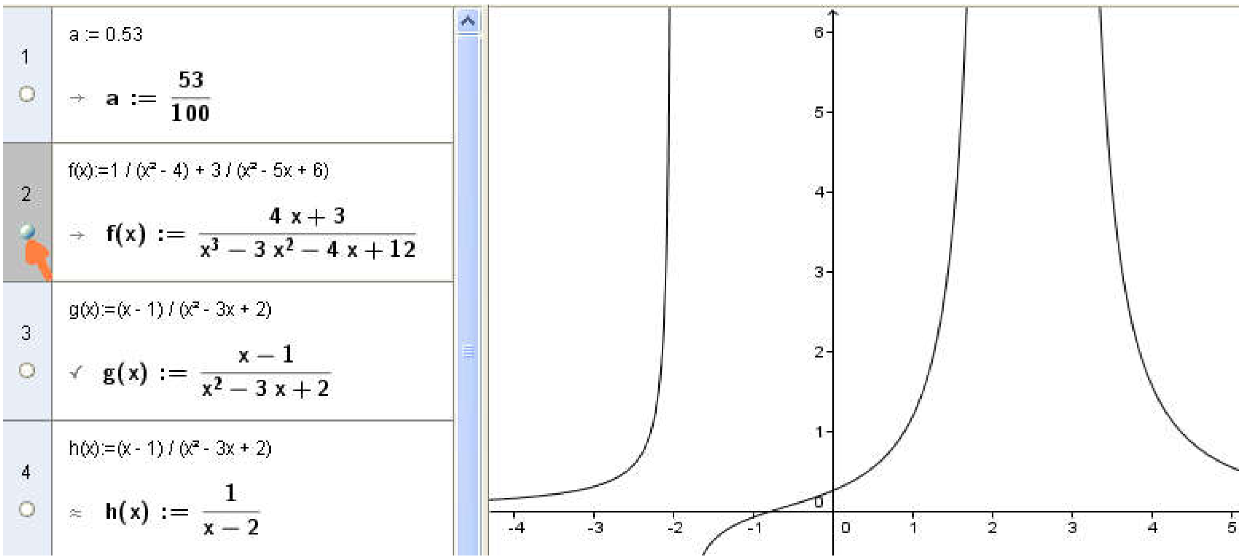
Η μεταφορά των αντικειμένων κάθε γραμμής του CAS στο περιβάλλον γραφικών γίνεται από το κυκλάκι εμφάνισης ? απόκρυψης στην αρχή αυτής, π.χ. στο Σχήμα 12.4 η γραφική παράσταση της f(x) στη γραμμή 2 έχει εμφανιστεί στο παράθυρο γραφικών με ένα απλό κλικ.

Άσκηση 12.2. Να υπολογίσετε συμβολικά α) τις παραστάσεις της Άσκησης 5, της σελίδας 81 του σχολικού βιβλίου της Γ Γυμνασίου. β) Τις ακριβείς τιμές της Άσκησης 4, της σελίδας 81 του ίδιου βιβλίου.

Άσκηση 12.3. Να χρησιμοποιήσετε το CAS του Geogebra για να διδάξετε α) τους ρητούς στην Α' Γυμνασίου και β) τους άρρητους στη Β' Γυμνασίου.

12.4. CAS και Ολοκληρώματα.

Για την εύρεση της παραγώγου ήδη έχουμε μιλήσει σε προηγούμενο Μάθημα. Οι ίδιες εντολές έχουν ισχύ και εδώ. Έτσι, η εντολή Παράγωγος[<Συνάρτηση>] μας υπολογίζει την παράγωγο μιας συνάρτησης, ενώ η εντολή Ολοκλήρωμα[<Συνάρτηση>] ή Ολοκλήρωμα[<Συνάρτηση>, <Μεταβλητή>] υπολογίζει το Ολοκλήρωμα της συνάρτησης. Ίσως το Geogebra, σε συμβολικούς υπολο-



Σχήμα 12.4

γισμούς, να μην έχει φτάσει ακόμη σε επιθυμητό αποτέλεσμα και τα μεγάλα Μαθηματικά Πακέτα να μας δίνουν πολύ καλά αποτελέσματα, όμως ήδη έχει γίνει μία αρχή και σε διδακτικό επίπεδο μπορεί να λειτουργήσει ικανοποιητικά. Στο σχήμα 12.5 δόθηκε (στο πεδίο εισαγωγής) η συνάρτηση και στη συνέχεια στο παράθυρο του CAS ζητήθηκε να ορισθεί (:=) η συνάρτηση g(x):=Παράγωγος[f(x)], καθώς και το ολοκλήρωμα της g(x) με δύο διαφορετικούς τρόπους και το αποτέλεσμα, για τη συνάρτηση f(x), είναι αυτό που φαίνεται. Επίσης, με την εντολή Ολοκλήρωμα[<συνάρτηση>, <Αρχική x-τιμή>, <Τελική x-τιμή>] το πρόγραμμα υπολογίζει το Ορισμένο Ολοκλήρωμα από την Αρχική τιμή μέχρι την Τελική τιμή συμβολικά.

Τέλος, με την εντολή ΟλοκλήρωμαN[<συνάρτηση>, <Αρχική x-τιμή>, <Τελική x-τιμή>] , υπολογίζουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης με μεταβλητή τη x, π.χ το ΟλοκλήρωμαN[ημ(x), π/6, π/3] επιστρέφει ως τιμή 0.36603, ενώ το Ολοκλήρωμα[ημ(x), π/6, π/3] επιστρέφει ως τιμή την ακριβή του τιμή .

Άσκηση 12.4 Να υπολογίσετε: α) Τα αόριστα ολοκληρώματα της Άσκησης 7, σελίδας 317 του σχολικού βιβλίου της Γ Λυκείου. β) Τα ορισμένα ολοκληρώματα της Άσκησης 9, σελίδας 339 του ίδιου βιβλίου και γ) Το ορισμένο ολοκλήρωμα του θέματος Γ4 των πανελληνίων εξετάσεων 2014 (οι λύσεις στη διεύθυνση http://mathematica.gr/). Να συγκρίνετε τη λύση του προγράμματος με τη λύση του προβλήματος!

12.5 CAS και Αναλυτική Γεωμετρία.

Εκτός των ανωτέρω, το Geogebra μπορεί και δίνει συμβολικές τιμές σε ορισμένες περιπτώσεις, όσον αφορά την Αναλυτική Γεωμετρία. Έτσι

- Προκειμένου να υπολογίσουμε τη γωνία τριών σημείων (με το σημείο της κορυφής στο μέσον), γράφουμε Γωνία [<σημείο>, <σημείο>, <σημείο>] και ο ακριβής υπολογισμός μας επιστρέφει το τόξεφ(α), ενώ ο αριθμητικός μας επιστρέφει rad.
- Η ΔιχοτόμοςΓωνίας[(1,2),(0,0),(2,1)], τόσο στον ακριβή υπολογισμό, όσο και στον αριθμητικό, μας επιστρέφει y = x.
- Η εντολή Περιφέρεια[x^2+y^2=1/π] στον ακριβή υπολογισμό μας επιστρέφει , ενώ στον αριθμητικό μας επιστρέφει 3,5449.
- Η εντολή για την εύρεση της απόστασης σημείου από ευθεία είναι η εντολή Απόσταση[(0,0), x + y = 1], που στον ακριβή υπολογισμό μας επιστρέφει , ενώ στον αριθμητικό μας επιστρέφει

0,7071. Επιπλέον, η εντολή Απλοποίηση[Απόσταση[(a, b), y = x]] επιστρέφει την παράσταση .

- Παρόμοια, για την εύρεση της απόστασης ενός σημείου από μία παραβολή έχουμε την εντολή Απόσταση[(0,0), y = x^2], που στον ακριβή υπολογισμό μας επιστρέφει , ενώ στον αριθμητικό μας επιστρέφει 1,9365. Επίσης, για την εύρεση της απόστασης ενός σημείου από έναν κύκλο η Απόσταση[(2,2), x2 + y2 = 1] μας επιστρέφει , ενώ στον αριθμητικό μας επιστρέφει 1,8284.
- Η εντολή Κύκλος[(a,b), c] στον ακριβή υπολογισμό μας επιστρέφει (-a + x)2 + (-b + y)2 = c2, ενώ στον αριθμητικό μας επιστρέφει a2 - 2.0a x + b2 - 2.0 b y + x2 + y2 = c2.
- Απόσταση[(a,b),(c,d)] είναι η απόσταση δύο σημείων και στον ακριβή υπολογισμό μας επιστρέφει , ενώ αριθμητικό μας επιστρέφει (a2 - 2.0a c + b2 - 2.0b d + c2 + d2)0.5.
- Η εντολή Ευθεία[(a,b), y = p x+q], τόσο στο ακριβή, όσο και στον αριθμητικό υπολογισμό, επιστρέφει y = -a p + p x + b, δηλαδή την ευθεία που περνά από το σημείο (a,b) και είναι παράλληλη στην y = p x+q.
- Τέλος, η MidPoint[(a,b),(c,d)] επιστρέφει στον ακριβή υπολογισμό , ενώ στον αριθμητικό (0.5a + 0.5c, 0.5b + 0.5d).

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1ο 7

Το Λογισμικό Geogebra. 7

1.1. Το περιβάλλον. 7

1.2. Σχεδιάζοντας Σημεία και Ευθείες. 8

1.3. Σχεδιάζοντας Ημιευθείες και Τεθλασμένες. 8

1.4. Άλγεβρα και Γραφικά. 8

Ενδεικτικό Φύλλο Εργασίας 1.1 11

Ενδεικτικό Φύλλο Εργασίας 1.2 11

Κεφάλαιο 2ο 13

Εικόνα – Κείμενο – Σημείο 13

2.1 Πεδίο εισαγωγής. 13

2.2 Εισαγωγή εικόνας 13

2.3 Εισαγωγή κειμένου 15

2.4 Κίνηση σε σημείο 15

Ενδεικτικό Φύλλο Εργασίας 2.3 17

Κεφάλαιο 3ο 18

Τμήμα – Γωνία – Μετρήσεις 18

3.1. Η μέτρηση ευθύγραμμου τμήματος. 18

3.2. Η μέτρηση γωνίας. 18

3.3 Το πρόβλημα των στρογγύλευσης. 19

3.4 Κλίση. 20

3.5. Ανοιχτά προβλήματα. 21

3.6. Ερευνητικές επεκτάσεις. 22

Ενδεικτικό Φύλλο Εργασίας. Example_3-1.ggb 23

Ενδεικτικό Φύλλο Εργασίας. Askisi_3-1.ggb 24

Κεφάλαιο 4ο 25

Κύκλος – Εργαλεία – Ρυθμίσεις 25

4.1. Σχεδιάζοντας κύκλους. 25

4.2. Επανάληψη κατασκευής. 25

4.3 Καινούργια εργαλεία. 27

4.4 Μία πρόταση διδασκαλίας. 27

4.5 Εισαγωγή δρομέα 28
Ενδεικτικό Φύλλο Εργασίας για το Euler_4-4.ggb 30
Ενδεικτικό Φύλλο Εργασίας για το Euler_4-4a.ggb 31
Κεφάλαιο 5ο 32
Κάθετες, Παράλληλες κλπ. Λογικές μεταβλητές. 32
5.1. Άλλες Γραμμές. 32
5.2. Λογικές Μεταβλητές 34
5.3. Εμφάνιση ή απόκρυψη αντικειμένων. 35
5.4. Ένα αρχείο πολλά πειράματα. 35
Ενδεικτικό Φύλλο Εργασίας για το Askisi_5-1.ggb 37
Κεφάλαιο 6ο 38
Πολύγωνα, GeogebraTube, ιστοσελίδες. 38
6.1. Πολύγωνα. 38
6.2. GeogebraTube. 39
6.3 Εξαγωγή αρχείου για το GeogebraTube. 39
6.4. Ανέβασμα στο wiki. 40
6.5. Ιστοσελίδα στο Geogebra. 41
Ενδεικτικό Φύλλο Εργασίας για το Askisi_6-1.ggb 43
Κεφάλαιο 7ο 44
Κωνικές Τομές 44
7.1. Κωνική τομή 44
7.2 Έλλειψη, Υπερβολή. 44
7.3 Παραβολή. 45
7.4. Εντολές Κωνικών. 45
7.5. Κουτί εισαγωγής. 46
7.6. Οι Κωνικές τομές ως Γεωμετρικοί Τόποι. 47
Ενδεικτικό Φύλλο Εργασίας για το Paradeigma_7_1.ggb 48
Κεφάλαιο 8ο 49
Λίστες – Ακολουθίες 49
8.1. Λίστες 49
8.2. Απλές πράξεις στις Λίστες. 49
8.3. Απλές πράξεις με Λίστες 49
8.4. Σύνθετες πράξεις με Λίστες 50

8.5. Ακολουθίες (Sequences). 51
8.6. Αναδρομικές ακολουθίες. 52
8.7. Ακολουθίες ακολουθιών. 53
Κεφάλαιο 9ο 55
Αναδρομικές Ακολουθίες 55
9.1. Κεντρική γωνία πολυγώνου. 55
9.2. Πρόσθεση n διαδοχικών αριθμών. 56
9.3. Πρόσθεση n διαδοχικών περιττών. 57
9.4. Μία εφαρμογή από τη Γεωμετρία. 57
9.5. Καμπύλες Bézier. 59
Κεφάλαιο 10ο 60
Λογιστικά φύλλα – Συναρτήσεις 60
10.1. Λογιστικό Φύλλο. 60
10.2. Συναρτήσεις. 61
Ενδεικτικό Φύλλο Εργασίας 10.1 64
Κεφάλαιο 11ο 65
Πεπλεγμένες – Γραφικά 2 – Παράγωγοι 65
11.1. Παραμετρικές και Πεπλεγμένες Συναρτήσεις 65
11.2. Γραφικά 2 65
11.3. Όρια, Παράγωγος, Ασύμπτωτος 66
11.4. Ολοκληρώματα 68
Μάθημα 12ο 70
Computer Algebra System – Συμβολικοί υπολογισμοί. 70
12.1. Τι είναι το CAS. 70
12.2. CAS, Αριθμητικοί Υπολογισμοί και Τυχαίοι Αριθμοί. 70
12.3. Συμβολικοί Αλγεβρικοί Υπολογισμοί. 71
12.4. CAS και Ολοκληρώματα. 72