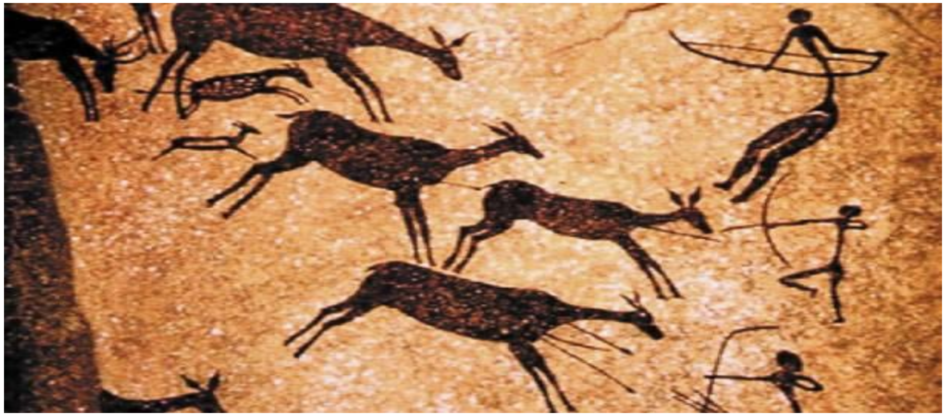
Κωνικές Τομές: Η Γεωμετρία των Σκιών

Κοινή εργασία με τους

- Σπύρο Στίγκα και
- Δημήτρη Θεοδωράκη

Ιστορικά



- Η μεταφορά αντικειμένων του Χώρου των τριών διαστάσεων στο επίπεδο έχει τις ρίζες της στην προϊστορική εποχή.

- Οι αρχαίοι Έλληνες ασχολήθηκαν ελάχιστα με τη Προβολική Γεωμετρία και την Προοπτική, (πχ. ο Ευκλείδης στα «Οπτικά» του).

- Στην Αρχαία Ελλάδα: μεγάλος αριθμός θεωρημάτων, που χρησιμοποιήθηκαν στη συνέχεια στην Προβολική Γεωμετρία και την Προοπτική. (Απολλώνιος, Μενέλαος, Πάππος).

- Τον 16ο και 17ο μ.Χ. αιώνα, κυρίως οι Ευρωπαίοι, όπως οι Gigard Desargues, Leonardo Da Vinci, Giacomo Barozzi da Vingola, ο μαθηματικός Egnazio Danti και ένα μεγάλο πλήθος άλλων καλλιτεχνών και αρχιτεκτόνων.

Με τι θα ασχοληθούμε

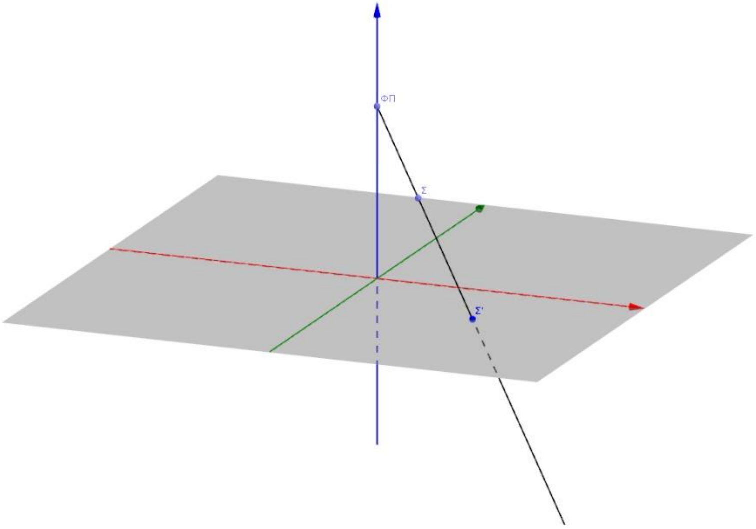
- Θα βρούμε χαρακτηριστικά σημεία και χαρακτηριστικές ευθείες των σκιών, που σχηματίζουν σε ένα επίπεδο, στοιχειώδη γεωμετρικά σχήματα, όταν φωτίζονται από μια φωτεινή πηγή, με εργαλείο τη στοιχειώδη Ευκλείδεια Γεωμετρία. (Π.χ. Σημείο, ευθύγραμμο τμήμα και κύκλος).

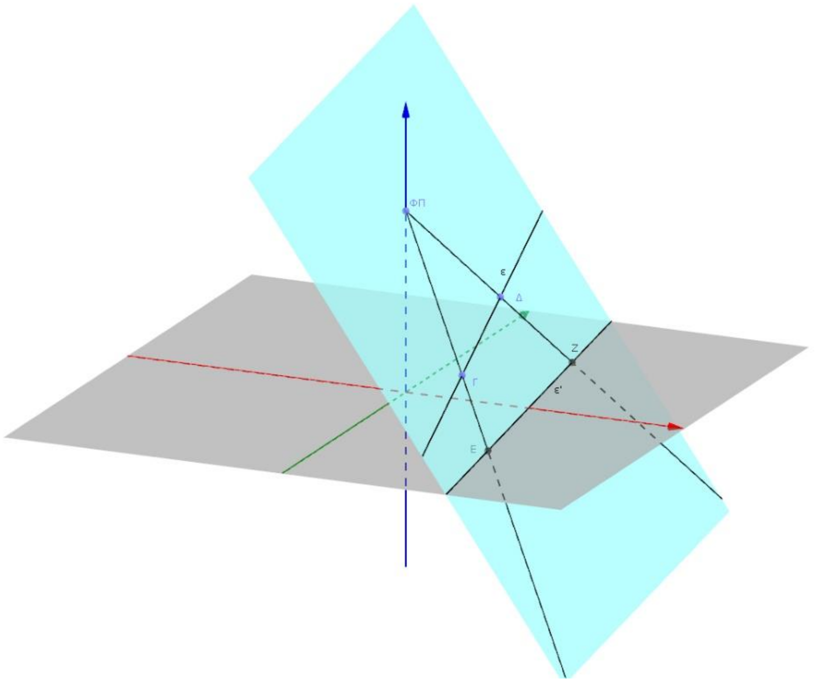
Ορισμοί και Προαπαιτούμενα.

<u>Παραδοχές</u>

- Η φωτεινή πηγή (φ.π.) θα είναι, για μας, ένα σημείο και ως εκ τούτου δεν θα εμφανίζεται παρασκιά.
- Η φ.π. είναι δυνατόν να βρίσκεται κάπου στο χώρο και ως εκ τούτου οι φωτεινές ακτίνες (φ.α.) θα είναι δέσμη ευθειών που θα διέρχεται από σταθερό σημείο του χώρου.
- Η φ.π. είναι δυνατόν να βρίσκεται στο άπειρο και ως εκ τούτου οι φ.α. θα είναι δέσμη παράλληλων ευθειών.
- Τα αντικείμενα που θα μελετήσουμε είναι το σημείο, η ευθεία και μαζί της το ευθύγραμμο τμήμα και ο κύκλος.
- Τα αντικείμενα βρίσκονται μεταξύ της φ.π. και του επιπέδου προβολής.

- **Ορισμός:** Το σημείο τομής της ευθείας που ορίζει η φ.π. Φ και τυχαίο σημείο Μ με το επίπεδο προβολής (p), ονομάζεται σκιά του σημείου Α στο επίπεδο (p), ενώ η τομή του επιπέδου που ορίζει η φ.π. Φ και μια ευθεία (ε) με το επίπεδο προβολής (p) ονομάζεται σκιά της ευθείας (ε) στο επίπεδο (p).





Θεώρημα 1

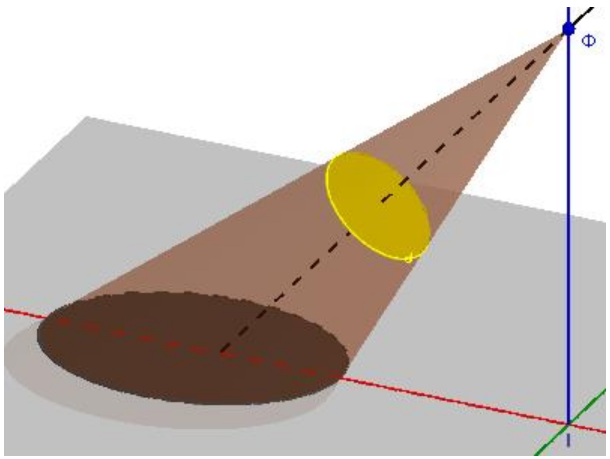
- **i)** Η σκιά ενός σημείου είναι σημείο,
- **ii)** η σκιά μιας ευθείας είναι επίσης ευθεία και
- **iii)** η σκιά ενός ευθυγράμμου τμήματος, θα είναι επίσης ευθύγραμμο τμήμα, που τα άκρα του θα καθορίζονται από τις σκιές των άκρων του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος, εκτός από την περίπτωση όπου το τμήμα είναι κάθετο στο επίπεδο (p) και η φωτεινή πηγή βρίσκεται στην ευθεία που ορίζει αυτό.

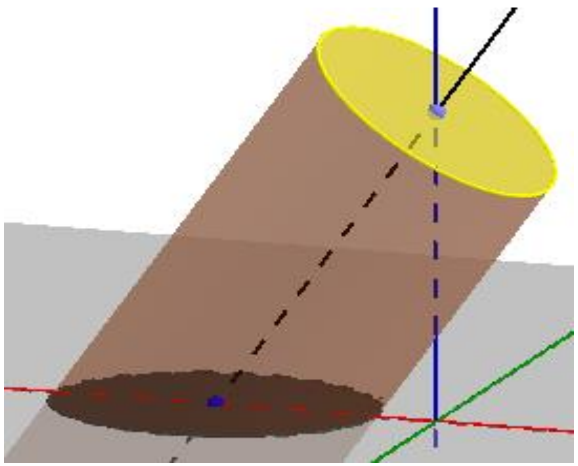
Επιπλέον, όταν η φ.π. Φ βρίσκεται σε μια μεσοκάθετη ευθεία (ε) του τμήματος ΑΒ τότε

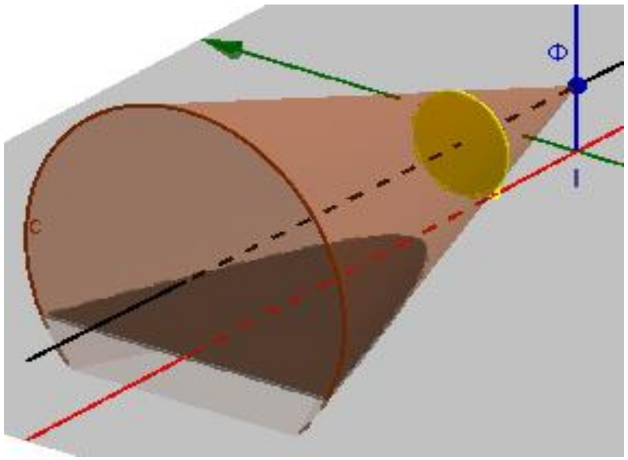
- **iv)** η (ε) γίνεται διχοτόμος για το τρίγωνο που σχηματίζει η φ.π. Φ με τη σκιά του τμήματος, Α′Β′ εκτός και αν το τμήμα ΑΒ είναι παράλληλο στο επίπεδο προβολής (p), οπότε εκτός από διχοτόμος συνεχίζει να είναι και μεσοκάθετη.
- **v)** Όταν η φ.π. βρίσκεται στο άπειρο τότε η σκιά παράλληλων τμημάτων είναι παράλληλα τμήματα.
- **vi)** Όταν η φ.π. βρίσκεται στο άπειρο τότε η σκιά του μέσου ενός τμήματος είναι το μέσο της σκιάς αυτού.

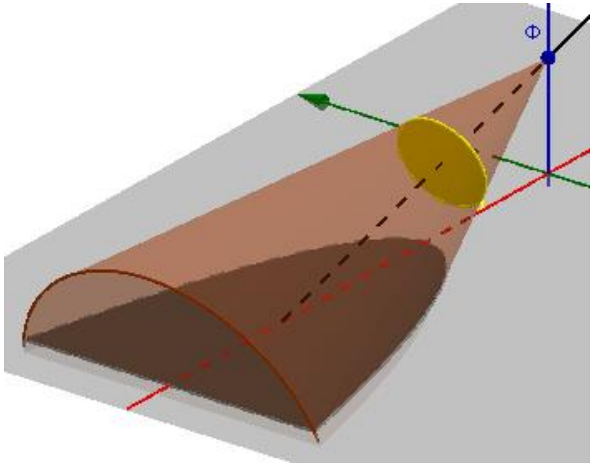
Θεώρημα 2.

- Η σκιά κυκλικού δίσκου (c) σε ένα επίπεδο προβολής (p), όταν αυτός φωτίζεται από φ.π. Φ, που βρίσκεται στην κάθετη στο επίπεδό του, στο κέντρο του, είναι μια έλλειψη (Σχήμα 1, 2) ή ο κλάδος μια υπερβολής (Σχήμα 3) ή μια παραβολή (Σχήμα 4) ή ένας κύκλος.









- **Παρατήρηση 1.** Ενδιαφέρον παρουσιάζει επεκτάσεις των δυο προηγούμενων Θεωρημάτων.

- Μια σχετική συζήτηση έχει ανοίξει στο forum των Μαθηματικών, Κωνικά:
- http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=95&t=36460 .

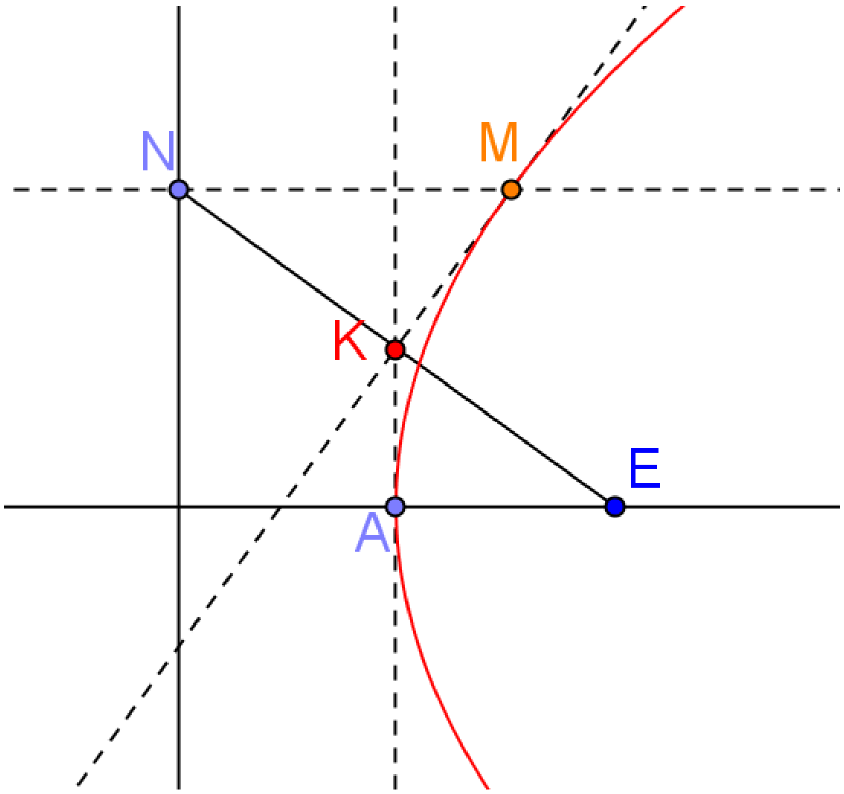
Κυρίως Πρόβλημα.

*Στις κωνικές τομές του **Θεωρήματος 2**, να προσδιοριστούν τα χαρακτηριστικά σημεία (κέντρο, εστίες) και οι χαρακτηριστικές ευθείες (άξονες, εφαπτόμενες, διευθετούσες) αυτών.*

Για τη λύση του προβλήματος θα χρειαστούμε τους ορισμούς των κωνικών και κάποια θεωρήματα.

Ορισμός 1. Ο Γεωμετρικός τόπος των σημείων,

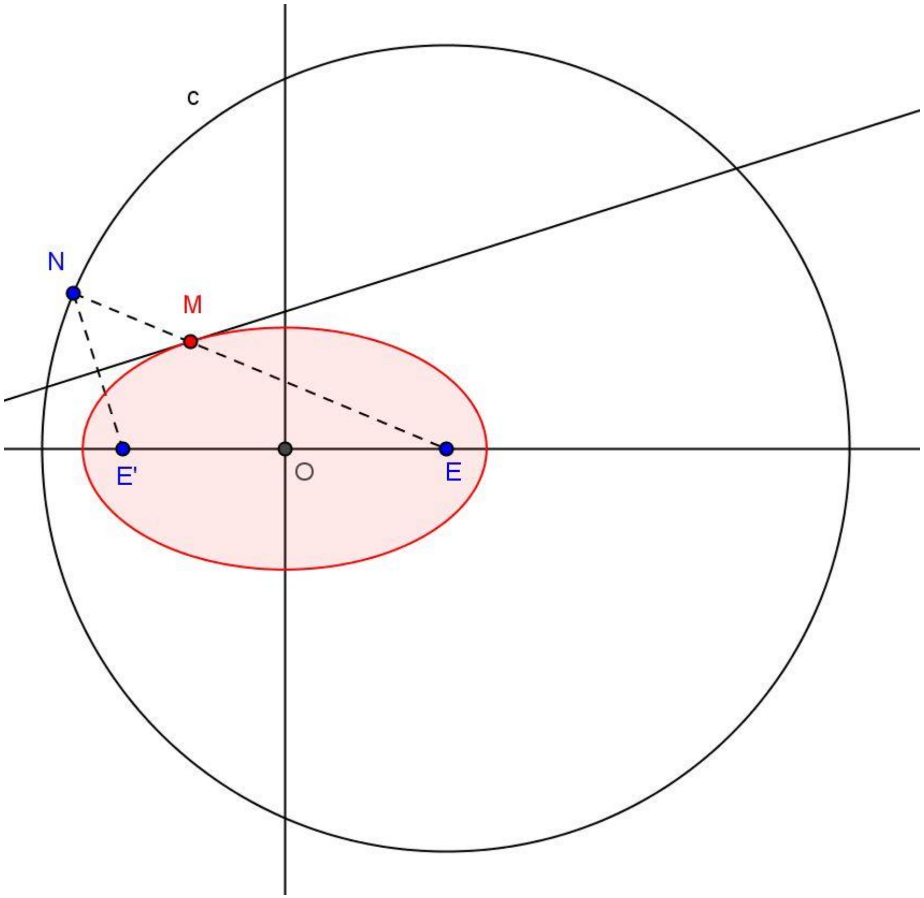
- που απέχουν εξ ίσου από μια ευθεία (δ) και ένα σημείο Ε εκτός αυτής ονομάζεται <u>Παραβολή</u>.



Για τη λύση του προβλήματος θα χρειαστούμε τους ορισμούς των κωνικών και κάποια θεωρήματα.

Ορισμός 1. Ο Γεωμετρικός τόπος των σημείων,

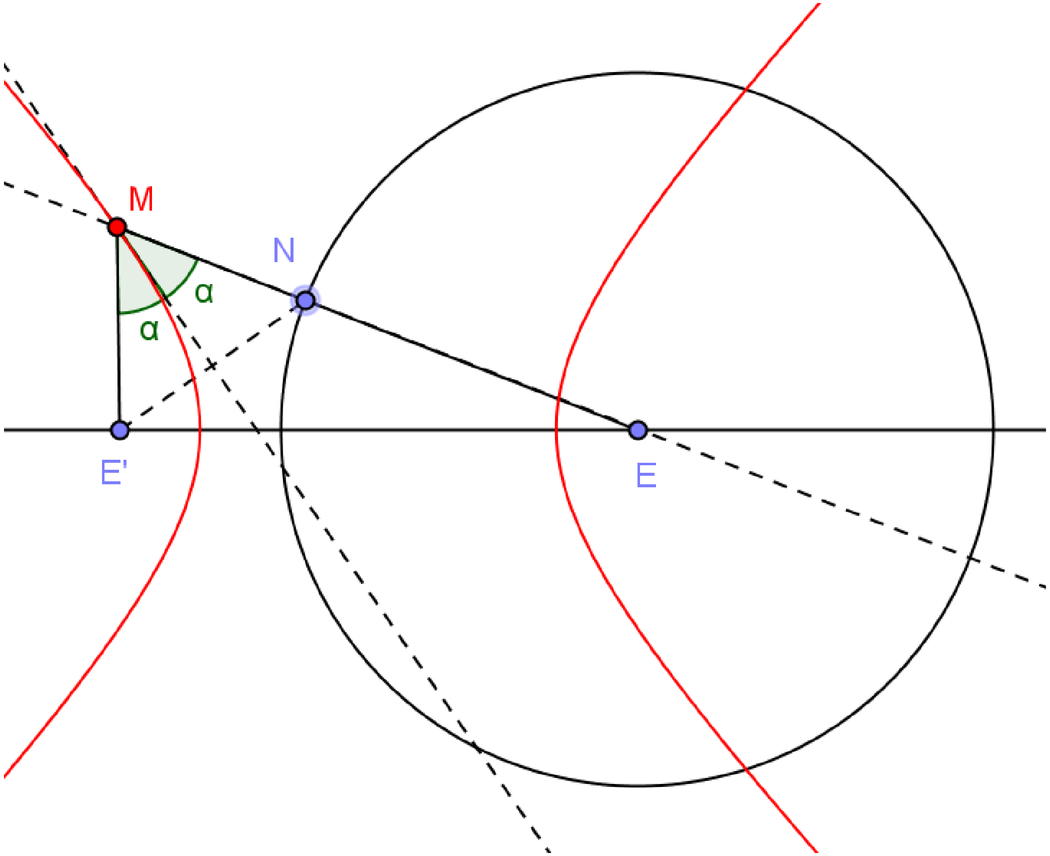
- που το άθροισμα των αποστάσεων από δυο σταθερά σημεία Ε και Ε' είναι σταθερό ονομάζεται <u>Έλλειψη</u>.



Για τη λύση του προβλήματος θα χρειαστούμε τους ορισμούς των κωνικών και κάποια θεωρήματα.

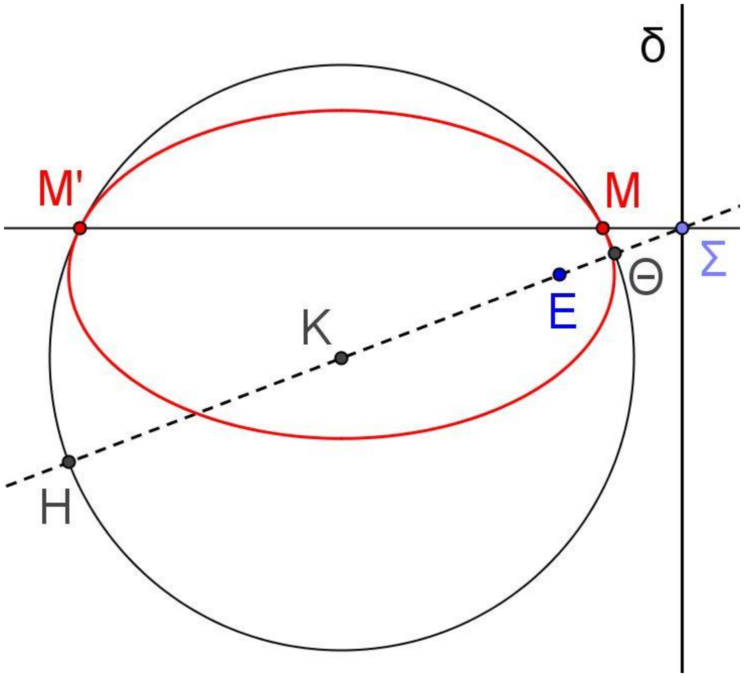
Ορισμός 1. Ο Γεωμετρικός τόπος των σημείων,

- που η διαφορά από δυο σταθερά σημεία Ε και Ε' είναι σταθερή ονομάζεται <u>Υπερβολή.</u>



Ορισμός 2. Θεωρούμε μια σταθερή ευθεία (δ) και ένα σταθερό σημείο Ε και έστω d(Μ,δ) η απόσταση τυχόντος σημείου Μ από την ευθεία (δ) και ΜΕ η απόσταση του ίδιου σημείου από το Ε. Έστω ακόμη ε ο λόγος των αποστάσεων αυτών. Τότε

- Αν ε = 1, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ ονομάζεται <u>Παραβολή</u>.
- Αν ε < 1, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ ονομάζεται <u>Έλλειψη</u>
- Αν ε > 1, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ ονομάζεται <u>Υπερβολή.</u>



Δυο χρήσιμα θεωρήματα

Θεώρημα 3. Σε μια κωνική τομή τα μέσα των χορδών βρίσκονται σε ευθεία, η οποία

- διέρχεται από το κέντρο της κωνικής, όταν αυτή είναι έλλειψη ή υπερβολή και
- είναι παράλληλη προς τον οριζόντιο άξονα, όταν αυτή είναι παραβολή.

Θεώρημα 4. Έστω (ζ′) και (ζ) οι εφαπτόμενες στην υπερβολή C, στις κορυφές A′ και A αντιστοίχως και (ε) η εφαπτομένη της υπερβολής σ′ ένα σημείο της M. Αν η (ε) τέμνει τις (ζ′) και (ζ) στα σημεία Γ και Δ, τότε ο κύκλος με διάμετρο το ΓΔ διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης

(Το ίδιο και για ελλείψεις).

Θεώρημα 3. Από το Θεώρημα των διαμέσων στο τρίγωνο ΔΕΓ

$$2\cdot \Delta\Gamma \cdot MB = E\Delta^2 - E\Gamma^2 =$$

$$\varepsilon^2(\Delta H^2 - \Gamma\Theta^2) = \varepsilon^2 \cdot \eta\mu^2\omega \cdot (\Delta\Lambda^2 - \Gamma\Lambda^2) =$$

$$\varepsilon^2 \cdot \eta\mu^2\omega(\Delta\Lambda - \Gamma\Lambda)(\Delta\Lambda + \Gamma\Lambda) =$$

$$\varepsilon^2 \cdot \eta\mu^2\omega \cdot \Gamma\Delta \cdot (\Delta M + M\Lambda + \Gamma\Lambda) \overset{\Delta M = M\Gamma}{=}$$

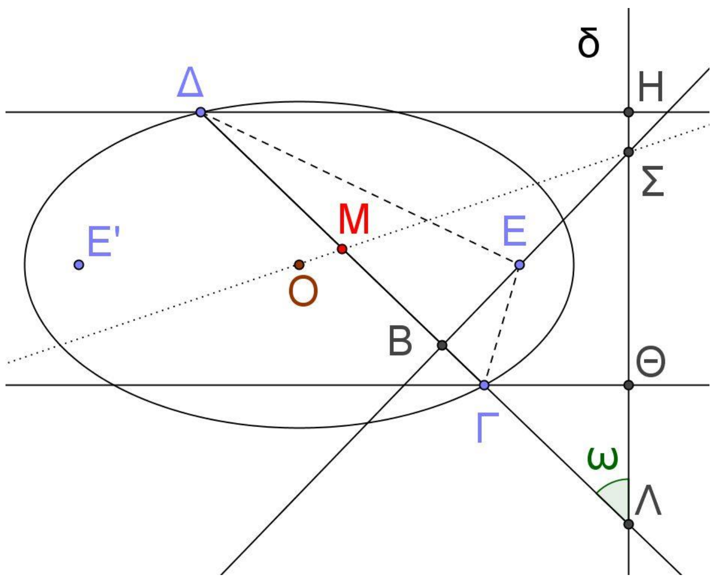
$$\varepsilon^2 \cdot \eta\mu^2\omega \cdot \Gamma\Delta \cdot (M\Lambda + M\Gamma + \Gamma\Lambda) =$$

$$\varepsilon^2 \cdot \eta\mu^2\omega \cdot \Gamma\Delta \cdot (2\cdot M\Lambda)$$

Οπότε η ΜΣ προσδιορίζεται πλήρως, αφού

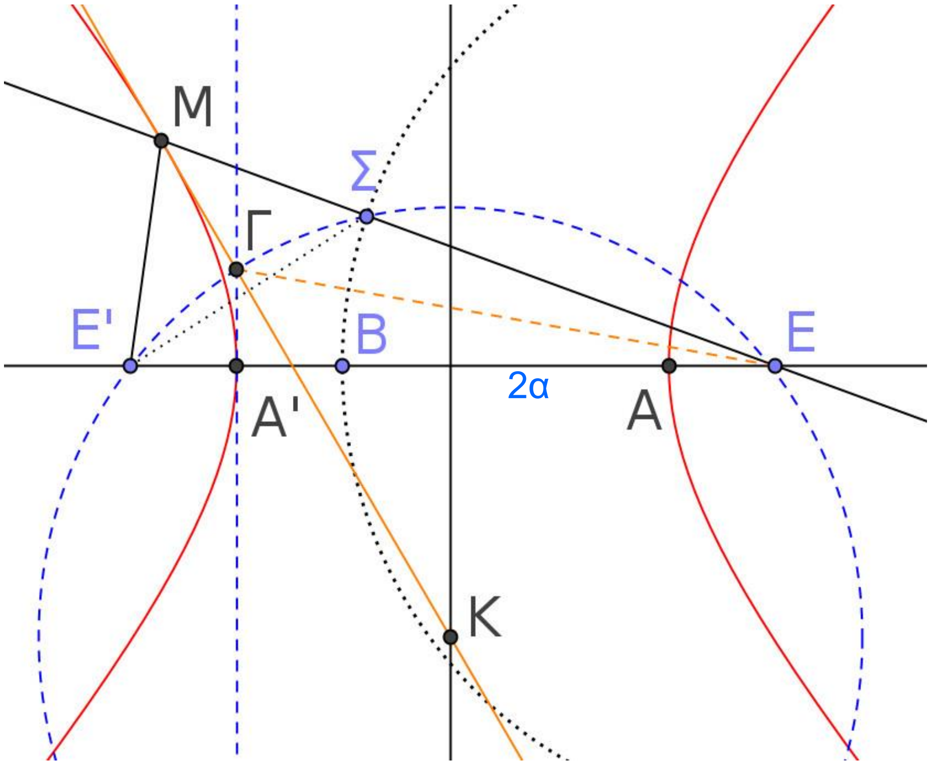
$$\frac{MB}{M\Lambda} = \varepsilon^2 \cdot \eta\mu^2\omega$$

και το Μ βρίσκεται στην τρίτη ευθεία της δέσμης που περνάει από το Ο



Θεώρημα 4.

- Έστω Κ το σημείο τομής της εφαπτομένης με τον κατακόρυφο άξονα. Έστω, επίσης ο κύκλος c=(K,KE), ο οποίος θα διέρχεται, προφανώς και από τα Ε' και Σ.
- Αφού η ΜΚ είναι μεσοκάθετη στην Ε'Σ και διχοτόμος της Ε'ΜΣ, το σημείο Γ θα είναι το μέσον του τόξου Ε'Σ και ως εκ τούτου, το σημείο τομής των διχοτόμων στο τρίγωνο ΕΕ'Μ.
- Αφού η ΕΓ διχοτομεί την ΒΕΣ, θα είναι και μεσοκάθετος της ΒΣ.
- Έτσι, το Γ θα είναι σημείο τομής των μεσοκάθετων του τριγώνου Ε'ΒΣ.
- Άρα το Γ ανήκει στην μεσοκάθετη στο Ε'Β και επομένως στην εφαπτομένη της υπερβολή στο Α'.



ΕΣ = ΕΒ = 2α, οπότε το Α′ είναι κορυφή της υπερβολής.

Η λύση στο κυρίως πρόβλημα .

- Έλλειψη
- Υπερβολή
- Παραβολή

Ευχαριστώ πολύ!

Για την προσοχή σας!