ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΠΑΡΕΚΒΟΛΗ ΣΤΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ CAYLEY

Μιχάλης Τζούμας
Σχ. Συμβ. Μαθηματικών, Ν. Αιτωλοακαρνανίας

Απόστολος Χατζηδήμος, Ομότιμος Καθηγητής Π. Ιωαννίνων και Κρήτης,Τμήμα Η/Υ Τηλ/νιών και Δικτύων Παν/μιο Θεσσαλίας

Ο μετασχηματισμός Cayley

Ορισμός:

Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, με $\det(I + A) \neq 0$, όπου I ο μοναδιαίος πίνακας τάξης n, η συνάρτηση πίνακας

$$F \equiv F(A) := (I + A)^{-1}(I - A)$$

καλείται μετασχηματισμός Cayley.

Ορισμός:

Υπό τις προϋποθέσεις του προηγούμενου Ορισμού, καλούμε Παρεκβαλλόμενο Μετασχηματισμό Cayley, με παράμετρο $\omega \neq 0$, τη συνάρτηση πίνακα

$$F_\omega \equiv F(\omega A) := (I + \omega A)^{-1}(I - \omega A), \ \omega \in \mathbb{C}, \det(I + \omega A) \neq 0$$

Ο μετασχηματισμός Cayley

Ορισμός:

Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, με $\det(I + A) \neq 0$, όπου I ο μοναδιαίος πίνακας τάξης n, η συνάρτηση πίνακας

$$F \equiv F(A) := (I + A)^{-1}(I - A)$$

καλείται μετασχηματισμός Cayley.

Ορισμός:

Υπό τις προϋποθέσεις του προηγούμενου Ορισμού, καλούμε Παρεκβαλλόμενο Μετασχηματισμό Cayley, με παράμετρο $\omega \neq 0$, τη συνάρτηση πίνακα

$$F_\omega \equiv F(\omega A) := (I + \omega A)^{-1}(I - \omega A), \;\; \omega \in \mathbb{C}, \det(I + \omega A) \neq 0$$

Εφαρμογές

Οι παραπάνω μετασχηματισμοί και η αντίστοιχη σχέση των ιδιοτιμών τους μπορούν να εμφανιστούν σε ένα μεγάλο πλήθος επίλυσης προβλημάτων όπως:

- Linear Complementarity Problem (Όταν το λύνουμε με τον Αλγόριθμο του van Bokhoven [1981]).
  - Μαθηματικός Προγραμματισμός.
  - Θεωρεία Παιγνίων.
  - Παραβολικές Μ.Δ.Ε. (με ελεύθερα σύνορα)
  - Παραβολικές Μ.Δ.Ε. (με κινητά σύνορα)
- Στον καθορισμό των βέλτιστων παραμέτρων σε κλασσικές ADI επαναληπτικές μεθόδους(ε.μ.) για τη λύση Γραμμικών Συστημάτων, που προέρχονται από Ελλειπτικές Μ.Δ.Ε.
- Στην επίλυση Μιγαδικών Γραμμικών Συστημάτων με μια ADI ε.μ. χρησιμοποιώντας α)Hermitian/Skew Hermitian Splitting που εισήχθηκαν από τους Bai, Golub and Ng [2003] ή β) Normal/Skew Hermitian Splitting που εισήχθηκαν από τους ίδιους [2006].

Εφαρμογές

Οι παραπάνω μετασχηματισμοί και η αντίστοιχη σχέση των ιδιοτιμών τους μπορούν να εμφανιστούν σε ένα μεγάλο πλήθος επίλυσης προβλημάτων όπως:

- Linear Complementarity Problem (Όταν το λύνουμε με τον Αλγόριθμο του van Bokhoven [1981]).
  - Μαθηματικός Προγραμματισμός.
  - Θεωρεία Παιγνίων.
  - Παραβολικές Μ.Δ.Ε. (με ελεύθερα σύνορα)
  - Παραβολικές Μ.Δ.Ε. (με κινητά σύνορα)
- Στον καθορισμό των βέλτιστων παραμέτρων σε κλασσικές ADI επαναληπτικές μεθόδους(ε.μ.) για τη λύση Γραμμικών Συστημάτων, που προέρχονται από Ελλειπτικές Μ.Δ.Ε.
- Στην επίλυση Μιγαδικών Γραμμικών Συστημάτων με μια ADI ε.μ. χρησιμοποιώντας α)Hermitian/Skew Hermitian Splitting που εισήχθηκαν από τους Bai, Golub and Ng [2003] ή β) Normal/Skew Hermitian Splitting που εισήχθηκαν από τους ίδιους [2006].

Εφαρμογές

Οι παραπάνω μετασχηματισμοί και η αντίστοιχη σχέση των ιδιοτιμών τους μπορούν να εμφανιστούν σε ένα μεγάλο πλήθος επίλυσης προβλημάτων όπως:

- Linear Complementarity Problem (Όταν το λύνουμε με τον Αλγόριθμο του van Bokhoven [1981]).
  - Μαθηματικός Προγραμματισμός.
  - Θεωρεία Παιγνίων.
  - Παραβολικές Μ.Δ.Ε. (με ελεύθερα σύνορα)
  - Παραβολικές Μ.Δ.Ε. (με κινητά σύνορα)
- Στον καθορισμό των βέλτιστων παραμέτρων σε κλασσικές ADI επαναληπτικές μεθόδους(ε.μ.) για τη λύση Γραμμικών Συστημάτων, που προέρχονται από Ελλειπτικές Μ.Δ.Ε.
- Στην επίλυση Μιγαδικών Γραμμικών Συστημάτων με μια ADI ε.μ. χρησιμοποιώντας α)Hermitian/Skew Hermitian Splitting που εισήχθηκαν από τους Bai, Golub and Ng [2003] ή β) Normal/Skew Hermitian Splitting που εισήχθηκαν από τους ίδιους [2006].

Εφαρμογές

Οι παραπάνω μετασχηματισμοί και η αντίστοιχη σχέση των ιδιοτιμών τους μπορούν να εμφανιστούν σε ένα μεγάλο πλήθος επίλυσης προβλημάτων όπως:

- Linear Complementarity Problem (Όταν το λύνουμε με τον Αλγόριθμο του van Bokhoven [1981]).
  - Μαθηματικός Προγραμματισμός.
  - Θεωρεία Παιγνίων.
  - Παραβολικές Μ.Δ.Ε. (με ελεύθερα σύνορα)
  - Παραβολικές Μ.Δ.Ε. (με κινητά σύνορα)
- Στον καθορισμό των βέλτιστων παραμέτρων σε κλασσικές ADI επαναληπτικές μεθόδους(ε.μ.) για τη λύση Γραμμικών Συστημάτων, που προέρχονται από Ελλειπτικές Μ.Δ.Ε.
- Στην επίλυση Μιγαδικών Γραμμικών Συστημάτων με μια ADI ε.μ. χρησιμοποιώντας α)Hermitian/Skew Hermitian Splitting που εισήχθηκαν από τους Bai, Golub and Ng [2003] ή β) Normal/Skew Hermitian Splitting που εισήχθηκαν από τους ίδιους [2006].

Το πρόβλημα και η βελτιστοποίηση της λύσης

Ουσιαστικά έχουμε

- Ένα σύστημα $Bx = b$ με $B \in \mathbb{C}^{n,n}$, $b \in \mathbb{C}^n$.
- Η λύση με μια ε.μ. δίνει έναν επαναληπτικός πίνακας $F_\omega(A)$ με φάσμα ιδιοτιμών $\sigma(F_\omega(A))$.
- Η φασματική ακτίνα $\rho(F_\omega(A)) = \max_{a_i \in \sigma(A)} \left|\frac{1-\omega a_i}{1+\omega a_i}\right| (< 1)$ εξασφαλίζει τη σύγκλιση.
- Η βελτιστοποίηση της λύσης επιτυγχάνεται με τη λύση του προβλήματος

Πρόβλημα:

Να προσδιοριστεί η «βέλτιστη» τιμή της παραμέτρου ω, η οποία επιλύει το πρόβλημα

$$\min_{\omega} \rho(F_\omega) = \min_{\omega} \max_{a_i \in \sigma(A)} \left| \frac{1-\omega a_i}{1+\omega a_i} \right|$$

Το πρόβλημα και η βελτιστοποίηση της λύσης

Ουσιαστικά έχουμε

- Ένα σύστημα $Bx = b$ με $B \in \mathbb{C}^{n,n}$, $b \in \mathbb{C}^n$.
- Η λύση με μια ε.μ. δίνει έναν επαναληπτικός πίνακας $F_\omega(A)$ με φάσμα ιδιοτιμών $\sigma(F_\omega(A))$.
- Η φασματική ακτίνα $\rho(F_\omega(A)) = \max_{a_i \in \sigma(A)} \left| \frac{1-\omega a_i}{1+\omega a_i} \right| (< 1)$ εξασφαλίζει τη σύγκλιση.
- Η βελτιστοποίηση της λύσης επιτυγχάνεται με τη λύση του προβλήματος

Πρόβλημα:

Να προσδιοριστεί η «βέλτιστη» τιμή της παραμέτρου ω, η οποία επιλύει το πρόβλημα

$$\min_{\omega} \rho(F_\omega) = \min_{\omega} \max_{a_i \in \sigma(A)} \left| \frac{1-\omega a_i}{1+\omega a_i} \right|$$

Το πρόβλημα και η βελτιστοποίηση της λύσης

Ουσιαστικά έχουμε

- Ένα σύστημα $Bx = b$ με $B \in \mathbb{C}^{n,n}$, $b \in \mathbb{C}^n$.
- Η λύση με μια ε.μ. δίνει έναν επαναληπτικός πίνακας $F_\omega(A)$ με φάσμα ιδιοτιμών $\sigma(F_\omega(A))$.
- Η φασματική ακτίνα $\rho(F_\omega(A)) = \max_{a_i \in \sigma(A)} \left|\frac{1-\omega a_i}{1+\omega a_i}\right| (< 1)$ εξασφαλίζει τη σύγκλιση.
- Η βελτιστοποίηση της λύσης επιτυγχάνεται με τη λύση του προβλήματος

Πρόβλημα:

Να προσδιοριστεί η «βέλτιστη» τιμή της παραμέτρου ω, η οποία επιλύει το πρόβλημα

$$\min_{\omega} \rho(F_\omega) = \min_{\omega} \max_{a_i \in \sigma(A)} \left| \frac{1-\omega a_i}{1+\omega a_i} \right|$$

Το πρόβλημα και η βελτιστοποίηση της λύσης

Ουσιαστικά έχουμε

- Ένα σύστημα $Bx = b$ με $B \in \mathbb{C}^{n,n}$, $b \in \mathbb{C}^n$.
- Η λύση με μια ε.μ. δίνει έναν επαναληπτικός πίνακας $F_\omega(A)$ με φάσμα ιδιοτιμών $\sigma(F_\omega(A))$.
- Η φασματική ακτίνα $\rho(F_\omega(A)) = \max_{a_i \in \sigma(A)} \left|\frac{1-\omega a_i}{1+\omega a_i}\right| (< 1)$ εξασφαλίζει τη σύγκλιση.
- Η βελτιστοποίηση της λύσης επιτυγχάνεται με τη λύση του προβλήματος

Πρόβλημα:

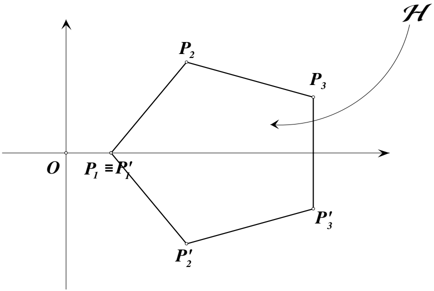
Να προσδιοριστεί η «βέλτιστη» τιμή της παραμέτρου ω, η οποία επιλύει το πρόβλημα

$$\min_{\omega} \rho(F_\omega) = \min_{\omega} \max_{a_i \in \sigma(A)} \left|\frac{1-\omega a_i}{1+\omega a_i}\right|$$

Η γενίκευση: Από το διακριτό στο συνεχές

Ορισμός:

Δίνεται ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ και έστω $\sigma(A)$ το φάσμα των ιδιοτιμών του. Καλούμε κλειστή κυρτή θήκη $\mathcal{H}$ του διακριτού συνόλου $\sigma(A)$ το μικρότερο κλειστό κυρτό πολύγωνο που περιέχει το $\sigma(A)$ στο εσωτερικό του.



Σχήμα: *Το κλειστό πολύγωνο στο μιγαδικό επίπεδο με ευσταθή* $A \in \mathbb{R}^{n,n}$

Η συνάρτηση και η αντίστροφή της

$$w := w(a) = \frac{1-\omega a}{1+\omega a} \Leftrightarrow w^{-1}(w(a)) = a = \frac{1-w}{\omega(1+w)},\ a \in \mathcal{H},\ \omega > 0^{\ddagger}$$

- Οι δυο συναρτήσεις είναι μετασχηματισμοί Möbius.
- Καμιά δεν έχει πόλους, έχοντας το $\omega > 0$, αφού $Re\, a > 0$.
- Καμιά δεν είναι η σταθερή συνάρτηση, αφού ισχύει $\det\begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ 1 & \omega \end{pmatrix} > 0$ και $\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \omega & \omega \end{pmatrix} > 0$.

‡Αφου $|w|^2 = \frac{1-\omega(a+\bar{a})+|a|^2}{1+\omega(a+\bar{a})+|a|^2}$, το ω επιλέγεται θετικό, ώστε $|w| < 1$.

Η συνάρτηση και η αντίστροφή της

$$w := w(a) = \frac{1-\omega a}{1+\omega a} \Leftrightarrow w^{-1}(w(a)) = a = \frac{1-w}{\omega(1+w)},\ a \in \mathcal{H},\ \omega > 0^{\ddagger}$$

- Οι δυο συναρτήσεις είναι μετασχηματισμοί Möbius.
- Καμιά δεν έχει πόλους, έχοντας το $\omega > 0$, αφού $Re\, a > 0$.
- Καμιά δεν είναι η σταθερή συνάρτηση, αφού ισχύει $\det\begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ 1 & \omega \end{pmatrix} > 0$ και $\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \omega & \omega \end{pmatrix} > 0$.

‡Αφου $|w|^2 = \frac{1-\omega(a+\bar{a})+|a|^2}{1+\omega(a+\bar{a})+|a|^2}$, το ω επιλέγεται θετικό, ώστε $|w| < 1$.

Η συνάρτηση και η αντίστροφή της

$$w := w(a) = \frac{1-\omega a}{1+\omega a} \Leftrightarrow w^{-1}(w(a)) = a = \frac{1-w}{\omega(1+w)},\ a \in \mathcal{H},\ \omega > 0^{\ddagger}$$

- Οι δυο συναρτήσεις είναι μετασχηματισμοί Möbius.
- Καμιά δεν έχει πόλους, έχοντας το $\omega > 0$, αφού $Re\, a > 0$.
- Καμιά δεν είναι η σταθερή συνάρτηση, αφού ισχύει $\det\begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ 1 & \omega \end{pmatrix} > 0$ και $\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \omega & \omega \end{pmatrix} > 0$.

‡Αφου $|w|^2 = \frac{1-\omega(a+\bar{a})+|a|^2}{1+\omega(a+\bar{a})+|a|^2}$, το ω επιλέγεται θετικό, ώστε $|w| < 1$.

Η συνάρτηση και η αντίστροφή της

Ο μετασχηματισμός Möbius μετασχηματίζει κύκλο σε κύκλο και κυκλικό δίσκο σε κυκλικό δίσκο.

Έτσι ξεκινώντας με $\omega > 0$ και τον κύκλο $\mathcal{C}_\omega(\supset w(\mathcal{H}))$ με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho < 1$, διαδοχικά όπως φαίνεται παρακάτω καταλήγουμε στο κύκλο $\mathcal{C}(\supset \mathcal{H})$ με κέντρο $K(c,0)$ και ακτίνα R

Ο Μετασχηματισμός

$$
\begin{aligned}
|w| = \rho \Leftrightarrow w\overline{w} = \rho^2 \\
&\Leftrightarrow \frac{1-\omega a}{1+\omega a}\cdot\frac{1-\omega\bar{a}}{1+\omega\bar{a}} = \rho^2 \\
&\Leftrightarrow \omega^2(1-\rho^2)a\bar{a} - \omega(1+\rho^2)(a+\bar{a}) + (1-\rho^2) = 0 \\
&\Leftrightarrow a\bar{a} - \frac{1+\rho^2}{\omega(1-\rho^2)}(a+\bar{a}) + \frac{1}{\omega^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow a\bar{a} - \frac{1+\rho^2}{\omega(1-\rho^2)}(a+\bar{a}) + \left(\frac{1+\rho^2}{\omega(1-\rho^2)}\right)^2 \\
&\qquad = \left(\frac{1+\rho^2}{\omega(1-\rho^2)}\right)^2 - \frac{1}{\omega^2}
\end{aligned}
$$

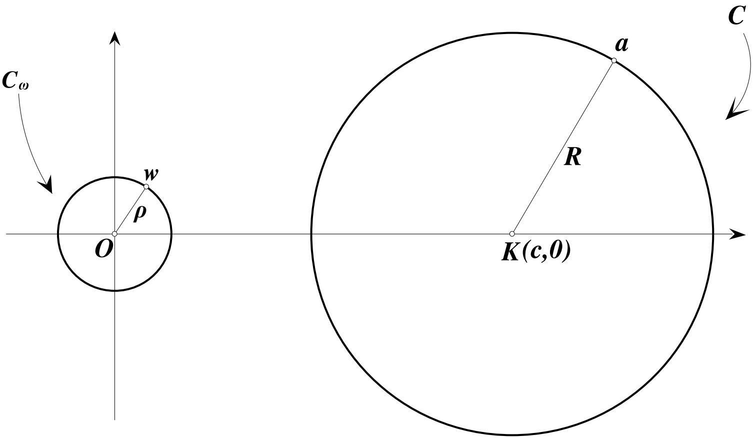
Ο Μετασχηματισμός

$$\Leftrightarrow \left| a - \frac{1+\rho^2}{\omega(1-\rho^2)} \right|^2 = \left(\frac{2\rho}{\omega(1-\rho^2)} \right)^2$$
$$\Leftrightarrow \left| a - \frac{1+\rho^2}{\omega(1-\rho^2)} \right| = \left(\frac{2\rho}{\omega(1-\rho^2)} \right)$$
$$\Leftrightarrow |a - c| = R$$

όπου

$$c := \frac{1+\rho^2}{\omega(1-\rho^2)} \quad \text{και} \quad R := \frac{2\rho}{\omega(1-\rho^2)}.$$

Ο Μετασχηματισμός



Σχήμα: *Η αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του* C_ω *στον* C

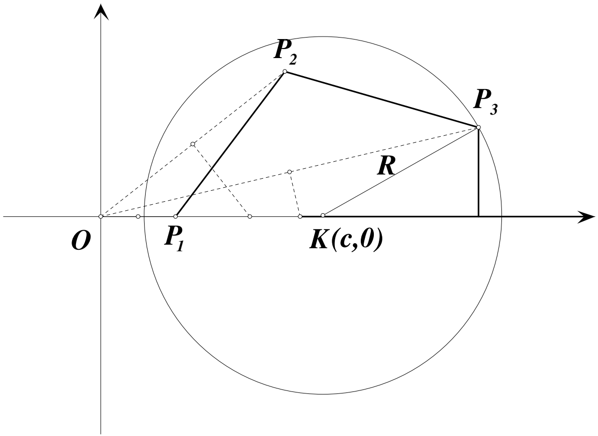
Ο περικλείων κύκλος (π.κ.)

Ορισμός:

Έστω ο $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ευσταθής, $\sigma(A)$ το φάσμα των ιδιοτιμών του και $\mathcal{H}$ η κλειστή θήκη του $\sigma(A)$. Κάθε κύκλος $\mathcal{C}$ που ικανοποιεί τις παρακάτω τέσσερις ιδιότητες θα καλείται περικλείων (π.κ.) της $\mathcal{H}$.

1. Το κέντρο του κύκλου $K(c, 0)$ βρίσκεται στο θετικό ημιάξονα.
2. Ο κύκλος βρίσκεται στο δεξιό ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου, δηλ. $R < c$.
3. Ο κύκλος περιέχει στο εσωτερικό του την κλειστή θήκη του $\mathcal{H}$.
4. Ο κύκλος διέρχεται από μια κορυφή της κλειστής θήκης του $\mathcal{H}$.

Ο περικλείων κύκλος (π.κ.)



Σχήμα: *Ένας από τους π.κ. της* $\mathcal{C}$

Ο περικλείων κύκλος (π.κ.)

Θεώρημα

Για ένα κλειστό κυρτό πολύγωνο $\mathcal{H}$, που είναι συμμετρικό ως προς το θετικό πραγματικό ημιάξονα, υπάρχουν άπειροι π.κ..

Αφού

$$\min_{\omega>0}\max_{a\in\mathcal{H}}\left|\frac{1-\omega a}{1+\omega a}\right| = \min_{\omega>0}\max_{a\in\mathcal{H}}|w(a)| = \min_{\omega>0}\rho = \min_{\omega>0}\rho(w(\mathcal{C})) =$$

$$\min_{\omega>0}\max_{a\in\sigma(A)}|w(a_i)| = \min_{\omega>0}\max_{a\in\sigma(A)}\left|\frac{1-\omega a_i}{1+\omega a_i}\right| = \min_{\omega>0}\rho(F_\omega)$$

Θεώρημα

Το αρχικό πρόβλημα είναι ισοδύναμο του $\min_{\omega>0}\rho(F_\omega)$.

Ο βέλτιστος π.κ.

- Από το τελευταίο Θεώρημα φαίνεται ότι το πρόβλημα επιλύεται όταν βρούμε εκείνον το κύκλο που περικλείει το $\mathcal{H}$ και μας δίνει το ελάχιστο ρ, δηλ. το **βέλτιστο** π.κ..
- Εκείνο, λοιπόν, που έχουμε να κάνουμε είναι να βρούμε τα R και c που μας δίνουν το ελάχιστο ρ και το ω.
- Εύκολα, από τα προηγούμενα, προκύπτει ότι

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{c^2 - R^2}}, \quad \rho = \frac{R}{c + \sqrt{c^2 - R^2}} = \frac{\frac{R}{c}}{1 + \sqrt{1 - (\frac{R}{c})^2}}.$$

Ο βέλτιστος π.κ.

- Από το τελευταίο Θεώρημα φαίνεται ότι το πρόβλημα επιλύεται όταν βρούμε εκείνον το κύκλο που περικλείει το $\mathcal{H}$ και μας δίνει το ελάχιστο ρ, δηλ. το **βέλτιστο** π.κ..
- Εκείνο, λοιπόν, που έχουμε να κάνουμε είναι να βρούμε τα R και c που μας δίνουν το ελάχιστο ρ και το ω.
- Εύκολα, από τα προηγούμενα, προκύπτει ότι

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{c^2 - R^2}}, \quad \rho = \frac{R}{c + \sqrt{c^2 - R^2}} = \frac{\frac{R}{c}}{1 + \sqrt{1 - (\frac{R}{c})^2}}.$$

Ο βέλτιστος π.κ.

- Από το τελευταίο Θεώρημα φαίνεται ότι το πρόβλημα επιλύεται όταν βρούμε εκείνον το κύκλο που περικλείει το $\mathcal{H}$ και μας δίνει το ελάχιστο ρ, δηλ. το **βέλτιστο** π.κ..
- Εκείνο, λοιπόν, που έχουμε να κάνουμε είναι να βρούμε τα R και c που μας δίνουν το ελάχιστο ρ και το ω.
- Εύκολα, από τα προηγούμενα, προκύπτει ότι

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{c^2 - R^2}}, \quad \rho = \frac{R}{c + \sqrt{c^2 - R^2}} = \frac{\frac{R}{c}}{1 + \sqrt{1 - (\frac{R}{c})^2}}.$$

Ο βέλτιστος π.κ.

Λήμμα:

Η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$$

είναι συνεχώς αύξουσα στο διάστημα $[0,1)$. *Επίσης, για κάθε* $x \in [d,e] \subset [0,1)$, *η* $f(x)$ *λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της στο αριστερό άκρο του διαστήματος* $x = d$.

Θεώρημα

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ *θετικά ευσταθής. Η λύση του αρχικού προβλήματος με τους μέχρις εδώ περιορισμούς είναι ισοδύναμη με τη λύση του προβλήματος της εύρεσης του βέλτιστου π.κ. από την ελαχιστοποίηση του λόγου* $\frac{R}{c}$.

Ο βέλτιστος π.κ.

Λήμμα:

Η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$$

είναι συνεχώς αύξουσα στο διάστημα $[0,1)$. *Επίσης, για κάθε* $x \in [d,e] \subset [0,1)$, *η* $f(x)$ *λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της στο αριστερό άκρο του διαστήματος* $x = d$.

Θεώρημα

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ *θετικά ευσταθής. Η λύση του αρχικού προβλήματος με τους μέχρις εδώ περιορισμούς είναι ισοδύναμη με τη λύση του προβλήματος της εύρεσης του βέλτιστου π.κ. από την ελαχιστοποίηση του λόγου* $\frac{R}{c}$.

Τα νέα δεδομένα...

- Έστω $P_i(\beta_i, \gamma_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$ με $\beta_i < \beta_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$.
- Έστω P_j το σημείο από το οποίο διέρχεται ο βέλτιστος π.κ. (K, R) με $K(c, 0)$ και $R = KP_j$, οπότε μας ενδιαφέρει η ελαχιστοποίηση του λόγου $\frac{KP_j}{KO}$, του άγνωστου σημείου K.
- Όμως ο λόγος των αποστάσεων ενός σημείου από δυο άλλα σταθερά σημεία θυμίζει Απολλώνιο Κύκλο(Α.κ.).

Τα νέα δεδομένα...

- Έστω $P_i(\beta_i, \gamma_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$ με $\beta_i < \beta_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, k-1$.
- Έστω P_j το σημείο από το οποίο διέρχεται ο βέλτιστος π.κ. (K, R) με $K(c, 0)$ και $R = KP_j$, οπότε μας ενδιαφέρει η ελαχιστοποίηση του λόγου $\frac{KP_j}{KO}$, του άγνωστου σημείου K.
- Όμως ο λόγος των αποστάσεων ενός σημείου από δυο άλλα σταθερά σημεία θυμίζει Απολλώνιο Κύκλο(Α.κ.).

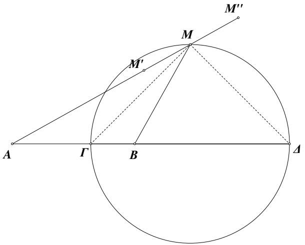
Τα νέα δεδομένα...

- Έστω $P_i(\beta_i, \gamma_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$ με $\beta_i < \beta_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$.
- Έστω P_j το σημείο από το οποίο διέρχεται ο βέλτιστος π.κ. (K, R) με $K(c, 0)$ και $R = KP_j$, οπότε μας ενδιαφέρει η ελαχιστοποίηση του λόγου $\frac{KP_j}{KO}$, του άγνωστου σημείου K.
- Όμως ο λόγος των αποστάσεων ενός σημείου από δυο άλλα σταθερά σημεία θυμίζει Απολλώνιο Κύκλο(Α.κ.).

Ο Απολλώνιος κύκλος

Θεώρημα

Ο Γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου M, *που οι αποστάσεις τους από δυο γνωστά σημεία* A, B *αυτού έχουν λόγο* $\lambda = \frac{MB}{MA}$, *είναι κύκλος με διάμετρο* $\Gamma\Delta$, *όπου τα* Γ *και* Δ *είναι τα συζυγή αρμονικά των* A *και* B.



Σχήμα: *Ο Απολλώνιος κύκλος*

Τι θα δούμε...

Θα εξετάσουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις που μας δίνουν βέλτιστο π.κ. και θα δείξουμε ότι αυτός μπορεί να προκύψει:

- από ένα σημείο στο πρώτο τεταρτημόριο (Ουσιαστικά το φάσμα θα είναι ευθύγραμμο τμήμα).
- από δυο σημεία στο πρώτο τεταρτημόριο (Ουσιαστικά το φάσμα θα είναι τραπέζιο).

Επίσης

1. Από τρία ή περισσότερα σημεία στο πρώτο τεταρτημόριο αναγόμαστε σε μια από τις προηγούμενες καταστάσεις.
2. Ο βέλτιστος π.κ. είναι μοναδικός.
3. Θα δώσουμε τον αλγόριθμος εύρεσης.

Τι θα δούμε...

Θα εξετάσουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις που μας δίνουν βέλτιστο π.κ. και θα δείξουμε ότι αυτός μπορεί να προκύψει:

- από ένα σημείο στο πρώτο τεταρτημόριο (Ουσιαστικά το φάσμα θα είναι ευθύγραμμο τμήμα).
- από δυο σημεία στο πρώτο τεταρτημόριο (Ουσιαστικά το φάσμα θα είναι τραπέζιο).

Επίσης

1. Από τρία ή περισσότερα σημεία στο πρώτο τεταρτημόριο αναγόμαστε σε μια από τις προηγούμενες καταστάσεις.
2. Ο βέλτιστος π.κ. είναι μοναδικός.
3. Θα δώσουμε τον αλγόριθμος εύρεσης.

Τι θα δούμε...

Θα εξετάσουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις που μας δίνουν βέλτιστο π.κ. και θα δείξουμε ότι αυτός μπορεί να προκύψει:

- από ένα σημείο στο πρώτο τεταρτημόριο (Ουσιαστικά το φάσμα θα είναι ευθύγραμμο τμήμα).
- από δυο σημεία στο πρώτο τεταρτημόριο (Ουσιαστικά το φάσμα θα είναι τραπέζιο).

Επίσης

1. Από τρία ή περισσότερα σημεία στο πρώτο τεταρτημόριο αναγόμαστε σε μια από τις προηγούμενες καταστάσεις.
2. Ο βέλτιστος π.κ. είναι μοναδικός.
3. Θα δώσουμε τον αλγόριθμος εύρεσης.

Τι θα δούμε...

Θα εξετάσουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις που μας δίνουν βέλτιστο π.κ. και θα δείξουμε ότι αυτός μπορεί να προκύψει:

- από ένα σημείο στο πρώτο τεταρτημόριο (Ουσιαστικά το φάσμα θα είναι ευθύγραμμο τμήμα).
- από δυο σημεία στο πρώτο τεταρτημόριο (Ουσιαστικά το φάσμα θα είναι τραπέζιο).

Επίσης

1. Από τρία ή περισσότερα σημεία στο πρώτο τεταρτημόριο αναγόμαστε σε μια από τις προηγούμενες καταστάσεις.
2. Ο βέλτιστος π.κ. είναι μοναδικός.
3. Θα δώσουμε τον αλγόριθμος εύρεσης.

Τι θα δούμε...

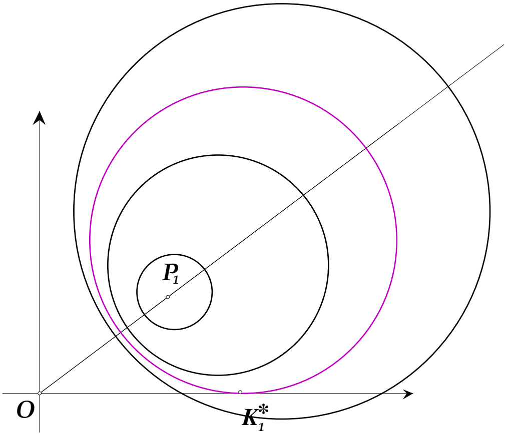
Θα εξετάσουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις που μας δίνουν βέλτιστο π.κ. και θα δείξουμε ότι αυτός μπορεί να προκύψει:

- από ένα σημείο στο πρώτο τεταρτημόριο (Ουσιαστικά το φάσμα θα είναι ευθύγραμμο τμήμα).
- από δυο σημεία στο πρώτο τεταρτημόριο (Ουσιαστικά το φάσμα θα είναι τραπέζιο).

Επίσης

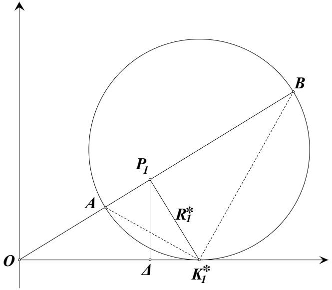
1. Από τρία ή περισσότερα σημεία στο πρώτο τεταρτημόριο αναγόμαστε σε μια από τις προηγούμενες καταστάσεις.
2. Ο βέλτιστος π.κ. είναι μοναδικός.
3. Θα δώσουμε τον αλγόριθμος εύρεσης.

$k = 1$



Σχήμα: *Απολλώνιοι κύκλοι των σημείων* P_1 *και* O *για διάφορες τιμές του* $\lambda < 1$

Προσδιορίζοντας το $K(c, 0)$

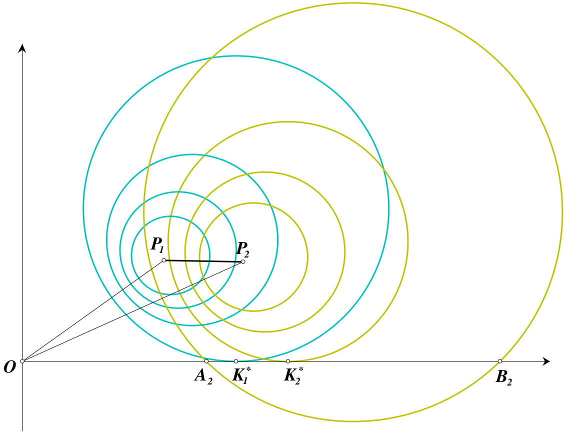


Σχήμα: *Προσδιορισμός του* $K_1^*(c_1^*, 0)$

Εύκολα με Αναλυτική Γεωμετρία βρίσκουμε

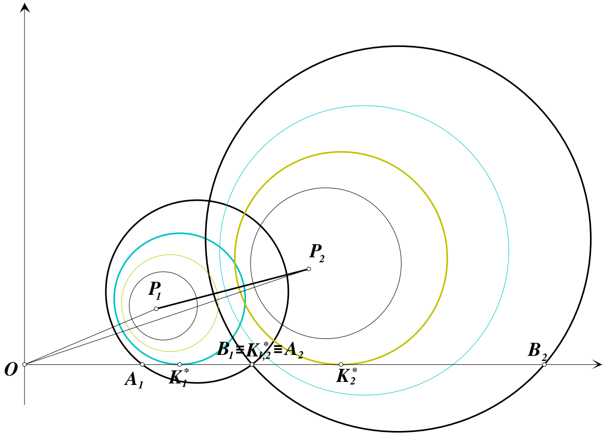
$$c_1^* = \frac{\beta_1^2 + \gamma_1^2}{\beta_1} \quad \text{και} \quad R_1^* = \frac{\gamma_1 \sqrt{\beta_1^2 + \gamma_1^2}}{\beta_1}$$

$k = 2$



Σχήμα: *Απολλώνιοι κύκλοι των δυο σημείων* P_1 *και* P_2 *για διάφορες τιμές του* $\lambda < 1$*, α' περίπτωση*

$k = 2$



Σχήμα: *Απολλώνιοι κύκλοι των δυο σημείων P_1 και P_2 για διάφορες τιμές του* $\lambda < 1$, β′ περίπτωση

$k = 2$

Χρησιμοποιώντας στοιχειώδη Αναλυτική Γεωμετρία βρίσκουμε

$$c^*_{1,2} = \frac{(\beta_2^2 + \gamma_2^2) - (\beta_1^2 + \gamma_1^2)}{2(\beta_2 - \beta_1)},$$

$$R^*_{1,2} = \frac{\sqrt{[(\beta_2^2 + \gamma_2^2) - (\beta_1^2 + \gamma_1^2) - 2\beta_1\beta_2]^2 - 4\gamma_1^2\gamma_2^2}}{2(\beta_2 - \beta_1)}$$

$k \geq 3$

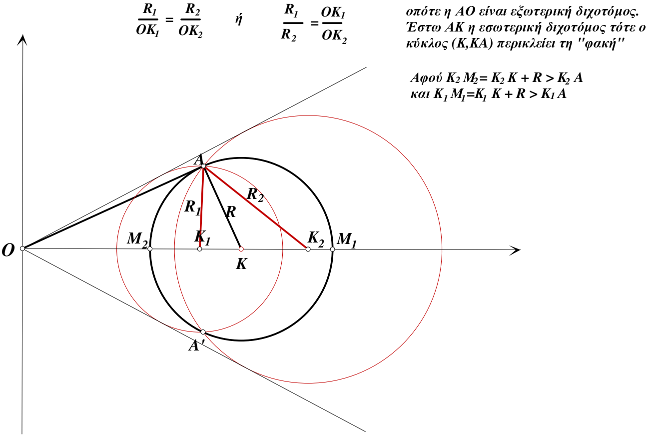
Τώρα αντί για δυάδες χρησιμοποιούμε $k-$άδες. Η διαδικασία είναι όπως και προηγούμενα. Το λ ξεκινά μεγαλώνοντας από το 0. Έστω P_j η κορυφή της οποίας ο τελευταίος Α.κ. εφάπτεται στο οριζόντιο ημιάξονα στο $K_j(c_j, 0)$. Ήδη όλοι οι προηγούμενοι Α.κ. τέμνουν τον οριζόντιο ημιάξονα στα σημεία A_i και B_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ και $i \neq j$. Αν όλα τα A_i και B_i βρίσκονται εκατέρωθεν του $K_j(c_j, 0)$, τότε αυτό το σημείο είναι το ζητούμενο (K_j^*). Επομένως ο βέλτιστος κύκλος προέρχεται από ένα σημείο. Αν υπάρχουν σημεία A_i και B_i από το ίδιο μέρος του $K_j(c_j, 0)$, τότε συνεχίζουμε την αύξηση του λ μέχρις ότου το πλέον αριστερό B_i έστω το B_{i_1} συμπέσει με το πλέον δεξιό A_i έστω το A_{i_2}, τότε αυτό το σημείο είναι το ζητούμενο ($K_{i_1 i_2}^*$). Επομένως ο βέλτιστος κύκλος προέρχεται από δύο σημεία.

Παρατηρήσεις...

Πόρισμα:

Ο π.κ. που προέρχεται από ένα σημείο είναι βέλτιστος και το σημείο που τον δημιουργεί είναι εκείνο που έχει τη μεγαλύτερη πολική γωνία.

Η μοναδικότητα...



Σχήμα: *Η μοναδικότητα του βέλτιστου π.κ.*

Ο Αλγόριθμος

Βήμα 1ο Έστω P_i τα σημεία των κορυφών του $\mathcal{H}$, με $\beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R},\ i = 1(1)k$.

Βήμα 2ο Βρες την κορυφή με τη μεγαλύτερη πολική γωνία θ

$$\max_{i=1(1)k} \tan\theta_i = \max_{i=1(1)k} \frac{\gamma_i}{\beta_i}$$

Αν υπάρχουν δυο τέτοιες κορυφές πήγαινε στο Βήμα 3, αλλιώς αν ο $\mathcal{C}_{\bar{i}},\ \bar{i} \in \{1, 2, \ldots, k\}$ περικλείει την $\mathcal{H}$, τότε αυτός είναι ο βέλτιστος π.κ., υπολόγισε τα ω και ρ, αλλιώς πήγαινε στο επόμενο Βήμα.

Βήμα 3ο Προσδιόρισε τους $\binom{k}{2}$ κύκλους, που διέρχονται από τα P_i και P_j και έχουν το κέντρο τους στο θετικό ημιάξονα. Απόκλεισε όσους δεν είναι π.κ. (είτε περικλείουν την αρχή O είτε δεν περικλείουν κάποια κορυφή). Βρες εκείνη που έχει το μικρότερο λόγο $\frac{R_{i,j}}{OK_{i,j}}$, υπολόγισε τα ω και ρ.

Ο Αλγόριθμος

Βήμα 1ο Έστω P_i τα σημεία των κορυφών του $\mathcal{H}$, με $\beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$, $i = 1(1)k$.

Βήμα 2ο Βρες την κορυφή με τη μεγαλύτερη πολική γωνία θ

$$\max_{i=1(1)k} \tan\theta_i = \max_{i=1(1)k} \frac{\gamma_i}{\beta_i}$$

Αν υπάρχουν δυο τέτοιες κορυφές πήγαινε στο Βήμα 3, αλλιώς αν ο $\mathcal{C}_{\bar{i}}$, $\bar{i} \in \{1, 2, \ldots, k\}$ περικλείει την $\mathcal{H}$, τότε αυτός είναι ο βέλτιστος π.κ., υπολόγισε τα ω και ρ, αλλιώς πήγαινε στο επόμενο Βήμα.

Βήμα 3ο Προσδιόρισε τους $\binom{k}{2}$ κύκλους, που διέρχονται από τα P_i και P_j και έχουν το κέντρο τους στο θετικό ημιάξονα. Απόκλεισε όσους δεν είναι π.κ. (είτε περικλείουν την αρχή O είτε δεν περικλείουν κάποια κορυφή). Βρες εκείνη που έχει το μικρότερο λόγο $\frac{R_{i,j}}{OK_{i,j}}$, υπολόγισε τα ω και ρ.

Ο Αλγόριθμος

Βήμα 1^o Έστω P_i τα σημεία των κορυφών του $\mathcal{H}$, με $\beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$, $i = 1(1)k$.

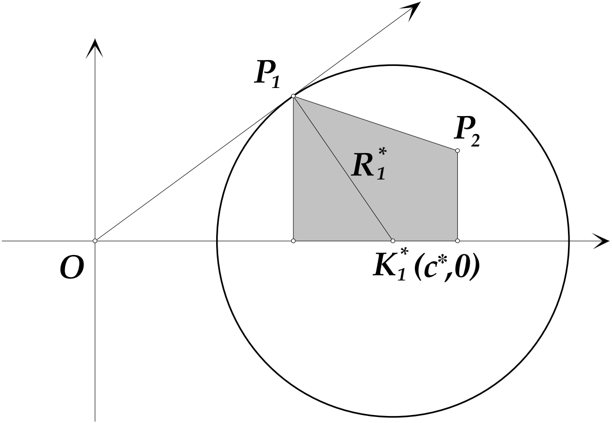
Βήμα 2^o Βρες την κορυφή με τη μεγαλύτερη πολική γωνία θ

$$\max_{i=1(1)k} \tan\theta_i = \max_{i=1(1)k} \frac{\gamma_i}{\beta_i}$$

Αν υπάρχουν δυο τέτοιες κορυφές πήγαινε στο Βήμα 3, αλλιώς αν ο $\mathcal{C}_{\bar{i}}$, $\bar{i} \in \{1, 2, \ldots, k\}$ περικλείει την $\mathcal{H}$, τότε αυτός είναι ο βέλτιστος π.κ., υπολόγισε τα ω και ρ, αλλιώς πήγαινε στο επόμενο Βήμα.

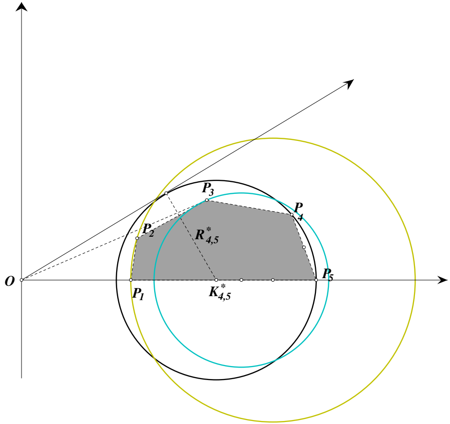
Βήμα 3^o Προσδιόρισε τους $\binom{k}{2}$ κύκλους, που διέρχονται από τα P_i και P_j και έχουν το κέντρο τους στο θετικό ημιάξονα. Απόκλεισε όσους δεν είναι π.κ. (είτε περικλείουν την αρχή O είτε δεν περικλείουν κάποια κορυφή). Βρες εκείνη που έχει το μικρότερο λόγο $\frac{R_{i,j}}{OK_{i,j}}$, υπολόγισε τα ω και ρ.

Παραδείγματα... I



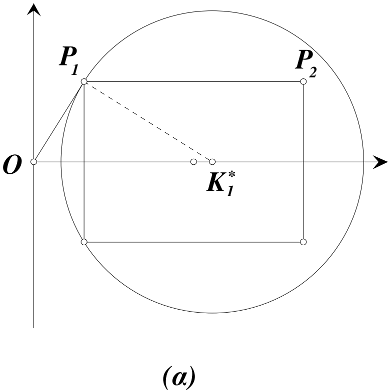
Σχήμα: *Ο βέλτιστος π.κ. ένος σημείου*

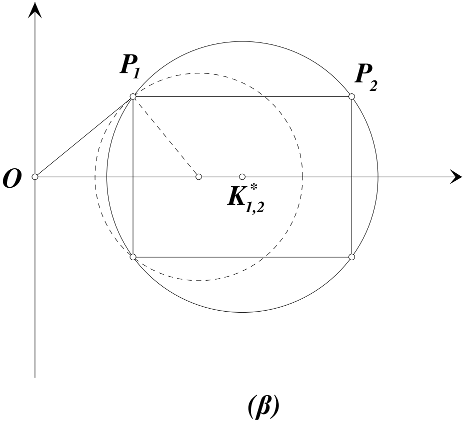
Παραδείγματα... II



Σχήμα: *Ο βέλτιστος π.κ. δυο σημείων*

Παραδείγματα... III





Σχήμα: *Ο βέλτιστος π.κ. στις δυο περιπτώσεις του ορθογωνίου*

★ Τελικά, η Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι χρήσιμη και στη σύγχρονη έρευνα !!!

★ Τελικά, η Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι χρήσιμη και στη σύγχρονη έρευνα !!!

- http://users.sch.gr/mtzoumas
- http://inf-server.inf.uth.gr/ hadjidim/talk_extra_EME.pdf
- http://inf-server.inf.uth.gr/ hadjidim/paper_extra_EME.pdf
- http://www.math.uoc.gr/ pamfilos/eGallery/Gallery.html