ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΥΠΟΣΤΗΡΙΚΤΙΚΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2011-12

ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Οι παρακάτω συνοπτικές σημειώσεις θεωρίας και ενδεικτική συλλογή ασκήσεων απευθύνονται στους μαθητές της Α΄ τάξης του ΕΠΑ.Λ για το σχολικό έτος 2011-12. Στόχος είναι να αποτελέσουν ένα εύχρηστο βοήθημα στο υποστηρικτικό μάθημα των Μαθηματικών έως την τελική συγγραφή ενός ειδικού διδακτικού εγχειριδίου. Η λειτουργικότητά τους έγκειται κυρίως στη συγκέντρωση σε ένα μόνο βοήθημα και με τη μέγιστη συντόμευση, διαφόρων θεμάτων από διαφορετικές τάξεις που θα απαιτούσαν πρόσβαση σε περισσότερα βιβλία.

Οι σημειώσεις όλων των κεφαλαίων αποτελούν επιλογή αυτούσιων τμημάτων από τα παρακάτω προγενέστερα διδακτικά βιβλία:

α) «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ των Τεχνικών και Επαγγελματικών Σχολών» των Ε. Γιανναράκη- Κ. Μακρή- Α. Μπέτση (Έκδοση 1988 ΟΕΔΒ)

β) «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΕΧΝΙΚΑ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ Α΄ ΤΑΞΗΣ 1^{ΟΥ} ΚΥΚΛΟΥ» των Δ. Λιουδάκη- Β. Σακελλάρη- Χ. Τσίτουρα (Έκδοση Ε΄ 2003 ΟΕΔΒ)

γ) «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ» των Δ. Αργυράκη- Π. Βουργάνα- Κ. Μεντή- Σ. Τσικοπούλου- Μ. Χρυσοβέργη (Έκδοση 2007 ΟΕΔΒ).

Η αφομοίωση αυτής της ύλης είναι αναγκαία προϋπόθεση για την αποτελεσματική διδασκαλία των μαθημάτων τους.

Η διδακτική εμπειρία των καθηγητών του υποστηρικτικού μαθήματος είναι βέβαιο ότι θα τους επιτρέψει να επιφέρουν διορθώσεις, να εμπλουτίσουν το συγκεκριμένο διδακτικό υλικό και ο καθένας να το προσαρμόσει στις ανάγκες των μαθητών του.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ Β΄

ΜΕΡΟΣ Γ΄

ΚΛΑΣΜΑΤΑ-ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ-ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ ΚΑΙ ΡΗΤΟΥΣ-ΔΥΝΑΜΕΙΣ-ΜΟΡΦΕΣ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ-ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ

ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Η έννοια του κλάσματος.

Έστω το τμήμα ΑΒ που έχει διαιρεθεί σε 8 ίσα μέρη.

Ξέρουμε ότι το μήκος του ΑΓ με μονάδα το ΑΒ εκφράζεται με το σύμβολο $\frac{3}{8}$, που λέγεται κλάσμα ή κλασματικός αριθμός.

Γι' αυτό γράφουμε

$$ΑΓ = \frac{3}{8} \cdot ΑΒ$$

Ο αριθμός 8, που μας φανερώνει σε πόσα ίσα κομμάτια διαιρέθηκε η μονάδα, λέγεται *παρονομαστής* και ο 3, που φανερώνει πόσα από αυτά περιέχονται στο ΑΓ, *αριθμητής*, ενώ και οι δύο μαζί *όροι του κλάσματος*.

Ξέρουμε επίσης ότι κάθε κλάσμα $\frac{α}{β}$ με α, β φυσικούς, $β \neq 0$ δηλώνει και το πηλίκο α:β.

Δηλαδή

$$\boldsymbol{α:β = \frac{α}{β}}$$

Επομένως $\quad \frac{α}{1} = α, \quad \frac{α}{α} = 1.$

Ίσα κλάσματα. Απλοποίηση.

Ας πάρουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ και ας το χωρίσουμε σε 8 ίσα μέρη, όπως δείχνει το επόμενο σχήμα.

Παρατηρούμε ότι

$$ΟΔ = \frac{1}{2} \cdot ΟΑ \quad ή \quad ΟΔ = \frac{2}{4} \cdot ΟΑ \quad ή \quad ΟΔ = \frac{4}{8} \cdot ΟΑ.$$

Αφού λοιπόν οι αριθμοί $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}$ παριστάνουν το μέτρο του ΟΔ με την ίδια μονάδα ΟΑ, θα είναι ίσοι. Δηλαδή

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$$

Από την ισότητα $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ βλέπουμε ότι $1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$.

Επίσης από την $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ έχουμε $2 \cdot 8 = 4 \cdot 4$.

Γενικά ισχύει:

Δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ είναι ίσα όταν $\alpha\delta = \beta\gamma$.

Δηλαδή

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \quad \textbf{όταν} \quad \alpha\delta = \beta\gamma}$$

Ακόμα παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \quad ή \quad \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \quad ή \quad \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2}$$

$$\frac{8}{6} = \frac{4}{3} \quad ή \quad \frac{8}{6} = \frac{8:2}{6:2}$$

Γενικά ισχύει ο κανόνας:

Αν πολλαπλασιάσουμε τους όρους ενός κλάσματος με έναν αριθμό ή τους διαιρέσουμε με ένα κοινό διαιρέτη τους, προκύπτει ίσο κλάσμα.

Η διαίρεση των όρων ενός κλάσματος με ένα κοινό τους διαιρέτη μας δίνει ένα κλάσμα ίσο, αλλά με μικρότερους όρους. Η μετατροπή ενός κλάσματος σε ένα άλλο ίσο του, αλλά με μικρότερους όρους λέγεται **απλοποίηση.** Π.χ.

$$\frac{24}{32} = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 8} = \frac{3}{4}, \qquad \frac{100}{125} = \frac{4 \cdot 25}{5 \cdot 25} = \frac{4}{5}$$

Ένα κλάσμα στο οποίο δεν μπορεί να γίνει απλοποίηση λέγεται **ανάγωγο.**
Κλάσματα με ίσους παρονομαστές λέγονται **ομώνυμα,** ενώ με διαφορετικούς **ετερώνυμα.**
Π.χ. τα κλάσματα $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}$ είναι ομώνυμα ενώ τα $\frac{7}{11}, \frac{2}{3}$ ετερώνυμα.

Κλάσματα με παρανομαστή το 10, 100, 1.000 κ.τ.λ.

Κλάσματα με παρανομαστή το 10, 100, 1.000,... λέγονται **δεκαδικά κλάσματα.** Ένα κλάσμα ανάγωγο μπορεί να γραφεί ως δεκαδικό κλάσμα, αν ο παρανομαστής του έχει ως μοναδικούς πρώτους παράγοντες το 2 ή το 5 ή και τους δύο. Π.χ.

$$\frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{15}{10}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{60}{100}$$

$$\frac{13}{8} = \frac{13 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{1.625}{1.000}$$

Τα κλάσματα με παρονομαστή το 100 τα λέμε και **ποσοστά.** Το κλάσμα $\frac{α}{100}$ το διαβάζουμε και α στα 100, και γράφουμε **α%**. Το σύμβολο **β‰** είναι το κλάσμα $\frac{β}{1.000}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Τα κλάσματα $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{20}$ να εκφραστούν σε ποσοστά στα εκατό.**

Λύση: Έχουμε

$$\frac{1}{5}=\frac{1\cdot 20}{5\cdot 20}=\frac{20}{100}=20\%$$

$$\frac{3}{20}=\frac{3\cdot 50}{20\cdot 50}=\frac{150}{1.000}=15\%$$

2. **Ένας έμπορος αγόρασε ένα ψυγείο προς 120.000 δρχ. και το πούλησε 150.000 δρχ. Πόσο στα 100 πάνω στο κόστος,** (δηλ. στην τιμή αγοράς) **κέρδισε:**

Λύση: Ο έμπορος κέρδισε

$$150.000-120.000=30.000 \text{ δρχ.}$$

ή τα $\frac{30.000}{120.000}$ του κόστους

Έχουμε λοιπόν

$$\frac{30.000}{120.000}=\frac{1}{4}=\frac{1\cdot 25}{4\cdot 25}=\frac{25}{100}=25\%$$

Ώστε ο έμπορος κέρδισε 25% πάνω στο κόστος.

3. **Τα κλάσματα $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{12}$ να τραπούν σε ομώνυμα με κοινό παρονομαστή το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών τους.**

Λύση: Έχουμε Ε.Κ.Π.(6,9,12)= 36, οπότε

$$\frac{1}{6}=\frac{1\cdot 6}{6\cdot 6}=\frac{6}{36} \qquad \textit{(γιατί } 36:6=6\textit{)}$$

$$\frac{5}{9}=\frac{5\cdot 4}{9\cdot 4}=\frac{20}{36} \qquad \textit{(γιατί } 36:9=4\textit{)}$$

$$\frac{7}{12}=\frac{7\cdot 3}{12\cdot 3}=\frac{21}{36} \qquad \textit{(γιατί } 36:12=3\textit{)}$$

Πολλές φορές γράφουμε και έτσι:

$$\left\{\frac{1}{6},\frac{5}{9},\frac{7}{12}\right\} \quad \text{ή} \quad \left\{\overset{6}{\frac{1}{6}},\overset{4}{\frac{5}{9}},\overset{3}{\frac{7}{12}}\right\} \quad \text{ή} \quad \left\{\frac{6}{36},\frac{20}{36},\frac{21}{36}\right\}$$

Πράξεις με κλάσματα

(i) *Πρόσθεση και αφαίρεση*

α) **Για να προσθέσουμε ομώνυμα κλάσματα προσθέτουμε τους αριθμητές και το άθροισμά τους το βάζουμε αριθμητή, αφήνοντας τον ίδιο παρονομαστή**

Ανάλογος κανόνας ισχύει και για την αφαίρεση. Π.χ.

i) $\frac{1}{7}+\frac{3}{7}+\frac{5}{7}=\frac{1+3+5}{7}=\frac{9}{7}$

ii) $\left(\frac{5}{9}+\frac{11}{9}\right)-\frac{3}{9}=\frac{(5+11)-3}{9}=\frac{13}{9}$

Γενικά

$$\boxed{\frac{\alpha}{\delta}\pm\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\pm\gamma}{\delta}}$$

β) **Για να προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε ετερώνυμα κλάσματα τα τρέπουμε σε ίσα ομώνυμα κλάσματα και εφαρμόζουμε τον προηγούμενο κανόνα.** Π.χ.

i) $\frac{2}{3}+\frac{7}{12}+\frac{1}{4}=\overset{4}{\frac{2}{3}}+\overset{1}{\frac{7}{12}}+\overset{3}{\frac{1}{4}}$ *[Αφού Ε.Κ.Π.(3,12,4) = 12]*

$=\frac{(8+7)+3}{12}=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}$

ii) $\left(\frac{2}{3}+\frac{7}{12}\right)-\frac{1}{4}=\frac{(8+7)-3}{12}=\frac{12}{12}=1$

Γενικά

$$\boxed{\frac{\alpha}{\gamma}\pm\frac{\beta}{\delta}=\frac{\alpha\delta}{\gamma\delta}\pm\frac{\beta\gamma}{\gamma\delta}=\frac{\alpha\delta\pm\beta\gamma}{\gamma\delta}}$$

(ii) *Πολλαπλασιασμός και διαίρεση.*

1. **Για να πολλαπλασιάσουμε κλάσματα πολλαπλασιάζουμε τους αριθμητές και το γινόμενό τους το βάζουμε αριθμητή και τους παρονομαστές τους και το γινόμενο το βάζουμε παρανομοστή.** Π.χ.

i) $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2\cdot 3\cdot 1}{5\cdot 7\cdot 2}=\frac{6}{35}$

ii) $9\cdot\frac{1}{9}=\frac{9}{9}=1$

iii) $\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{3}=\frac{3\cdot 7}{7\cdot 3}=1$

Γενικά

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}}$$

Κλάσματα όπως π.χ. τα $\{\frac{3}{7},\frac{7}{3}\}$ ή $\{9,\frac{1}{9}\}$ και γενικά $\{\frac{\alpha}{\beta},\frac{\beta}{\alpha}\}$ που έχουν γινομενο τη μονάδα, λέγονται **αντίστροφα.**

2. **Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα πολλαπλασιάζουμε το πρώτο (διαιρετέο) με το αντίστροφο του δεύτερου (διαιρέτη).** Π.χ.

i) $\frac{3}{5}:\frac{7}{8}=\frac{3}{5}\cdot\frac{8}{7}=\frac{24}{35}$

ii) $7:\frac{3}{5}=7\cdot\frac{5}{3}=\frac{35}{3}$

iii) $\frac{3}{5}:7=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{7}=\frac{3}{35}$

Γενικά

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Αν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι μεγαλύτερος του παρονομαστή, το κλάσμα είναι μεγαλύτερο της μονάδας. Π.χ. έχουμε

$$\frac{19}{5} = \frac{5\cdot 3 + 4}{5} = \frac{5\cdot 3}{5} + \frac{4}{5} = 3 + \frac{4}{5}$$

(αφού $\begin{array}{r|l} 19 & 5 \\ \hline 4 & 3 \end{array}$ και $19 = 5\cdot 3 + 4$)

Συνήθως αντί $3 + \frac{4}{5}$ γράφουμε την παράσταση $3\frac{4}{5}$, που ονομάζεται **μεικτός αριθμός.**

Σύνθετα κλάσματα.

Όπως το πηλίκο 3:5 γράφεται $\frac{3}{5}$ έτσι και το πηλίκο $\frac{3}{5}:\frac{7}{6}$ συμφωνούμε να το γράφουμε με το σύμβολο.

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{6}}$$

που λέγεται **σύνθετο κλάσμα.** Από τη συμφωνία αυτή έχουμε

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{6}} = \frac{3}{5}:\frac{7}{6} = \frac{3}{5}\cdot\frac{6}{7} = \frac{3\cdot 6}{5\cdot 7}$$

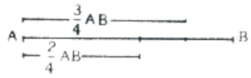
Γενικά

$$\boxed{\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}}$$

Η σχέση της ανισότητας.

Ας πάρουμε ένα ευθ. τμήμα ΑΒ και ας σχηματίσουμε τα $\frac{3}{4}$ του ΑΒ και τα $\frac{2}{4}$ του ΑΒ (Σχ. 1).
Παρατηρούμε ότι

$$\frac{3}{4}AB > \frac{2}{4}AB$$



Σχ. 1

Άρα
$$\frac{3}{4} > \frac{2}{4}$$

Γενικά,

Από δύο ομώνυμα κλάσματα μεγαλύτερο είναι αυτό, που έχει μεγαλύτερο αριθμητή.

Έστω τώρα ότι θέλουμε να συγκρίνουμε τους αριθμούς

$$3 \text{ και } \frac{19}{7}$$

Έχουμε $3 = \frac{3}{1} = \frac{3 \cdot 7}{7} = \frac{21}{7}$ αλλά $\frac{21}{7} > \frac{19}{7}$, άρα $3 > \frac{19}{7}$

Όμοίως, για τα $\frac{12}{13}$ και $\frac{13}{14}$ έχουμε, αν τα τρέψουμε σε ομώνυμα:

$$\frac{12}{13} = \frac{12 \cdot 14}{13 \cdot 14} = \frac{168}{13 \cdot 14} \quad \text{και} \quad \frac{13}{14} = \frac{13 \cdot 13}{14 \cdot 13} = \frac{169}{13 \cdot 14}$$

οπότε βλέπουμε ότι $\frac{12}{13} < \frac{13}{14}$.

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι μπορούμε να συγκρίνουμε δύο κλασματικούς αριθμούς, αν τους γράψουμε στη μορφή δύο ομώνυμων κλασμάτων.

ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Δεκαδικές κλασματικές μονάδες.

Τα δεκαδικά κλάσματα

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1.000}, \frac{1}{10.000}, \ldots$$

που είναι γραμμένα και σε τάξη ελαττούμενου μεγέθους από αριστερά προς τα δεξιά, λέγονται *δεκαδικές κλασματικές* μονάδες.

Για τις δεκαδικές κλασματικές μονάδες παρατηρούμε ότι

$$10 \cdot \frac{1}{10} = 1, \quad 10 \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{10}, \quad 10 \cdot \frac{1}{1.000} = \frac{1}{100}, \quad 10 \cdot \frac{1}{10.000} = \frac{1}{1.000}; \ldots$$

Δηλαδή στην απεριόριστη προς τα δεξιά σειρά των κλασματικών μονάδων κάθε δεκαδική κλασματική μονάδα είναι δεκαπλάσια από την αμέσως επόμενη (προς τα δεξιά).

Ξέρουμε όμως ότι στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης (φυσικοί αριθμοί) δέκα (απλές) μονάδες μας κάνουν μία δεκάδα, δέκα δεκάδες, μία εκατοντάδα κτλ.

Συνεπώς οι δεκαδικές κλασματικές μονάδες αποτελούν τη συνέχεια προς τα δεξιά των μονάδων διαφόρων τάξεων του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης.

Δεκαδικοί αριθμοί.

Έστω το δεκαδικό κλάσμα $\frac{45.235}{1.000}$. Το κλάσμα αυτό μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\frac{45.235}{1.000} = \frac{40.000 + 5.000 + 200 + 30 + 5}{1.000}$$

$$= 40 + 5 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{5}{1.000}$$

$$= 4 \cdot 10 + 5 + 2 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{100} + 5 \cdot \frac{1}{1.000} \qquad (1)$$

Το άθροισμα (1) συμφωνούμε να το γράφουμε:

$$45{,}235$$

όπου το κόμα (ή *υποδιαστολή*) χρησιμοποιείται για να χωρίσει τις ακέραιες μονάδες από τις δεκαδικές. Συγκεκριμένα:

αριστερά από την υποδιαστολή βρίσκονται κατά σειρά τα ψηφία των απλών μονάδων, των δεκάδων, των εκατοντάδων, κτλ. *και δεξιά κατά σειρά βρίσκονται τα ψηφία των δεκάτων, των εκατοστών*, κτλ.

Συνεπώς στη γραφή αυτή τηρούνται οι κανόνες γραφής των φυσικών αριθμών. Τα δεκαδικά κλάσματα με τη νέα αυτή γραφή λέγονται **δεκαδικοί αριθμοί.**

Ιδιότητες των δεκαδικών αριθμών.

Από τα ίσα κλάσματα

$$\frac{25}{10} = \frac{250}{100} = \frac{2.500}{1.000} = \ldots$$

προκύπτουν οι ισότητες $2{,}5 = 2{,}50 = 2{,}500 = \ldots$

Γενικά ισχύει

Στο τέλος του δεκαδικού μέρους ενός δεκαδικού αριθμού μπορούμε να παραθέσουμε οσαδήποτε μηδενικά ή να παραλείψουμε από το τέλος του όσα μηδενικά τυχόν υπάρχουν.

Αν τώρα τον 0,235 τον πολλαπλασιάσουμε επί 10, 100, 1.000,... έχουμε:

$$0{,}235 \cdot 10 = \frac{235}{1.000} \cdot 10 = \frac{235}{100} = 2{,}35$$

$$0{,}235 \cdot 100 = \frac{235}{1.000} \cdot 100 = \frac{235}{10} = 23{,}5$$

$$0{,}235 \cdot 1000 = \frac{235}{1.000} \cdot 1.000 = 235{,}0 = 235 \text{ κτλ.}$$

Γενικά ισχύει

Αν ένα δεκαδικό αριθμό τον πολλαπλασιάσουμε επί 10, 100, 1.000, ... η υποδιαστολή μετακινείται αντιστοίχως μία, δύο, τρεις,... θέσεις προς τα δεξιά.

$$0{,}235 : 10 = \frac{235}{1.000} \cdot \frac{1}{10} = \frac{235}{10.000} = 0{,}0235$$

$$0{,}235 : 100 = \frac{235}{1.000} \cdot \frac{1}{100} = \frac{235}{100.000} = 0{,}00235 \quad \text{κτλ.}$$

Γενικά ισχύει ότι:

Αν ένα δεκαδικό αριθμό τον διαιρέσουμε δια 10, 100, 1.000, ... η υποδιαστολή μετακινείται μία, δύο, τρεις,... θέσεις προς τα αριστερά (αντίστοιχα).

Πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός δεκαδικών αριθμών.

- *Πρόσθεση.*

$$3,14 + 17,5 = \frac{314}{100} + \frac{175}{10} = \frac{314 + 1.750}{100}$$
$$= \frac{2.064}{100}$$
$$= 20,64$$

Από τα προηγούμενα φαίνεται ότι η πρόσθεση δεκαδικών αριθμών ακολουθεί τους κανόνες πρόσθεσης των φυσικών αριθμών.

Η διάταξη (Ι) δείχνει πρακτικά πώς γίνεται η προηγούμενη πρόσθεση. Στη διάταξη αυτή προσέχουμε οι υποδιαστολές να βρίσκονται στην ίδια στήλη.

$$\text{(I)} \qquad \begin{array}{r} 3,14 \\ \underline{17,50} \\ 20,64 \end{array} \qquad \text{ή} \qquad \begin{array}{r} 3,14 \\ \underline{17,5} \\ 20,64 \end{array}$$

- *Αφαίρεση.*

$$17,5 - 3,14 = \frac{175}{10} - \frac{314}{100} = \frac{1.750 - 314}{100}$$
$$= \frac{1.436}{100}$$
$$= 14,36$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα φτάνουμε και με τη διάταξη (ΙΙ).

$$\text{(II)} \qquad \begin{array}{r} 17,50 \\ \underline{-3,14} \\ 14,36 \end{array} \qquad \text{ή} \qquad \begin{array}{r} 17,5 \\ \underline{-3,14} \\ 14,36 \end{array}$$

- *Πολλαπλασιασμός.*

$$4,25 \cdot 2,7 = \frac{425}{100} \cdot \frac{27}{10}$$
$$= \frac{11.475}{1.000} = 11,475$$

Παρατηρούμε ότι

α) Ο αριθμητής του κλάσματος $\frac{11.475}{1.000}$ προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τους δεδομένους δεκαδικούς σύμφωνα με τους κανόνες του πολλαπλασιασμού φυσικών αριθμών.

β) Ο παρονομαστής ορίζει ότι στο γινόμενο, που θα βρούμε, χωρίζουμε με υποδιαστολή από το τελευταίο ψηφίο του τόσα δεκαδικά ψηφία, όσα έχουν μαζί οι παράγοντες.

Η διάταξη της πράξης γίνεται ως εξής:

$$\begin{array}{r} 4,25 \\ \underline{\quad 2,7} \\ 2.975 \\ \underline{8\,50} \\ 11\,475 \end{array}$$

Διαίρεση δεκαδικών αριθμών.

1. *Ο διαιρέτης είναι φυσικός αριθμός* ($\neq 0$)

Έστω π.χ. οι διαιρέσεις (i) 35,4:15 (ii) 2,3:3

(i) Έχουμε

$$35{,}4:15 = 35{,}40:15 = \frac{354}{10} : 15 = \frac{3.540}{100} \cdot \frac{1}{15}$$

$$= \frac{1}{100} \cdot \frac{3.540}{15} = \frac{1}{100}(3540:15) = \frac{236}{100} = 2{,}36$$

Η διαίρεση αυτή γίνεται σύντομα με την παραπλεύρως γνωστή διάταξη.

$$\begin{array}{r|l} 35{,}40 & \underline{15} \\ 5\,4 & 2{,}36 \\ 90 & \\ 0 & \end{array}$$

Στη διάταξη αυτή, όταν δεξιά από το πρώτο υπόλοιπο 5 τοποθετούμε το πρώτο δεκαδικό ψηφίο του διαιρετέου, το 4, σχηματίζεται αριθμός, που σημαίνει δέκατα δηλ. $\frac{54}{10} = 5{,}4$. Επομένως το 2^{0} ψηφίο του πηλίκου θα είναι δέκατα. Γι' αυτό και θέτουμε πριν από αυτό υποδιαστολή. Όμοια το νέο υπόλοιπο είναι εκατοστά ($\frac{90}{100}$) και το νέο ψηφίο του πηλίκου θα είναι επίσης εκατοστά.

(ii) Έχουμε πάλι.

$$2{,}3:3 = \frac{23}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10} \cdot \frac{23}{3} = \frac{23}{30}$$

Παρατηρούμε ότι:

Το 23 δε διαιρείται με το 3, δηλαδή το $\frac{23}{30}$ δεν είναι δεκαδικό κλάσμα.

Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να γράψουμε

$$2{,}3:3 = \frac{23}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{23}{3} \cdot \frac{1}{10} = \left(7 + \frac{2}{3} \right) \frac{1}{10} = \frac{7}{10} + \frac{2}{30} = 0{,}7 + \frac{2}{30}$$

Το ίδιο αποτέλεσμα βρίσκουμε, αν κάνουμε τη διαίρεση, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Δηλαδή.

$$\begin{array}{r|l} 2{,}3 & \underline{3} \\ 2 & 0{,}7 \end{array}$$

Αν παραλείψουμε τα $\frac{2}{30}$ και θεωρήσουμε για πηλίκο το 0,7 τότε θα λέμε ότι το 0,7 είναι *πηλίκο κατά*[1] *προσέγγιση δεκάτου* **και γράφουμε: $2{,}3:3 \simeq 0{,}7$.**

Παραλείποντας τα $\frac{2}{30}$ κάνουμε «λάθος» μικρότερο του $\frac{1}{10}$, (αφού $\frac{2}{30} < \frac{1}{10}$) γι' αυτό λέμε ότι το πηλίκο της διαίρεσης 2,3:3 είναι 0,7 *κατά προσέγγιση δεκάτου*. Επειδή όμως είναι μικρότερο του πραγματικού: $0,7 + \frac{2}{30}$ θα λέμε ότι το πηλίκο υπολογίσθηκε *κατά προσέγγιση δεκάτου και με έλλειψη*.

Αν πάρουμε όμως αντί του 0,7 το 0,8 δηλ. αν αυξήσουμε το τελευταίο δεκαδικό ψηφίο κατά μία μονάδα, πάλι κάνουμε «λάθος», γιατί τώρα το πηλίκο, που πήραμε, είναι μεγαλύτερο του πραγματικού, $0,7 + \frac{2}{30}$ κατά $\frac{1}{30}$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το πηλίκο υπολογίστηκε *κατα προσέγγιση δεκάτου* αλλά *με υπεροχή*.

Αν θέλουμε μεγαλύτερη προσέγγιση, επειδή

$$2,3:3 = \frac{230}{100}\cdot\frac{1}{3} = \frac{230}{3}\cdot\frac{1}{100} = (76+\frac{2}{3})\frac{1}{100} = \frac{76}{100} + \frac{2}{300} = 0,76 + \frac{2}{300}$$

έχουμε

$2,3:3 \simeq 0,76$ *(πηλίκο κατά προσέγγιση εκατοστού).*

Επίσης επειδή

$$2,3:3 = \frac{2.300}{1.000}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2.300}{3}\cdot\frac{1}{1.000} = (766+\frac{2}{3})\frac{1}{1000} = \frac{766}{1.000} + \frac{2}{3.000} = 0,766 + \frac{2}{3.000}$$

έχουμε

$2,3:3 \simeq 0,766$ *(πηλίκο κατά προσέγγιση χιλιοστού)*

κτλ.

Τα ίδια αποτελέσματα παίρνουμε αν θέσουμε ένα ή περισσότερα μηδενικά δεξιά του διαιρετέου και συνεχίσουμε τη διαίρεση, όπως π.χ. παρακάτω:

πηλίκο κατά προσέγγιση εκατοστού,

$$\begin{array}{r|l} 2,3 & 3 \\ \hline 20 & 0,76 \\ 2 & \end{array}$$

Με έλλειψη: 0,76
Με υπεροχή: 0,77

πηλίκο κατά προσέγγιση χιλιοστού.

$$\begin{array}{r|l} 2,3 & 3 \\ \hline 20 & 0,766 \\ 20 & \\ 2 & \end{array}$$

Με έλλειψη: 0,766
Με υπεροχή: 0,767

2) *Ο διαιρέτης είναι δεκαδικός.*

Έστω π.χ. i) 0,45:1,5 ii) 49:0,72

[1]λέμε και «με προσέγγιση δεκάτου».

i) Επειδή

$$0{,}45:1{,}5 = \frac{45}{100} : \frac{15}{10} = \frac{45}{100} \cdot \frac{10}{15} = \frac{45}{10} \cdot \frac{1}{15} = 4{,}5:15$$

η περίπτωση αυτή ανάγεται στη διαίρεση με διαιρέτη φυσικό αριθμό.

(ii) Όμοια

$$49:0{,}72 = 49 : \frac{72}{100} = \frac{49 \cdot 100}{72} = 4.900:72$$

Επομένως, όταν ο διαιρέτης είναι δεκαδικός, κάνουμε το διαιρέτη ακέραιο πολλαπλασιάζοντας διαιρετέο και διαιρέτη, κατάλληλα, με 10, 100 κτλ.

ΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ακέραιοι αριθμοί και οι πράξεις με ακεραίους.

Ξέρουμε ότι το σύνολο των ακεραίων αριθμών είναι το

$$\mathbb{Z} = \{ \ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \ldots \}$$

και αποτελείται από τους *θετικούς ακέραιους*: $+1, +2, +3, +4, \ldots$, που μπορούμε να τους ταυτίσουμε με τους φυσικούς $1, 2, 3, 4, \ldots$, τους *αρνητικούς ακέραιους* $-1, -2, -3, \ldots$ και το 0.

Οι ακέραιοι, όπως και οι φυσικοί, μπορούν να «παρασταθούν» με σημεία μιας ευθείας, όπως δείχνει το επόμενο σχήμα.

Σχ. 2

Σε κάθε ακέραιο αντιστοιχεί και ένα σημείο της ευθείας. Το σημείο Ο αντιπροσωπεύει το 0. Τα σημεία, που αντιπροσωπεύουν τους θετικούς ακέραιους, βρίσκονται δεξιά του Ο ενώ εκείνα, που αντιπροσωπεύουν τους αρνητικούς ακέραιους, αριστερά του Ο.

Δυο αριθμοί, που διαφέρουν μόνο ως προς το πρόσημο, π.χ. οι -3 και $+3$, αντιπροσωπεύονται από σημεία που ισαπέχουν από το Ο. Οι αριθμοί αυτοί λέγονται *αντίθετοι* και λέμε ότι έχουν την ίδια **απόλυτη τιμή.** Αυτό το δηλώνουμε με τη γραφή:

$$|-3| = |+3| = 3$$

Οι *πράξεις* μεταξύ των ακεραίων γίνονται με τους εξής κανόνες:

1. Για να προσθέσουμε ομόσημους ακέραιους προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο αποτέλεσμα βάζουμε το ίδιο πρόσημο, που έχουν οι προσθετέοι αυτοί.

Π.χ.

$(+2) + (+6) = 8$ ή απλά $2 + 6 = 8$ *(παραλείπουμε το σύμβολο + της πρόσθεσης)*

$(-3) + (-6) = -9$ ή απλά $-3 -6 = -9$

2. Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους ακέραιους αφαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους (τη μικρότερη από τη μεγαλύτερη) και στο αποτέλεσμα βάζουμε το πρόσημο του ακέραιου, που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

Π.χ.

$(+2) + (-6) = -4$ ή απλά $2 - 6 = -4$ *(παραλείπουμε στο σύμβολο + της πρόσθεσης)*

Ειδικά το άθροισμα δύο αντιθέτων αριθμών είναι μηδέν. Π.χ.

$$(-3) + (+3) = 0$$

3. Για να αφαιρέσουμε ένα ακέραιο β από ένα άλλο α αρκεί στον α να προσθέσουμε τον αντίθετο του β.

Δηλαδή:

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

Έτσι, π.χ. έχουμε $(+28) - (-16) = (+28) + (+16) = +44$

ή απλά $(+28) - (-16) = 28 + 16 = 44$ *(παραλείπουμε το + της πρόσθεσης).*

4. Για να πολλαπλασιάσουμε δυο ακέραιους πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο αποτέλεσμα βάζουμε το πρόσημο (+), αν οι ακέραιοι είναι ομόσημοι, (—) αν είναι ετερόσημοι.

Π.χ.
$(-3)\cdot(-5) = +(3\cdot5) = 15$, $(+3)\cdot(+5) = +(3\cdot5) = 15$, $(-3)\cdot(+5) = -(3\cdot5) = -15$

Για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ακέραιων ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

Ιδιότητες	**Πρόσθεση (+)**	**Πολλαπλασιασμός (·)**
Προσεταιριστική	$(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$	$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$
Αντιμεταθετική	$\alpha+\beta = \beta+\alpha$	$\alpha\beta = \beta\alpha$
Επιμεριστική	$\alpha(\beta+\gamma) = (\beta+\gamma)\alpha = \alpha\beta + \alpha\gamma$	

Διαίρεση του ακέραιου α δια του ακέραιου β, $\beta \neq 0$, σημαίνει να βρούμε ένα ακέραιο, έστω π, με την ιδιότητα: $\beta\cdot\pi = \alpha$. Τέτοιος ακεραιος υπαρχει (μοναδικός), μόνο αν ο φυσικός αριθμός $|\alpha|$ είναι διαιρετός δια του φυσικού αριθμού $|\beta|$, ισχύει δε τότε για το «πηλίκο», $\alpha:\beta$, $\beta \neq 0$, ο κανόνας:

5. Αν ο διαιρετέος α και ο διαιρέτης β είναι ομόσημοι, το πηλίκο είναι θετικό, αν είναι ετερόσημοι, το πηλίκο είναι αρνητικό.
Η απόλυτη τιμή του πηλίκου ισούται με το πηλίκο των απόλυτων τιμών.
(Κανόνας προσήμων)

Π.χ.

$$(+15):(+3) = +(15:3) = 5,$$
$$(-15):(-3) = +(15:3) = +5,$$
$$(-15):(+3) = -(15:3) = -5.$$

Επειδή, όπως είδαμε, η αφαίρεση ανάγεται στην πρόσθεση, γι' αυτό, πολλές φορές, μια σειρά από προσθέσεις και αφαιρέσεις ακέραιων, που λέγεται *αλγεβρικό άθροισμα* γράφεται με τη μορφή ενός απλού αθροίσματος. Π.χ.

$$(-3) + (-1) - (+5) + (+7) = (-3) + (-1) + (-5) + (+7)$$

$= -3 -1 -5 +7$ *(παραλείπουμε το + της πρόσθεσης)*

$= -2.$

Αν θεωρήσουμε τώρα ένα αλγεβρικό άθροισμα, που όροι του είναι αλγεβρικά αθροίσματα, π.χ. το $-(-3+3)+(5-7)-(-2+3)$, επειδή δύο αθροίσματα με αντίθετους όρους είναι αντίθετοι αριθμοί, γι' αυτό μπορούμε να *παραλείψουμε* τις παρενθέσεις ακολουθώντας τους εξής κανόνες:

- *Όταν μπροστά από μια παρένθεση υπάρχει το (+) γράφουμε τους προσθετέους της παρένθεσης με το ίδιο πρόσημο (όπως είναι).*
- *Όταν μπροστά από μια παρένθεση υπάρχει το (−) γράφουμε τους προσθετέους της παρένθεσης με αντίθετα πρόσημα.* Π.χ.

$$\text{(i) } -(-3+1)+(5-7)-(-2+3) = 3-1+5-7+2-3$$

$$\text{(ii) } -(-3+1)+[-(5-7)] = 3-1-(5-7) = 3-1-5+7$$

Κλάσματα με όρους ακέραιους αριθμούς.

Το πηλίκο $\alpha:\beta$, $\beta \neq 0$, δύο οποιωνδήποτε ακέραιων ξέρουμε ότι παριστάνεται και με τη μορφή του κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$. Ο α ονομάζεται αριθμητής και ο β παρανομαστής και οι δύο μαζί όροι του κλάσματος. Επειδή λοιπόν $\boldsymbol{\alpha:\beta = \frac{\alpha}{\beta}}$ έχουμε:

$$\frac{\lambda}{\lambda} = 1, \quad (\lambda \neq 0), \quad \frac{\mu}{1} = \mu, \quad \frac{0}{\kappa} = 0, \quad (\kappa \neq 0)$$

Δεχόμαστε ότι ένα κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι ίσο με το $\frac{\gamma}{\delta}$ όταν $\alpha\delta = \beta\gamma$. Δηλαδή.

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ όταν } \alpha\cdot\delta = \beta\cdot\gamma, \quad \beta \neq 0, \ \delta \neq 0}}$$

Έτσι π.χ. έχουμε

$$\text{i) } \frac{-5}{-7} = \frac{5}{7} \quad \text{αφού} \quad (-5)\cdot 7 = 5\cdot(-7)$$

$$\text{ii) } \frac{5}{-7} = \frac{-5}{7} \quad \text{αφού} \quad 5\cdot 7 = (-5)\cdot(-7)$$

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι σ' ένα κλάσμα με όρους ακέραιους:

- *Όταν αλλάζουμε τα πρόσημα των όρων του προκύπτει κλάσμα ίσο με αυτό (πρδ. i)*
- *Ο παρονομαστής μπορεί να θεωρείται πάντοτε θετικός ακέραιος αφού (πρδ. ii), αν είναι αρνητικός, αλλάζουμε τα πρόσημα και των δύο όρων του.*

Έτσι στα επόμενα θα θεωρούμε κλάσματα με προσημασμένο μόνο τον αριθμητή. Ένα τέτοιο κλάσμα, αν έχει αρνητικό αριθμητή, θα είναι αρνητικό, ενώ, αν έχει θετικό αριθμητή, θα είναι θετικό. Συνήθως το πρόσημο του κλάσματος το γράφουμε μπροστά από τη γραμμή.
Π.χ.

$$\frac{+2}{5} = +\frac{2}{5}, \qquad \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}.$$

Ακόμη επειδή π.χ.

$$\text{i)} \quad \frac{5}{3} = \frac{5\cdot(-2)}{3\cdot(-2)} \qquad \text{αφού } 5\cdot 3\cdot(-2) = 3\cdot 5\cdot(-2)$$

$$\text{ii)} \quad \frac{-21}{9} = \frac{(-21):3}{9:3} \qquad \text{αφού } 5\cdot 3\cdot(-2) = 3\cdot 5\cdot(-2)$$

καταλαβαίνουμε ότι:

$$\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\gamma} \ (\gamma \neq 0)}$$

$$\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha:\delta}{\beta:\delta}} \qquad \textit{(δ, κοινός διαιρέτης των α, β)} \ \textbf{(Απλοποίηση)}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Τα κλάσματα με ακέραιους όρους λέγονται και **ρητοί αριθμοί.** Επειδή κάθε ακέραιος γράφεται ως κλάσμα με παρανομαστή τη μονάδα συμπεραίνουμε ότι κάθε ακέραιος είναι ρητός αριθμός.

Πράξεις στο σύνολο των ρητών.

- *Πρόσθεση*

Όταν οι ρητοί αντιπροσωπεύονται από ομώνυμα **κλάσματα** προσθέτουμε τους αριθμητές τους αφήνοντας τον ίδιο παρανομαστή, **ενώ όταν** αντιπροσωπεύονται από ετερώνυμα κλάσματα τα **τρέπουμε σε ομώνυμα.** Π.χ.

$$\text{(i)} \quad \frac{5}{7} + \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{15}{21} + \left(\frac{-7}{21}\right) = \frac{15+(-7)}{21} = \frac{8}{21}$$

$$\text{(ii)} \quad -1 + \frac{5}{7} + \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{21}{21} + \frac{15}{21} + \left(\frac{-7}{21}\right) = \frac{-21}{21} + \frac{15}{21} + \frac{-7}{21}$$

$$= \frac{-21+15-7}{21} = -\frac{13}{21}$$

(iii) $\left(-\frac{5}{3}\right)+\left(+\frac{5}{3}\right)=\frac{-5+5}{3}=\frac{0}{3}=0$ και $\left(+\frac{5}{3}\right)+\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{5-5}{3}=0$

Στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι οι αντίθετοι ρητοί έχουν άθροισμα μηδέν. Από τα παραδείγματα καταλαβαίνουμε ότι:

Η πρόσθεση των ρητών ανάγεται σε πρόσθεση ακέραιων.

- *Αφαίρεση*

  Για να αφαιρέσουμε από ένα ρητό έναν άλλο προσθέτουμε στο μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου. Π.χ.

$$2-\left(-\frac{5}{3}\right)=2+\left(+\frac{5}{3}\right)=\left(+\frac{6}{3}\right)+\left(+\frac{5}{3}\right)=\frac{11}{3}$$

Όπως σ' ένα άθροισμα ακεραιων έτσι και σ' ένα άθροισμα ρητών, με δύο ή περισσότερους προσθετέους, παραλείπουμε τα σύμβολα + της πρόσθεσης. Έτσι π.χ. έχουμε

$$(+1)+\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{11}{3}\right)+\left(-\frac{1}{7}\right)+(-7)=1+\frac{1}{2}-\frac{11}{3}-\frac{1}{7}-7$$

Όταν έχουμε μια σειρά από προσθέσεις και αφαιρέσεις ρητών, λέμε ότι έχουμε ένα *αλγεβρικό άθροισμα*. Στα αλγεβρικά αυτά αθροίσματα ακολουθούμε τους κανόνες της (§ 1.22).

- *Πολλαπλασιασμός.*

  Για να πολλαπλασιάσουμε ρητούς, πολλαπλασιάζουμε τους αριθμητές και το γινόμενο το βάζουμε αριθμητή, και τους παρανομαστές τους και το γινόμενο το βάζουμε παρανομαστή. Π.χ.

(i) $\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{3}{7}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{-2}{5}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{-1}{2}=\frac{2\cdot3\cdot1}{5\cdot7\cdot2}=\frac{3}{35}$

(ii) $(-9)\left(-\frac{1}{9}\right)=\frac{9}{9}$

(iii) $\left(-\frac{3}{7}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)=\frac{3\cdot7}{3\cdot7}=1$

Ρητοί, όπως π.χ. $-9, -\frac{1}{9}$, που έχουν γινόμενο 1, λέγονται **αντίστροφοι**.

- *Διαίρεση.*

  Για να διαιρέσουμε ένα ρητό με ένα άλλο πολλαπλασιάζουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο

του διαιρέτη. Π.χ.

(i) $\left(-\frac{7}{12}\right):\frac{5}{8}=\frac{(-7)}{12}\cdot\frac{8}{5}=-\frac{14}{15}$

(ii) $5:\left(-\frac{6}{7}\right)=5\cdot\left(-\frac{7}{6}\right)=-\frac{35}{6}$

Σύγκριση (διάταξη) των ρητών.

Αν έχουμε δυο οποιουσδήποτε ρητούς **α** και **β**, που η διαφορά τους $\alpha - \beta$ είναι θετικός αριθμός, λέμε ότι ο α είναι μεγαλύτερος του β ή ο β είναι μικρότερος του α και συμβολίζουμε αντίστοιχα.

$$\alpha > \beta \quad \text{ή} \quad \beta < \alpha$$

Π.χ. είναι

(i) $\frac{3}{4} > -1$ γιατί $\frac{3}{4} - (-1) = \frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \frac{7}{4}$ *(θετικός αριθμός)*

(ii) $-1 > -\frac{17}{3}$ γιατί $-1 - (-\frac{17}{3}) = -\frac{3}{3} + \frac{17}{3} = \frac{14}{3}$ *(θετικός αριθμός)*

(iii) $-5 < 0$ γιατί $-5 - 0 = -5$ *(αρνητικός αριθμός)*

ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Η έννοια της δύναμης με εκθέτη ακέραιο.

Ξέρουμε ότι για συντομία μπορούμε να γράφουμε:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3,\ 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5,\ \alpha \cdot \alpha = \alpha^2,\ \text{κ.τ.λ.}$$

Γενικά

Αν α είναι ένας αριθμός και ν φυσικός μεγαλύτερος του 0, τότε ορίζουμε:

$$\alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$$

Το σύμβολο α^ν διαβάζεται α στη ν ή *«νιοστή δύναμη του α»*.
Επίσης, επεκτείνοντας την έννοια της δύναμης, ορίζουμε:

$$\alpha^0 = 1 \text{ και } \alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu} \quad \text{για } \alpha \neq 0 \text{ και ν φυσικό αριθμό.}$$

Ο α λέγεται βάση και ο ν **εκθέτης** της δύναμης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

(i) Το $(-2)^4$ είναι η τέταρτη δύναμη του -2 και ισούται με το $(-2)(-2)(-2)(-2)=16$

(ii) Το $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ είναι η δεύτερη δύναμη του $\frac{3}{4}$ ή, όπως συνήθως λέγεται, το **τετράγωνο** του $\frac{3}{4}$ και ισούται με $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$.

(iii) Το $(-1)^3$ είναι η τρίτη δύναμη του -1 ή, όπως συνήθως λέγεται, ο **κύβος** του -1 και ισούται με $(-1)(-1)(-1)=-1$.

(iv) $2^{-3}=\frac{1}{2^3}$

Εύκολα προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα.

Η δύναμη α^ν, με ν θετικό, είναι:

- *Θετικός αριθμός*, αν $\alpha>0$
- *Θετικός αριθμός*, αν $\alpha<0$ *και* ν *άρτιος*.
- *Αρνητικός αριθμός*, αν $\alpha<0$ *και* ν *περιττός*.

Πολλαπλασιασμός και διαίρεση δυνάμεων. Ιδιότητες.

1. *Δυνάμεις με ίσους εκθέτες. Πολλαπλασιασμός και διαίρεση.*

Έχουμε π.χ.

$$3^2\cdot5^2=3\cdot3\cdot5\cdot5=(3\cdot5)\cdot(3\cdot5)=(3\cdot5)^2$$

$$\frac{3^2}{5^2}=\frac{3\cdot3}{5\cdot5}=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\left(\frac{3}{5}\right)^2$$

Γενικά ισχύουν:

$$\boxed{\begin{gathered}\alpha^\nu\cdot\beta^\nu=(\alpha\cdot\beta)^\nu\\ \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu,\quad \beta\neq0\end{gathered}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

(i) $2^2\cdot5^2=(2\cdot5)^2=10^2$

(ii) $\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{5^3}{6^3}$

(iii) $(3\alpha)^3=3^3\cdot\alpha^3=27\alpha^3$

2. Δυνάμεις με ίσες βάσεις. – Πολλαπλασιασμός και διαίρεση.

Έχουμε π.χ.

$$3^4 \cdot 3^2 = (3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot)\cdot(3\cdot3) = 3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3 = 3^6 = 3^{4+2}$$

$$3^4 : 3^2 = \frac{3^4}{3^2} = \frac{3\cdot3\cdot3\cdot3}{3\cdot3} = 3\cdot3 = 3^2 = 3^{4-2}$$

$$3^2 : 3^4 = \frac{3^2}{3^4} = \frac{3\cdot3}{3\cdot3\cdot3\cdot3} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2} = 3^{2-4}$$

Γενικά ισχύουν:

$$\boxed{\begin{aligned} &\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu} \\ &\alpha^{\mu}:\alpha^{\nu} = \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu-\nu} \end{aligned}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

(i) $7^6 : 7^5 = 7^{6-5} = 7^1 = 7$

(ii) $7^6 : 7^6 = 7^{6-6} = 7^0 = 1$

(iii) $7^3 : 7^5 = 7^{3-5} = 7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

3. *Ύψωση δύναμης σε άλλη δύναμη.*

Έχουμε: π.χ.

$$(3^2)^4 = 3^2\cdot3^2\cdot3^2\cdot3^2 = 3^{2+2+2+2} = 3^{2\cdot4}$$

$$(3^{-2})^4 = 3^{-2}\cdot3^{-2}\cdot3^{-2}\cdot3^{-2} = 3^{(-2)\cdot4}$$

$$(3^{-2})^{-4} = \frac{1}{(3^{-2})^4} = \frac{1}{3^{-2}\cdot3^{-2}\cdot3^{-2}\cdot3^{-2}} = \frac{1}{3^{(-2)\cdot4}} = \frac{1}{3^{-(2\cdot4)}} = 3^{2\cdot4} = 3^{(-2)\cdot(-4)}$$

Γενικά ισχύει:

$$\boxed{(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\cdot\nu}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

(i) $(2^3)^{-6} = 2^{-18} = \frac{1}{2^{18}}$

(ii) $\frac{(-2)^{-4}}{(-9)^{-4}} = \frac{\frac{1}{(-2)^4}}{\frac{1}{(-9)^4}} = \frac{9^4}{2^4} = (\frac{9}{2})^4$

(iii) $(\frac{3}{5})^{-2} = \frac{1}{(\frac{3}{5})^2} = \frac{1}{\frac{3^2}{5^2}} = \frac{5^2}{3^2} = (\frac{5}{3})^2$

Αξιόλογες γραφές δεκαδικών αριθμών.

Έστω οι αριθμοί 2.137 και 45,637

Παρατηρούμε ότι:

(i) $2.137 = 2.000 + 100 + 30 + 7 = \mathbf{2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0}$ *(βλέπε και § 1.2)*

(ii) $45{,}6327 = 40 + 5 + 6 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{100} + 2 \cdot \frac{1}{1.000} + 7 \cdot \frac{1}{10.000}$

$$= \mathbf{4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3} + 7 \cdot 10^{-4}}$$

Επομένως κάθε αριθμός του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης εκφράζεται ως άθροισμα δυνάμεων του **10.**

Επίσης επειδή π.χ. είναι:

$$45{,}637 = \frac{45.637}{1.000} = 45.637 \cdot \frac{1}{1.000} = 45.637 \cdot 10^{-3}$$

$$45{,}6372 = \frac{456.372}{10.000} = 456.372 \cdot \frac{1}{10.000} = 456.372 \cdot 10^{-4}$$

Οι αριθμοί αυτοί είναι δύσκολο να γραφτούν και να διαβαστούν και πολύ περισσότερο να γίνουν πράξεις μεταξύ τους. Γι' αυτό τους γράφουμε με τη βοήθεια των δυνάμεων του 10. Με τη μορφή αυτή γίνονται σχετικά πιο εύκολα και οι πράξεις. Π.χ.

$$\begin{aligned} 1{,}4 \cdot 30000000000 \cdot 0{,}00000002 &= 14 \cdot 10^{-1} \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 2 \cdot 10^{-8} \\ &= (14 \cdot 3 \cdot 2)\, 10^{-1} \cdot 10^{10} \cdot 10^{-8} \\ &= 84 \cdot 10 \\ &= 840 \end{aligned}$$

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ

Η έννοια της τετραγωνικής ρίζας.

Αν αναζητήσουμε το θετικό αριθμό του οποίου το τετράγωνο είναι ο 9, ξέρουμε ότι αυτός είναι ο 3, αφού $3^2 = 9$.

Το 9 λοιπόν είναι το τετράγωνο του 3, ενώ το 3 λέμε ότι είναι η **τετραγωνική ρίζα** του 9 και γράφουμε $\sqrt{9} = 3$.

Γενικά έχουμε

Κάθε δεκαδικός αριθμός με ν δεκαδικά ψηφία μπορεί να γραφεί ως γινόμενο ενός ακεραίου και της δύναμης $10^{-\nu}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

(i) Η μάζα ηλεκτρονίου είναι 0,0000000000000000000000000009109 gr ή $9109 \cdot 10^{-31}$ gr

(ii) Ο όγκος του πυρήνα ενός ατόμου είναι περίπου
0,000000000000000000000000000000000001 cm^3 ή 10^{-36} cm^3

Στην Τεχνολογία και στη Φυσική χρησιμοποιούμε αριθμούς πολύ μικρούς όπως των Πρδ. 1 και 2 καθώς και πολύ μεγάλους όπως π.χ. η ταχύτητα του φωτός που είναι

3.0000000000 cm/sec ή $3 \cdot 10^{10}$ cm/sec

Με τον ίδιο τρόπο έχουμε: $\sqrt{16} = 4$, γιατί $4^2 = 16$, $\sqrt{36} = 6$, γιατί $6^2 = 36$, κτλ.

Ώστε: **Η τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ και είναι ένας θετικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό α.**

Το σύμβολο $\sqrt{\ }$ λέγεται **ριζικό** και ο αριθμός, που γράφεται κάτω από αυτό, λέγεται **υπόρριζο.**

Ορίζουμε ακόμα ότι: $\sqrt{0} = 0$

Από τα παραπάνω παραδείγματα είναι φανερό ότι για τους αριθμούς α, β≥0 ισχύει:

αν $\sqrt{\alpha} = \beta$, τότε $\beta^2 = \alpha$ και αντιστρόφως

Άμεση συνέπεια του ορισμού της τετρ. ρίζας είναι, για παράδειγμα, ότι $(\sqrt{2})^2 = 2$, $(\sqrt{5})^2 = 5$

Γενικά

$$\boxed{(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha \text{ (με } \alpha \geq 0)}$$

Οι αριθμοί 25, 0,36, 4/9, όπως και πολλοί άλλοι που μπορούν να γραφούν ως τετράγωνα ρητών αριθμών ($25 = 5^2$, $0{,}36 = 0{,}6^2$, $4/9 = (2/3)^2$), έχουν τετραγωνικές ρίζες $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{0{,}36} = 0{,}6$, $\sqrt{4/9} = 2/3$ που είναι ρητοί αριθμοί. Ενώ οι αριθμοί 2, 5, 0,12 που δεν μπορούν να γραφούν ως τετράγωνα ρητών αριθμών, έχουν τετραγωνικές ρίζες $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{0{,}12}$ που είναι άρρητοι αριθμοί.

Γενικά, **μια τετραγωνική ρίζα θα είναι ρητός αριθμός, αν το υπόρριζο μπορεί να γραφεί ως τετράγωνο ρητού αριθμού.**

Αν αυτό δε γίνεται, τότε η τετραγωνική ρίζα είναι άρρητος αριθμός.

Ιδιότητες τετραγωνικών ριζών

(1). Ας παρατηρήσουμε τον παρακάτω πίνακα.

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$	$\alpha\cdot\beta$	$\sqrt{\alpha\cdot\beta}$
4	9	$\sqrt{4}=2$	$\sqrt{9}=3$	$\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}=6$	$4\cdot 9=36$	$\sqrt{4\cdot 9}=6$

Διαπίστωση $\boxed{\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\cdot\beta}}$ (α,β≥0)

Είναι φανερό ότι η παραπάνω διαπίστωση ισχύει για όλες τις τετραγωνικές ρίζες που είναι ρητοί αριθμοί. Δεν ξέρουμε όμως αν αυτή ισχύει και για τις τετραγωνικές ρίζες που είναι άρρητοι αριθμοί (αφού τα αποτελέσματα των πράξεων με άρρητους αριθμούς τα βρίσκουμε, αντικαθιστώντας τους άρρητους με προσεγγίσεις).

Άρα:

«Για τους αριθμούς α,β ≥ 0 ισχύει, $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\cdot\beta}$ »

Παρατηρήσεις

i) Η ιδιότητα $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\cdot\beta}$ όπου $\alpha,\beta\geq 0$, μας λέει ότι: **Το γινόμενο δύο τετραγωνικών ριζών, ισούται με την τετραγωνική ρίζα του γινομένου των υπορρίζων.**

Η ιδιότητα αυτή ισχύει και για περισσότερες από δύο τετρ.ρίζες (με βάση την προσεταιριστική ιδιότητα). Π.χ. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{2\cdot3\cdot6}=\sqrt{36}=6$.

ii) Η ισότητα $\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$ μας λέει επίσης ότι η τετραγωνική ρίζα ενός γινομένου με **μη αρνητικούς** παράγοντες μπορεί να γραφεί ως γινόμενο των τετρ.ριζών των παραγόντων του. Π.χ $\sqrt{4\cdot3}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}=2\cdot\sqrt{3}$.

Αυτή η μετατροπή μας εξυπηρετεί για να γράφουμε πιο απλά ή ακόμη και να υπολογίζουμε τετραγωνικές ρίζες πολλών φυσικών αριθμών.

Π.χ $\sqrt{450}=\sqrt{2\cdot3^2\cdot5^2}$ (τρέψαμε το υπόρριζο σε γινόμενο πρώτων παραγόντων)

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{5^2}=\sqrt{2}\cdot3\cdot5=15\cdot\sqrt{2}$$

$$\sqrt{3969}=\sqrt{3^4\cdot7^2}=\sqrt{3^4}\cdot\sqrt{7^2}=3^2\cdot7=9\cdot7=63$$

iii) Να προσέξουμε ότι: Ενώ η τετραγωνική ρίζα $\sqrt{(-4)\cdot(-3)}$ υπάρχει, γιατί το υπόρριζο είναι ο θετικός αριθμός 12, **δεν** μπορούμε να γράψουμε

$\sqrt{(-4)\cdot(-3)}=\sqrt{(-4)}\cdot\sqrt{(-3)}$ γιατί τα σύμβολα $\sqrt{(-4)}$, $\sqrt{(-3)}$ δεν είναι πραγματικοί αριθμοί.

Αυτή η ρίζα γράφεται αλλιώς ως εξής:

$$\sqrt{(-4)\cdot(-3)}=\sqrt{+4\cdot3}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}=2\cdot\sqrt{3}$$

(2). Ας παρατηρήσουμε τον παρακάτω πίνακα.

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$	$\dfrac{\alpha}{\beta}$	$\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$
4	9	$\sqrt{4}=2$	$\sqrt{9}=3$	$\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{4}{9}$	$\sqrt{\dfrac{4}{9}}=\dfrac{2}{3}$

Διαπίστωση: $\boxed{\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}}$ (με α≥0 και β>0)

Για τον ίδιο λόγο, όπως και στο γινόμενο των τετραγωνικών ριζών, για να δεχτούμε ότι ισχύει η παραπάνω διαπίστωση στη γενικότητά της, πρέπει να την αποδείξουμε.

Άρα:

« Για τους αριθμούς α≥0 και β>0 ισχύει, $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ »

Παρατηρήσεις

i) Η ιδιότητα $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$, όπου α≥0 και β>0, μας λέει ότι: **Το πηλίκο δύο τετραγωνικών ριζών ισούται με την τετραγωνική ρίζα των υπορίζων.**

Π.χ. $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{10}{2}}=\sqrt{5}$

ii) Η ισότητα $\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}=\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$ μας λέει ότι η τετραγωνική ρίζα ενός κλάσματος με μη αρνητικούς όρους (και παρονομαστή ≠0) μπορεί να γραφεί ως κλάσμα με όρους τις αντίστοιχες τετραγωνικές ρίζες των όρων του.

Αυτή η μετατροπή μας εξυπηρετεί κάποιες φορές στον υπολογισμό τετραγωνικών ριζών δεκαδικών αριθμών.

Π.χ $\sqrt{0{,}0121}=\sqrt{\dfrac{121}{10^4}}=\sqrt{\dfrac{11^2}{10^4}}=\dfrac{\sqrt{11^2}}{\sqrt{10^4}}=\dfrac{11}{10^2}=0{,}11$.

iii) Να προσέξουμε ότι: Όπως στην ιδιότητα του γινομένου των τετρ.ριζών, έτσι και εδώ, ενώ υπάρχει η τετραγωνική ρίζα $\sqrt{\dfrac{-20}{-3}}$ **δεν** μπορούμε να γράψουμε $\sqrt{\dfrac{-20}{-3}}=\dfrac{\sqrt{-20}}{\sqrt{-3}}$.

(3) Αν α≥0 και κ≥1 φυσικός τότε ισχύει, $\left(\sqrt{\alpha}\right)^{\kappa}=\sqrt{\alpha^{\kappa}}$.

Πράξεις με τετραγωνικές ρίζες

Τα αποτελέσματα αριθμητικών παραστάσεων που περιέχουν και τετραγωνικές ρίζες υπολογίζονται, εφόσον οι τετραγωνικές ρίζες αντικατασταθούν με επιθυμητές προσεγγίσεις.

Επισημαίνουμε τα εξής:

i) Δεν είναι σωστό να γράφουμε: $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha + \beta}$.

Για παράδειγμα, το $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ δεν ισούται με το $\sqrt{8}$.

Τετραγωνικές ρίζες με το ίδιο υπόριζο μπορούμε να τις προσθέσουμε ή να τις αφαιρέσουμε. Π.χ είναι $5\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$ και

$$7\sqrt{2} - \sqrt{18} = 7\sqrt{2} - \sqrt{9 \cdot 2} = 7\sqrt{2} - \sqrt{9}\sqrt{2} = 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

ii) Το άθροισμα, η διαφορά, το γινόμενο και το πηλίκο ενός ρητού (≠0) με έναν άρρητο είναι άρρητος αριθμός.

Π.χ οι αριθμοί $7 + \sqrt{3}$, $\sqrt{3} - 5$, $2\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι άρρητοι αριθμοί.

Όμως πράξεις με άρρητους αριθμούς μπορεί να δώσουν αποτέλεσμα ρητό αριθμό. Π.χ $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{36} = 6$, $(7 + \sqrt{3}) - (\sqrt{3} - 5) = 7 + \sqrt{3} - \sqrt{3} + 5 = 12$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Σε ποια από τις παρακάτω ισότητες α, β, γ υπάρχει λάθος;

$-6 = (-1) \cdot (2 \cdot 3) = (-2) \cdot (-3) = +6$

α β γ

2. Ο αριθμός $(2^3)^{30} \cdot 5^{20} \cdot 5^{70}$ έχει:

i) 50 μηδενικά ii) 70 μηδενικά iii) 90 μηδενικά iv) 120 μηδενικά

3. Οι αριθμοί α και β είναι διάφοροι του μηδενός και ισχύει α+β=0. Βάλτε στο πλαίσιο το πρόσημο του γινομένου.

$\alpha \cdot \beta$ $\boxed{}$ $-2 \cdot \alpha\beta$ $\boxed{}$ $(-3)^5 \cdot \alpha\beta$ $\boxed{}$.

$\alpha^2\beta^2$ $\boxed{}$ $\alpha^3\beta^3$ $\boxed{}$ $(\alpha\beta)^5$ $\boxed{}$.

4. Βάλτε σε κύκλο την ένδειξη της σωστής απάντησης σε κάθε μια από τις παρακάτω ερωτήσεις.

Α) Αν ν περιττός φυσικός αριθμός, τότε η παράσταση $\alpha^\nu + (-\alpha)^\nu$ ισούται με,

i) $2\alpha^\nu$ ii) $\alpha^{2\nu}$ iii) $2\alpha\nu$ iv) $\alpha^{-\nu}$ v) 0

Β) Αν ν άρτιος φυσικός αριθμός, τότε η τιμή της παράστασης

$1^{-\nu} + (-1)^\nu + (-1)^{\nu+1} + (-1)^{\nu+2}$ είναι:

i) –3 ii) –2 iii) 0 iv) 2 v) 3

Γ) Αν α= 0,01 και β= 10^{-1}, τότε η τιμή της παράστασης $10^5\alpha^2\beta$ είναι:

i) 0,1 ii) 0 iii) 1 iv) 10 v) 100

Δ) Η ιδιότητα $\sqrt{a^k} = \left(\sqrt{a}\right)^k$ ισχύει:

i) όταν α<0 ii) όταν α≥0 iii) όταν $\alpha^\kappa \geq 0$ iv) σε κάθε περίπτωση

5. Να αντιστοιχίσετε με μια γραμμή κάθε κλάσμα της πρώτης στήλης με το αντίστοιχο ποσοστό (%) της δεύτερης στήλης.

Κλάσμα	Ποσοστό (%)
1/20	20%
2/5	84%
	42%
3/10	40%
12/25	25%
	5%
42/50	30%
2/8	48%
	10%

6. Βάλτε ένα Χ στο Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) στο:

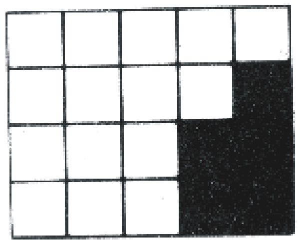
	Σ	Λ
$\sqrt{16}=-4$	☐	☐
$\sqrt{(-4)^2}=4$	☐	☐
$(\sqrt{16})^2=16$	☐	☐
$\sqrt{(-5)^2}=(\sqrt{-5})^2$	☐	☐
$(\sqrt{5})^3=5\sqrt{5}$	☐	☐

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ν' απλοποιηθούν τα κλάσματα $\frac{70}{35}, \frac{5}{15}, \frac{18}{20}, \frac{1.332}{148}$

2. Ποια από τα κλάσματα $\frac{2}{3}, \frac{7}{22}, \frac{6}{18}, \frac{10}{15}, \frac{3}{4}$ είναι ίσα με το $\frac{12}{18}$;

3. Αν ε το εμβαδόν του σκιαγραφημένου μέρους του διπλανού σχήματος, Ε όλου του ορθογωνίου και $\varepsilon = \mu \cdot E$ να βρεθεί η τιμή του μ.



4. Ποιές από τις επόμενες ισότητες είναι αληθείς;

(i) $\frac{7}{20} = 35\%$, (ii) $\frac{4}{5} = 70\%$, (iii) $\frac{1}{2} = 5\%$, (iv) $\frac{1}{8} = 125‰$, (v) $\frac{19}{40} = 190‰$.

5. Να γίνουν οι πράξεις:

(i) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, (ii) $\frac{8}{21} - \frac{1}{14}$, (iii) $\left(9 + \frac{7}{12} - \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right)$

6. Να γίνουν οι πράξεις:

(i) $\frac{7}{5} \cdot \frac{3}{5}$, (ii) $\frac{11}{12} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{14}{11}$, (iii) $\frac{1}{8} \cdot 9 \cdot \frac{112}{333}$

7. Να γίνουν οι πράξεις.

(i) $\frac{2}{15} : \frac{3}{15}$, (ii) $5 : \frac{10}{14}$, (iii) $\frac{6}{8} : 3$

8. Τα κλάσματα $\frac{7}{10}, \frac{2}{100}, \frac{3528}{1000}, \frac{28}{10^5}$ να γραφούν στη δεκαδική τους μορφή.

9. Οι δεκαδικοί 0,145, 1,7524, 0,001, 42,4, 563,0101 να γραφούν στην κλασματική τους μορφή.

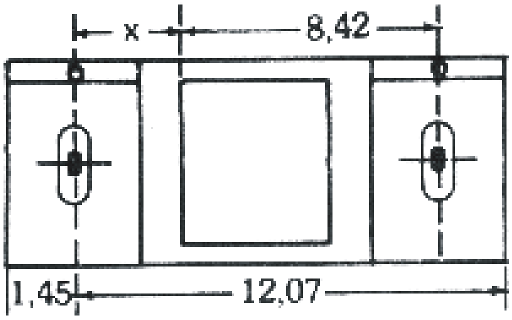
10. Ποιές από τις επόμενες ισότητες είναι αληθείς;

(i) $3{,}5 \cdot 1.000 = 3{,}5000$
(ii) $13{,}72 \cdot 100 = 1.372$
(iii) $0{,}0001 \cdot 10 = 0{,}1$
(iv) $1{,}32467 \cdot 1.000 = 13.246{,}7$
(v) $7{,}2 : 1.000 = 0{,}0072$
(vi) $513{,}5 : 10 = 5.135$
(vii) $12 : 100 = 0{,}12$
(viii) $5 : 100.000 = 0{,}00005$

11. Να βρείτε τα εξαγόμενα των πράξεων.

(i) $0{,}035 + 15{,}2$
(ii) $5 + 7{,}0001$
(iii) $5 - 3{,}0001$
(iv) $1{,}1 + 0{,}11 + 0{,}011$
(v) $315{,}3 - (311{,}17 + 4{,}13)$
(vi) $101{,}02 + 11{,}002 - 0{,}00001$

12. Στο παραπλεύρως σχέδιο να υπολογίσετε τη διάσταση x. Οι διαστάσεις δίνονται σε cm.



13. Να βρεθούν τα γινόμενα.

(i) $12{,}15 \cdot 3{,}21$
(ii) $5{,}01 \cdot 3{,}5$
(iii) $8{,}1 \cdot 13{,}15$
(iv) $4 \cdot 2{,}1 \cdot 3{,}5$
(v) $4 \cdot 3{,}1 \cdot 4{,}002$
(vi) $2{,}5\,(3{,}001 - 0{,}4)$

14. Να γίνουν οι διαιρέσεις:

(i) $372 : 0{,}03$, (ii) $726{,}4 : 4$, (iii) $3 : 8$

15. Να τραπούν σε δεκαδικούς τα κλάσματα.

$\frac{121}{200}, \frac{3}{16}, \frac{37}{160}, \frac{4}{33}, \frac{5}{6}$

16. Να τραπούν σε δεκαδικούς με προσέγγιση χιλιοστού οι παραστάσεις.

(i) $4 + \frac{5}{9}$, (ii) $\dfrac{2 - \frac{1}{2}}{3 - \frac{1}{3}}$, (iii) $\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{11}\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{11}\right)$

17. Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών: 625, 8100, 0,0144, 0,0009, $\frac{25}{16}$, $\frac{169}{49}$.

18. Να υπολογίσετε τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών 1164,2 και 45075 με προσέγγιση εκατοστού.

19. Να υπολογίσετε τις προσεγγίσεις των τετραγωνικών ριζών των αριθμών του διπλανού πίνακα.

	Προσέγγιση		
	Μονάδ	Δεκάτο	Εκατοστ
12000			
1200			
120			
12			

20. Χωρίς να υπολογίσετε τις τετραγωνικές ρίζες, να κάνετε τις πράξεις.

$$(2+\sqrt{7})\cdot(2-\sqrt{7})-6\cdot(\sqrt{7}-1)+2\sqrt{63}$$

21. Δίνονται οι προσεγγίσεις $\sqrt{2}\approx 1{,}41$ και $\sqrt{3}\approx 1{,}73$. Να υπολογίσετε το αποτέλεσμα της παράστασης $\sqrt{50}-2\sqrt{27}+\sqrt{6}$ **.**

22. Να συγκρίνετε τις παραστάσεις $\sqrt{5^2}+\sqrt{6^2}$ και $\sqrt{5^2+6^2}$ **.**

23. Η επιφάνεια μιας τετράγωνης πλατείας είναι 2071m^2. Να βρείτε με προσέγγιση δεκάτου πόσα m είναι κάθε πλευρά της.

24. Να δικαιολογείστε γιατί οι αριθμοί $\sqrt{3}$ και $\frac{3}{\sqrt{3}}$ είναι ίσοι. Να κάνετε το ίδιο και για τους αριθμούς $\sqrt{\frac{2}{3}}$ και $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

25. Κάθε αριθμό του διπλανού πίνακα να τον γράψετε με τη μορφή που δίνεται στις στήλες του.

	$(+\quad)^2$	$\sqrt{\ }$	$\sqrt{(+\quad)^2}$	$\sqrt{(-\quad)^2}$
2				
3				
2/3				
2,3				

26. Το γινόμενο των αριθμών της πρώτης γραμμής με αυτούς της πρώτης στήλης στον διπλανό πίνακα να το γράψετε μέσα στο αντίστοιχο πλαίσιο με τη μορφή μιας τετραγωνικής ρίζας.

	2	$\sqrt{2}$
3		
$\sqrt{3}$		