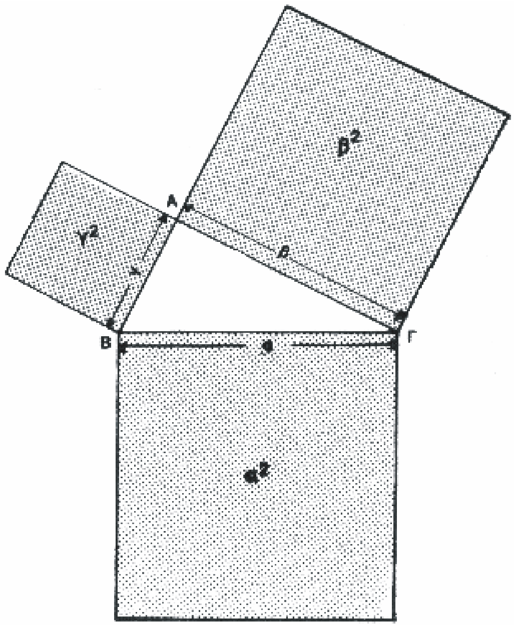
ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Ο έλληνας φιλόσοφος Πυθαγόρας ο Σάμιος (580 – 496 π.χ.) βρήκε ότι:

Το εμβαδό του τετραγώνου με πλευρά την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές τις κάθετες πλευρές του.

Δηλαδή

$$\boxed{\textit{Θεώρημα Πυθαγόρα} \quad \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2}$$

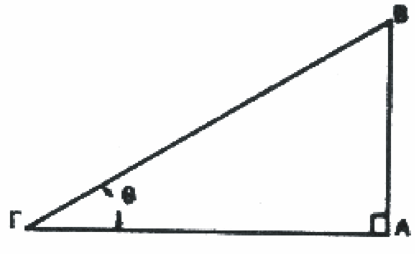


ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ορισμός τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου

Για κάθε οξεία γωνία θ ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ισχύουν:

- $\eta\mu\theta = \dfrac{AB \text{ (απέναντι κάθετη πλευρά)}}{B\Gamma \text{ (υποτείνουσα)}}$
- $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{A\Gamma \text{ (προσκείμενη κάθετη πλευρά)}}{B\Gamma \text{ (υποτείνουσα)}}$
- $\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{AB \text{ (απέναντι κάθετη πλευρά)}}{A\Gamma \text{ (προσκείμενη κάθετη πλευρά)}}$



Ο λόγος $\dfrac{1}{\varepsilon\varphi\theta}$ ονομάζεται σφθ. Δηλαδή

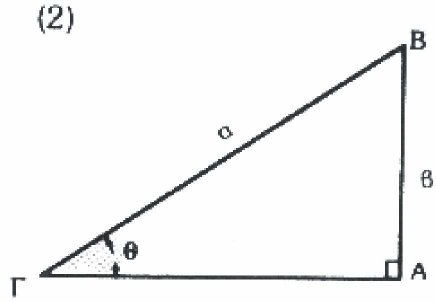
- $\sigma\varphi\theta = \dfrac{1}{\varepsilon\varphi\theta} = \dfrac{A\Gamma \text{ (προσκείμενη κάθετη πλευρά)}}{AB \text{ (απέναντι κάθετη πλευρά)}}$

Οι αριθμοί ημθ, συνθ, εφθ, σφθ ονομάζονται **τριγωνομετρικοί αριθμοί** της γωνίας θ.

Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών

Ξέρουμε, ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, $A = 90^0$ ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα: $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$ (1)

Από την (1) βρίσκουμε $\left(\frac{AB}{B\Gamma}\right)^2 + \left(\frac{A\Gamma}{B\Gamma}\right)^2 = 1$ (2)



Επειδή όμως $\eta\mu\theta = \frac{AB}{B\Gamma}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$

από την (2) έχουμε:

$$\boxed{\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1}$$

Ακόμη, σύμφωνα με τον ορισμό της εφθ και της σφθ έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\frac{\gamma}{\alpha}}{\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}, \quad \sigma\varphi\theta = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\frac{\beta}{\alpha}}{\frac{\gamma}{\alpha}} = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}$$

Ώστε για κάθε οξεία γωνία θ ισχύει:

$$\boldsymbol{\varepsilon\varphi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\sigma\varphi\theta = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}}$$

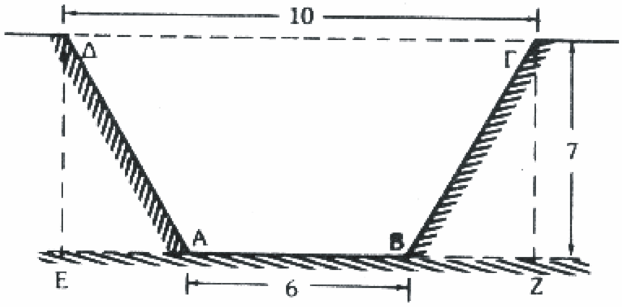
Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει:

$$\boldsymbol{\varepsilon\varphi\theta \cdot \sigma\varphi\theta = 1}$$

οπότε έχουμε $\varepsilon\varphi\theta = \frac{1}{\sigma\varphi\theta}$ και $\sigma\varphi\theta = \frac{1}{\varepsilon\varphi\theta}$

Εφαρμογές

1. Το διπλανό σχήμα παρουσιάζει τη διατομή ενός αυλακιού (ισοσκελές τραπέζιο). Να βρεθεί η περίμετρος ΔΑΒΓ της διατομής. Οι διαστάσεις είναι σε dm.



Λύση: Τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΑΔ και ΒΖΓ είναι ίσα (απόδειξη εύκολη). Άρα

$$ΕΑ = ΒΖ = \frac{10-6}{2} = 2\text{dm}.$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΖΓ, εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

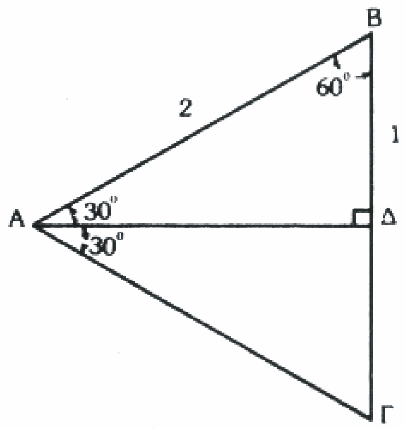
$$ΒΓ^2 = ΒΖ^2 + ΓΖ^2 = 2^2 + 7^2 = 4 + 49 = 53$$

Άρα $ΒΓ = \sqrt{53} = 7{,}28\text{dm}.$

Επομένως η περίμετρος είναι $ΔΑ + ΑΒ + ΒΓ = 7{,}28 + 6 + 7{,}28 = 20{,}56\text{dm}.$

2. Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών $θ = 30^0, θ = 45^0, θ = 60^0$

Λύση: Θεωρούμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 80) με πλευρά $α = ΑΒ = 2$. Φέρνουμε το ύψος ΑΔ που είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α} = 60^0$ και διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ.



Έτσι στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε:

$$ΒΔ = 1,\quad ΒΑΔ = 30^0,\quad ΔΒΑ = 60^0$$

και

$$ΑΔ^2 = ΑΒ^2 - ΒΔ^2 = 4 - 1 = 3$$

Άρα $ΑΔ = \sqrt{3}.$

Από τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε τώρα ότι

$$ημ30^0 = ημ\,ΔΑΒ = \frac{ΒΔ}{ΑΒ} = \frac{1}{2} \qquad εφ30^0 = εφ\,ΔΑΒ = \frac{ΒΔ}{ΑΔ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$συν30^0 = συν\,ΔΑΒ = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad σφ30^0 = σφ\,ΔΑΒ = \frac{ΑΔ}{ΒΔ} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

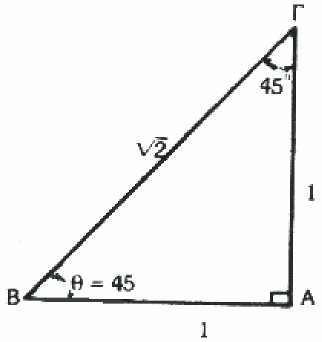
$$ημ60^0 = ημ\,ΑΒΔ = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad εφ60^0 = εφ\,ΑΒΔ = \frac{ΑΔ}{ΒΔ} = \sqrt{3}$$

$$συν60^0 = συν\,ΑΒΔ = \frac{ΒΔ}{ΑΒ} = \frac{1}{2} \qquad σφ60^0 = σφ\,ΑΒΔ = \frac{ΒΔ}{ΑΔ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Για τον υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας $\theta = 45^0$ θεωρούμε το ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά ΑΒ = 1

Τότε είναι $\theta = B = \Gamma = 45^0$ και $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = 1 + 1 = 2$. Άρα $B\Gamma = \sqrt{2}$.

Από τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών έχουμε:



$$\eta\mu 45^0 = \eta\mu\theta = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sigma\upsilon\nu 45^0 = \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{BA}{B\Gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varepsilon\phi 45^0 = \varepsilon\phi\theta = \frac{A\Gamma}{AB} = 1$$

$$\sigma\phi 45^0 = \sigma\phi\theta = \frac{BA}{B\Gamma} = 1$$

Τα αποτελέσματα που βρήκαμε παραπάνω τα συγκεντρώνουμε στον επόμενο πίνακα.

θ	30^0	45^0	60^0
ημθ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συνθ	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
εφθ	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
σφθ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sqrt{2} \simeq 1{,}414$

$\sqrt{3} \simeq 1{,}732$

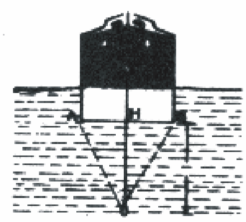
$\frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0{,}707$

$\frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 0{,}577$

3. Στο σημείο Α (σχ. 82) βρίσκεται μια ηχητική πηγή και στο σημείο Β ένας δέκτης ήχου. Το σύστημα αυτό προσαρμοσμένο όπως δείχνει η εικόνα, χρησιμοποιείται για την εύρεση του βάθους της θάλασσας. Δίδεται ότι:

- **ΑΒ = 32m.**
- **Η ταχύτητα του ήχου στη θάλασσα: 1510m/sec**
- **Ο χρόνος από τη στιγμή της «εκπομπής» από το Α μέχρι τη στιγμή της «λήψης» στο Β είναι 0,2sec.**

Ζητείται το βάθος της θάλασσας στο Ο.



Λύση: Έστω x το βάθος της θάλασσας. Από τον τύπο $S = \upsilon \cdot t$ βρίσκουμε ότι η «διαδρομή» ΑΟ + ΟΒ έχει μήκος S με

$$S = 1510 \cdot 0{,}2 = 302\text{m}.$$

Συνεπώς $$OB = \frac{302}{2} = 151\text{m}$$

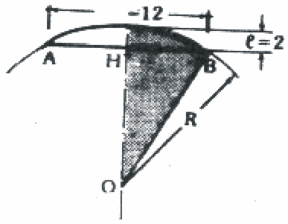
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκουμε

$$x^2 = 151^2 - 16^2 = 22.545 \text{ ή}$$
$$x \simeq 150{,}153 \text{ m}$$

4. Να υπολογιστεί η ακτίνα τόξου κύκλου (O,R) με τα στοιχεία που αναγράφονται στο σχήμα 83. Οι διαστάσεις είναι σε mm.

Λύση: Έχουμε $OH = R - 2$ και $AH = HB$ (αφού OH κάθετος AB). Επειδή το τρίγωνο OHB είναι ορθογώνιο, βρίσκουμε

$$R^2 = (R-2)^2 + 6^2 \quad \text{ή}$$
$$R = 10 \text{ mm}$$



5. Σ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1$ ορθή) είναι ΒΓ = 12cm και Γ = $42^0\,30'$. Να βρεθούν τα άλλα στοιχεία του τριγώνου (δηλ. ΑΒ, ΑΓ, $\hat{B}$)

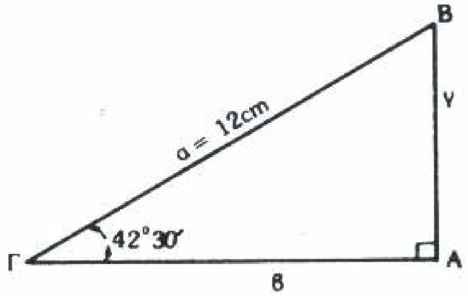
Λύση: Είναι (σχ. 6)

$$\eta\mu\Gamma = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{ή} \quad \gamma = \alpha\,\eta\mu\Gamma.$$

$$\text{και } \sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{ή} \quad \beta = \alpha\,\sigma\upsilon\nu\Gamma.$$

Επειδή $\alpha = 12$cm, $\Gamma = 42^0\,30'$ έχουμε:

$\gamma = 12\eta\mu(42^0\,30') = 12 \cdot 0{,}6756$
$= 8{,}1072$ cm.
$\beta = 12\sigma\upsilon\nu(42^0\,30') = 12 \cdot 0{,}7373$
$= 8{,}8476$ cm.



Σχ. 6

Επειδή $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^0$ έχουμε ότι $\hat{B} = 90^0 - \hat{\Gamma}$.

Άρα $\hat{B} = 90^0 - (42^0\,30') = 89^0\,60') - (42^0\,30') = 47^0\,30'$

6. Στο τρίγωνο του σχήματος 7 το ΑΔ είναι ύψος του. Να βρεθούν οι τρεις πλευρές του και η γωνία Α.

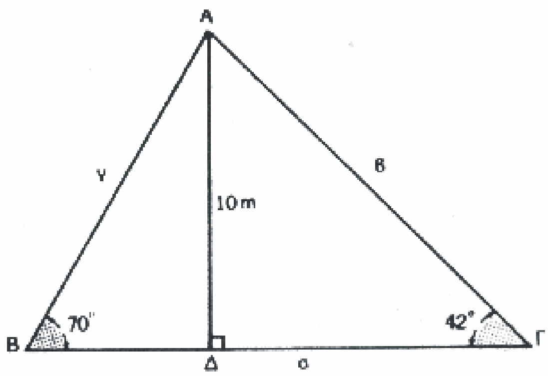
Λύση: Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε

$$\eta\mu B = \frac{A\Delta}{\gamma} \quad \text{ή} \quad \gamma = \frac{A\Delta}{\eta\mu B} = \frac{10}{\eta\mu 70^0}$$

$$= \frac{10}{0{,}9397} = 10{,}64 \text{ cm}$$

$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{B\Delta}{\gamma} \quad \text{ή} \quad B\Delta = \gamma\,\sigma\upsilon\nu B$$

$$= 10{,}64 \cdot 0{,}3420 \simeq 3{,}64 \text{ cm.}$$

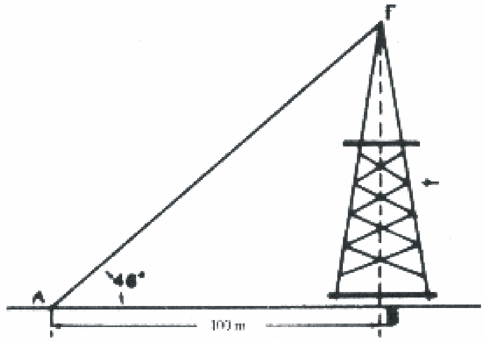


Όταν εργαστούμε ανάλογα και στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ βρίσκουμε:

$$\beta = 14{,}95 \text{ cm} \quad \text{και} \quad \Gamma\Delta = 11{,}11 \text{ cm}$$

Επίσης έχουμε $\alpha = B\Gamma = B\Delta + \Delta\Gamma = 3{,}64 + 11{,}11 = 14{,}75$ cm.
Για τη γωνία Α, επειδή $A + B + \Gamma = 180^0$, βρίσκουμε $A = 180^0 - (70^0 + 42^0) = 180^0 - 112^0 = 68^0$.

7 . **Να βρεθεί το ύψος $h = ΒΓ$ του στύλου στο παραπλεύρως σχήμα.**



Λύση: Είναι $εφ\,A = \dfrac{h}{AB}$ ή

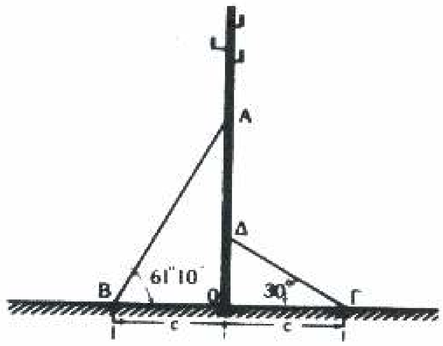
$$h = AB \cdot εφA$$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$h = 100 \cdot εφ46^0 = 100 \cdot 1{,}036$$
$$= 103{,}6$$

Ώστε το ύψος του στύλου είναι 103,6 m.

8 . **Στο διπλανό σχήμα 9 η απόσταση ΑΔ είναι 3m. Να βρεθεί το c.**



Λύση: Από το σχήμα έχουμε:

$$εφB = \frac{OA}{BO} \quad \text{και} \quad εφΓ = \frac{OΔ}{OΓ} \quad \text{ή}$$

$OA = BO \cdot εφB$ και $OΔ = OΓ \cdot εφΓ$

Αντικαθιστώντας προκύπτει:

$OA = c\,εφ(61^0\,10')$ και $OΔ = c\,εφ30^0$ ή

$OA = 1{,}816\,c$ και $OΔ = 0{,}577\,c$.

Είναι όμως $AΔ = OA - OΔ = 1{,}816\,c - 0{,}577c = (1{,}816 - 0{,}577)c = 1{,}239c$

Επειδή, όμως $AΔ = 3m$, έπεται ότι:

$$1{,}239c = 3 \quad \text{ή} \quad c = \frac{3}{1{,}239} \simeq 2{,}421$$

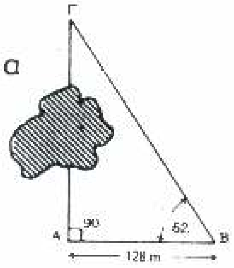
Ώστε $c = 2{,}421$ m.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

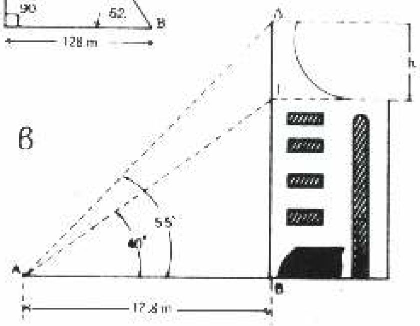
1. Σ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1$ορθ) είναι $ΑΓ = 7{,}5$ cm και $\hat{\Gamma} = \frac{\pi}{8}$. Να βρεθούν τα άλλα στοιχεία του τριγώνου (δηλ. ΒΓ, ΑΒ, $\hat{B}$) με προσέγγιση εκατοστού.

α



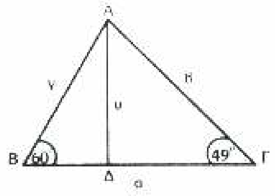
2. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε την απόσταση ΑΓ. (σχ. α)

β

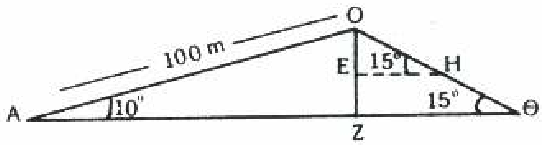


Στο διπλανό σχήμα να υπολογιστεί το ύψος h. (σχ. β)

3. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος το υ είναι ύψος. Να υπολογιστούν το υ και οι πλευρές β και γ με προσέγγιση εκατοστού, αν $α = 18$ m.

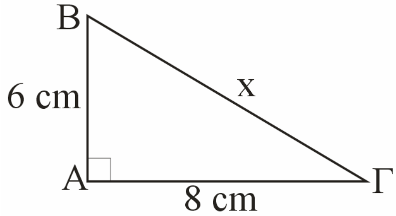


4. Ανεβαίνει κάποιος ένα δρόμο ΑΟ = 100 m και μετά κατεβαίνει ΟΗ = 40 m, όπως δείχνει το διπλανό σχήμα. Να βρεθεί η διαφορά ύψους ΕΖ.

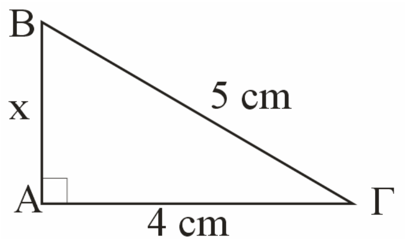


5. Ένα αεροπλάνο απογειώνεται και αφήνει το έδαφος με γωνία 10^o. Αφού διανύσει 1000m, αρχίζει να ανυψώνεται με γωνία 20^o ως προς το έδαφος. Να βρείτε σε τι ύψος θα πετάει, όταν θα έχει διανύσει 2km από τη στιγμή της απογείωσης. (Δίνεται ημ10^o=0,174, ημ20^o=0,342).

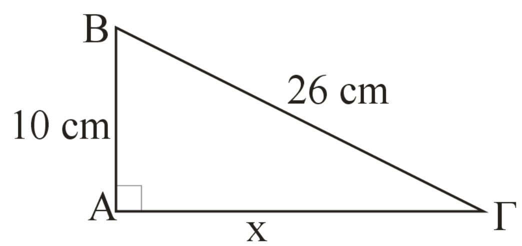
6. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ να υπολογιστεί το μήκος της πλευράς x.



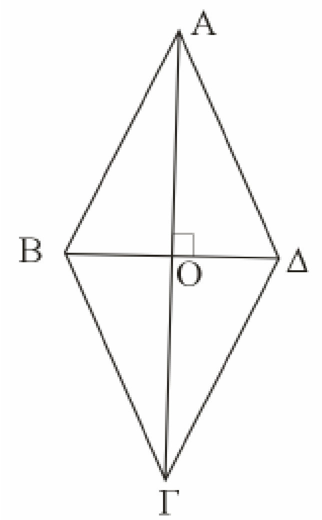
7. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ να υπολογιστεί το μήκος της πλευράς x.



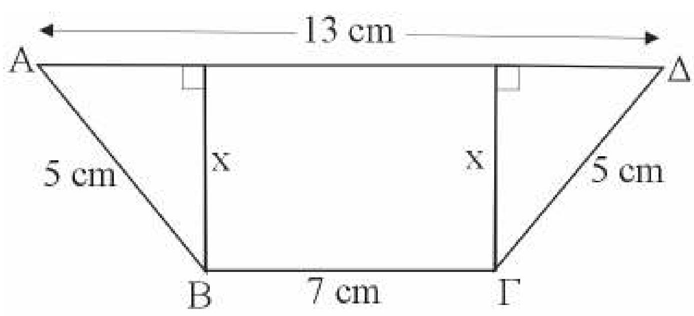
8. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ να υπολογιστεί το μήκος της πλευράς x.



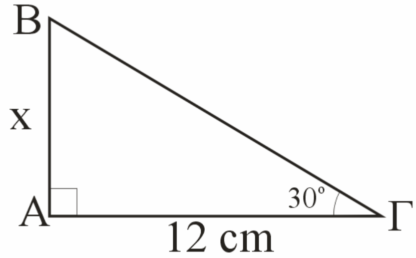
9. Στο διπλανό ρόμβο ΑΒΓΔ οι διαγώνιες έχουν μήκη (ΑΓ)=16 m και (ΒΔ)=12 m. Να υπολογιστεί η περίμετρος του ρόμβου.



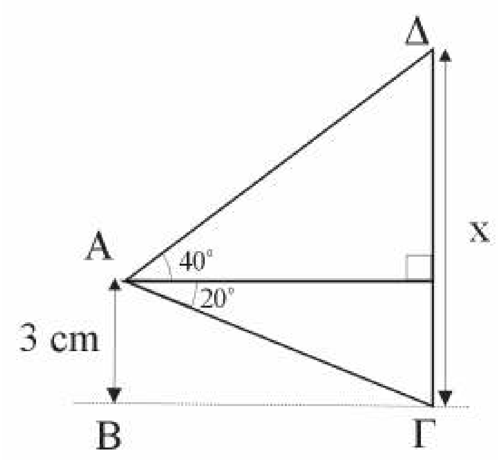
9. Στο διπλανό ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ τα μήκη των πλευρών είναι (ΑΒ)=(ΓΔ)=5 cm, (ΑΔ)= 13 cm και (ΒΓ)= 7 cm. Να υπολογιστεί το μήκος του ύψους x.



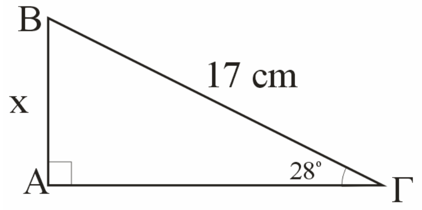
10. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ να υπολογιστεί το μήκος της πλευράς x.



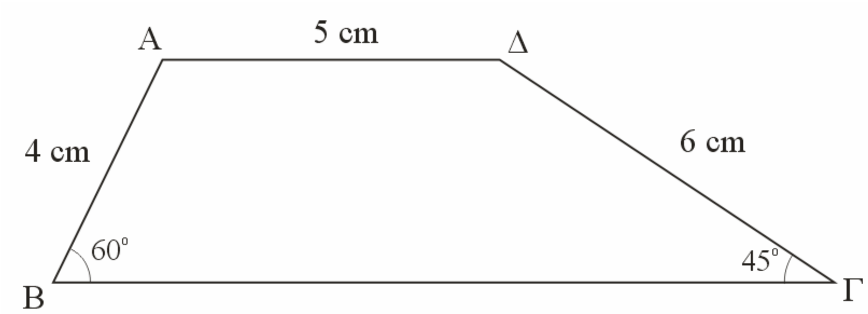
11. Στο διπλανό σχήμα να υπολογιστεί το μήκος του ύψους x.



12. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ να υπολογιστεί το μήκος της πλευράς x.



12. Στο διπλανό τραπέζιο ΑΒΓΔ να υπολογιστεί το μήκος της μεγάλης βάσης ΒΓ.



ΜΕΤΡΗΣΗ ΜΕΓΕΘΩΝ

Μέγεθος ονομάζουμε οτιδήποτε μπορεί να μετρηθεί. Γνωστά μεγέθη είναι το μήκος, η επιφάνεια, ο όγκος, το βάρος, ο χρόνος, η θερμοκρασία κ.ά.
Μέτρηση ενός μεγέθους είναι η σύγκρισή του με ένα άλλο ομοειδές μέγεθος το οποίο θεωρούμε ως μονάδα.

Πίνακας μονάδων βασικών μεγεθών

Μονάδες μήκους	Βασική μονάδα μέτρησης του μήκους είναι το **μέτρο (m).** Τα πολλαπλάσια και οι υποδιαιρέσεις του μέτρου είναι: α) πολλαπλάσια: i) **δεκάμετρο (dam). 1dam=10m** ii**) εκατόμετρο (hm). 1hm=100m** iii) **χιλιόμετρο (km). 1km=1.000m** β) υποδιαιρέσεις: i) **δεκατόμετρο ή παλάμη (dm). 1m=10dm** **ii) εκατοστόμετρο ή πόντος (cm). 1m=100cm** **iii) χιλιοστόμετρο ή χιλιοστό (mm). 1m=1.000mm** Άλλες μονάδες μέτρησης μήκους είναι: i) **η γυάρδα (yrd**). Η γυάρδα υποδιαιρείται σε 3 πόδια (ft) και το κάθε πόδι 12 σε ίντσες (in). **1yrd=3ft=36in** Επίσης η σχέση μεταξύ του μέτρου και της γυάρδας είναι: **1yrd=0,9144m=91,44cm** **ii) το μίλι** (χρησιμοποιείται για μεγάλες αποστάσεις) **1μίλι=1609m=1,609km** Στη ναυτιλία χρησιμοποιείται το **ναυτικό μίλι.** **1ναυτικό μίλι=1852m=1,852km**
Μονάδες Εμβαδού	Βασική μονάδα μέτρησης του εμβαδού είναι το **τετραγωνικό μέτρο (m^2).** Τα πολλαπλάσια και οι υποδιαιρέσεις του τετραγωνικού μέτρου είναι: α) πολλαπλάσια: i)**τετραγωνικό δεκάμετρο (dam^2). $1dam^2=100m^2$** ii**) τετραγωνικό εκατόμετρο (hm^2). $1hm^2=10.000m^2$** iii) **τετραγωνικό χιλιόμετρο (km^2). $1km^2=1.000.000m^2$** ένα ακόμη πολλαπλάσιο που χρησιμοποιείται για μεγάλες εκτάσεις είναι το **στρέμμα** **1 στρέμμα=$1000m^2$** β) υποδιαιρέσεις: i)**τετραγωνικό δεκατόμετρο ή τετραγωνική παλάμη (dm^2). $1m^2=100dm^2$** **ii) τετραγωνικό εκατοστόμετρο ή τετραγωνικός πόντος (cm^2). $1m^2=10.000cm^2$** **iii) τετραγωνικό χιλιοστόμετρο ή τετραγωνικό χιλιοστό (mm^2). $1m^2=1.000.000mm^2$**

Μονάδες Όγκου	Βασική μονάδα μέτρησης του όγκου είναι **το κυβικό μέτρο (m^3).** Οι υποδιαιρέσεις του κυβικού μέτρου είναι: **i) κυβικό δεκατόμετρο ή κυβική παλάμη (dm^3).** **$1m^3$=1.000dm^3** **ii) κυβικό εκατοστόμετρο ή κυβικός πόντος (cm^3).** **$1m^3$=1.000.000cm^3** **iii) κυβικό χιλιοστόμετρο ή κυβικό χιλιοστό (mm^3).** **$1m^3$=1.000.000.000mm^3** Για να εκφράσουμε τον όγκο υγρών συνήθως χρησιμοποιούμε το **λίτρο (l)** το οποίο είναι 1dm^3 . Επομένως το 1cm^3 είναι το **χιλιοστόλιτρο (ml)** **1l =1dm^3=1.000cm^3=1.000ml**
Μονάδες Μάζας	Βασική μονάδα μέτρησης της μάζας (στην καθημερινότητα συχνά χρησιμοποιούμε αντί του όρου «μάζα» το όρος «βάρος») είναι **το χιλιόγραμμο ή κιλό (kg).** Πολλαπλάσιο του κιλού είναι **ο τόνος (tn).** **1tn=1.000kg** Υποδιαιρέσεις του κιλού είναι: **i) το γραμμάριο (g).** **1kg=1.000g** **ii) το χιλιοστογραμμάριο (mg-μιλιγκράμ).** **1kg=1.000.000mg**
Μονάδες Χρόνου	Βασική μονάδα μέτρησης του χρόνου είναι **το δευτερόλεπτο (s).** Άλλες μονάδες είναι: i) **το λεπτό (min).** **1min=60s** **ii) η ώρα (h).** **1h=60min** **Άρα έχουμε: 1h=60min=3600s**

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες:

α) 23, 45m=.......... dm = ... cm =..............mm

β) 567cm =............dm =.............. m=....................mm

γ) 3,75 km = ... m =...............cm =..................mm

δ) 76234mm =............. cm =................dm =.............m

2. Τα παρακάτω μήκη να γραφτούν σε αύξουσα σειρά.

α) 0,04765km, 0,432m, 4321646cm, 562375032mm.
β) 57643mm, 542dm, 0,53282m, 5739cm, 0,05637km.

3. α) Να βρείτε, σε m, την πλευρά ενός ισοπλεύρου τριγώνου το οποίο έχει περίμετρο 16,5cm.
β) Να βρείτε την περίμετρο σε mm ενός ισοσκελούς τριγώνου του οποίου η βάση έχει μήκος 0,034m και η καθεμία από τις ίσες πλευρές του έχει μήκος διπλάσιο από το μήκος της βάσης.

4. Ένα αεροπλάνο πετάει σε ύψος 2.800 ft και ένα άλλο σε ύψος 980m. Ποιο από τα δύο αεροπλάνα πετάει ψηλότερα;

5. Η απόσταση από το λιμάνι του Πειραιά μέχρι το λιμάνι της Σούδας είναι περίπου 165 ναυτικά μίλια. Πόσα χιλιόμετρα είναι η απόσταση αυτή; Κάνετε σύγκριση με την απόσταση Αθήνα – Λάρισα.

6. Η διάμετρος ενός σωλήνα (α) είναι 1,5 in και ενός άλλου σωλήνα (β) είναι 3,5cm. Ποιος σωλήνας έχει μεγαλύτερη διάμετρο;

7. Πόσα cm είναι η διαγώνιος της οθόνης ενός υπολογιστή, όταν λέμε ότι είναι 32 in;

8. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες:

α) 62m^2 =.............. dm^2 =.....................cm^2 =....................mm^2
β) 0,049km^2 =......................m^2 =.......................στρέμματα
γ) 25476mm^2 =......................cm^2 =.......................dm^2 =.....................m^2
δ) 4,35στρέμματα =..........................m^2 =.......................dm^2 .

9. Η Νάξος έχει έκταση 428000 στρέμματα, ενώ η Σάμος 476km^2. Ποιο από τα δύο νησιά είναι μεγαλύτερο σε έκταση;

10. Ένα κτήμα έχει 300 ελιές φυτεμένες. Αν στα 220 m^2 υπάρχουν 8 ελιές, πόσα στρέμματα είναι το κτήμα;

11. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες:

α) 25m^3 =.............. dm^3 =.....................cm^3 =....................mm^3

β) 0,0037km^3 =......................m^3 =....................... l
γ) 2547632mm^3 =......................cm^3 =.......................dm^3 =.....................m^3
δ) 45,23 l =..........................m^3 =.......................dm^3

12. Ένα βαρέλι περιέχει 150 l λάδι. Θέλουμε να το συσκευάσουμε σε δοχεία χωρητικότητας 750 ml. Πόσα περίπου δοχεία θα χρειαστούμε;

13. Ένα αυτοκίνητο στα 100 km καταναλώνει 8 λίτρα (l) βενζίνης. Αν το ρεζερβουάρ χωράει 42 λίτρα και η τιμή της βενζίνης είναι 1,5 € το λίτρο, πόσα € θα δώσει για να το γεμίσει και πόσα χιλιόμετρα μπορεί να ταξιδέψει;

14. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:
α) 2,456kg =...............g =...................... mg
β) 29,047 mg =................. g =.................... kg
γ) 0,34 t =......................kg =.........................g

15. Ζυγίζουμε ένα κουτί που περιέχει 20 ίδια πακέτα και το βάρος του είναι 3kg. Αν το απόβαρο του κουτιού είναι 350g, να υπολογίσετε το βάρος του κάθε πακέτου.

16. Το βιβλίο της Γεωμετρίας ζυγίζει 0,750 kg, της Άλγεβρας είναι κατά 350 g ελαφρύτερο, ενώ της Φυσικής είναι κατά 50 g βαρύτερο. Ποιο είναι το βάρος μιας σχολικής τσάντας που περιέχει τα παραπάνω βιβλία και 4 τετράδια βάρους 60 g το καθένα, αν όταν είναι άδεια αυτή ζυγίζει 1,4 kg.

17. α) Να βρείτε πόσα λεπτά (min) και πόσα δευτερόλεπτα (s) έχει μία μέρα (το εικοσιτετράωρο). β) Να βρείτε την ηλικία σας σε έτη, σε μήνες, σε μέρες (1 έτος=365 μέρες).

18. Να τοποθετήσετε σε φθίνουσα σειρά τους παρακάτω χρόνους:
1,5 h, 150 min, 240000 s, 1,2 h.

19. Πόσα χρόνια πέρασαν από τη μάχη του Μαραθώνα που έγινε το 490 π.χ. ;

20. Ένα ξεκινά στις 9.15 π.μ από την Αθήνα και φθάνει στη Θεσσαλονίκη 2.35 μ.μ. Πόση ήταν η διάρκεια του ταξιδιού;

21. Μετατρέψτε: α) γωνία 53,28^o (μοίρες) σε πρώτα λεπτά (') β) γωνία 2765 ' (πρώτα λεπτά) σε μοίρες.

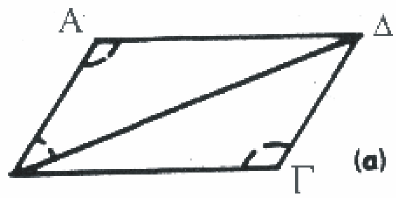
ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ-ΤΡΑΠΕΖΙΑ

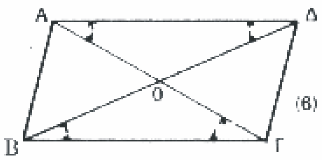
Παραλληλόγραμμο

Παραλληλόγραμμο ονομάζεται το τετράπλευρο, που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες. (βρίσκονται αντίστοιχα σε παράλληλες ευθείες).

Μπορούμε να δείξουμε ότι:
Στο παραλληλόγραμμο

- **Κάθε διαγώνιός του το χωρίζει σε δύο ίσα τρίγωνα.**
- **Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.**
- **Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.**
- **Οι διαγώνιές του διχοτομούνται.**





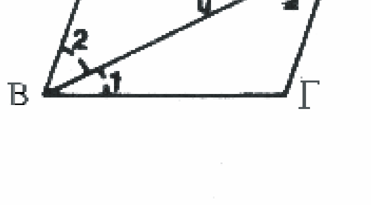
Για να κρίνουμε αν ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο έχουμε και τα εξής *κριτήρια*.

Ένα (κυρτό) τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, αν ισχύει μία από τις επόμενες προτάσεις:

- **Οι απέναντι πλευρές του ΑΒΓΔ είναι ίσες.**
- **Δύο απέναντι πλευρές του ΑΒΓΔ είναι ίσες και παράλληλες.**
- **Οι απέναντι γωνίες του ΑΒΓΔ είναι ίσες.**
- **Οι διαγώνιες του ΑΒΓΔ διχοτομούνται.**
- **Μια γωνία του ΑΒΓΔ είναι παραπληρωματική καθεμιάς από τις δύο διαδοχικές της γωνίες.**

Απόδειξη: (Θα αποδείξουμε ενδεικτικά μόνο την α΄ πρόταση).

Φέρνουμε τη διαγώνιο ΒΔ και τότε έχουμε: $\overset{\triangle}{A\Delta B} = \overset{\triangle}{B\Delta\Gamma}$ γιατί $AB = \Delta\Gamma$, $A\Delta = B\Gamma$, $B\Delta = B\Delta$. Άρα ($\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$ και $\hat{\Delta}_2 = \hat{B}_2$) οπότε αντίστοιχα είναι ($A\Delta // B\Gamma$ και $AB // \Delta\Gamma$). Συνεπώς το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.



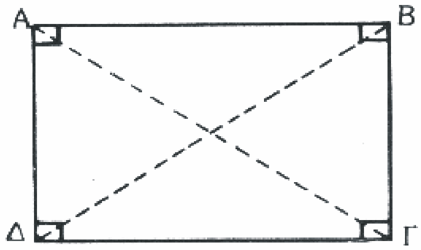
ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Σε ένα παραλληλόγραμμο η μία πλευρά του χαρακτηρίζεται συνήθως **βάση** και η απόσταση μιας απέναντι κορυφής του από τη βάση **ύψος.**

Ορθογώνιο.

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ή απλά **ορθογώνιο** ονομάζεται το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες του του ορθές.

Θα αποδείξουμε ότι:

Στο ορθογώνιο οι διαγώνιές του είναι ίσες.



Απόδειξη: Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ είναι ορθογώνια και ίσα αφού (ΒΓ = ΒΓ, ΑΒ = ΓΔ, Β = Δ = 90^0). Συνεπώς ΑΓ = ΒΔ.

Για να κρίνουμε αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο έχουμε τα εξής κριτήρια:

Ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο αν ισχύει μία από τις προτάσεις:

- **Μία γωνία του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι ορθή.**
- **Οι διαγώνιες του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι ίσες.**

Απόδειξη: i) Αφήνεται για άσκηση.

ii) Ας υποθέσουμε ότι ΑΓ = ΒΔ (σχ. 50). Τότε επειδή ΒΓ = ΒΓ, ΑΓ = ΒΔ, ΑΒ = ΔΓ έχουμε τριγ. ΑΒΓ = τριγ. ΒΓΔ (1). Από την (1) προκύπτει $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (2).

Όμως σε κάθε παραλληλόγραμμο είναι και $B + \Gamma = 180^0$. (3)

Συνεπώς από τις (2) και (3) έχουμε $2B = 180^0$ ή $B = 90^0$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Είναι φανερό ότι **βάση** και **ύψος** ενός ορθογωνίου είναι δυο διαδοχικές πλευρές του, που λέγονται **διαστάσεις** του ορθογωνίου.

Ρόμβος

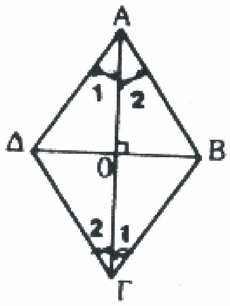
Ρόμβος ονομάζεται το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

Θα αποδείξουμε ότι:

Οι διαγώνιες του ρόμβου τέμνονται κάθετα και διχοτομούν τις γωνίες του.

Απόδειξη: Έχουμε τριγ. ΑΟΒ = τριγ. ΒΟΓ γιατί ΒΟ = ΒΟ, ΑΒ = ΒΓ, ΑΟ = ΟΓ. Συνεπώς $B\hat{O}A = B\hat{O}\Gamma$

και $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$. Επειδή όμως $B\hat{O}A + B\hat{O}\Gamma = 180^o$ θα είναι $BOA = BO\Gamma = 90^o$ δηλαδή η ΒΟ είναι κάθετη στην ΑΓ. Ακόμη επειδή ΑΒ//ΓΔ και ΒΓ//ΑΔ έχουμε $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1, \hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2$ δηλαδή $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, που σημαίνει ότι η διαγώνιος ΒΔ διχοτομεί τις γωνίες Β και Δ. Όμοια εργαζόμαστε για τη διαγώνιο ΑΓ.



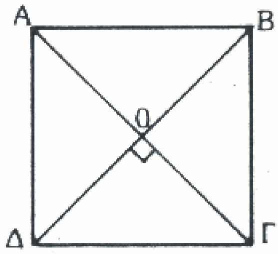
Μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

Ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, αν ισχύει μία από τις προτάσεις:

- **Δύο διαδοχικές πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι ίσες.**
- **Οι διαγώνιες του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τέμνονται κάθετα.**
- **Μία διαγώνιος του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ διχοτομεί μία γωνία του.**

Τετράγωνο.

Τετράγωνο ονομάζεται το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ορθές. Δηλαδή, τετράγωνο είναι το παραλληλόγραμμο, που είναι συγχρόνως ορθογώνιο και ρόμβος.

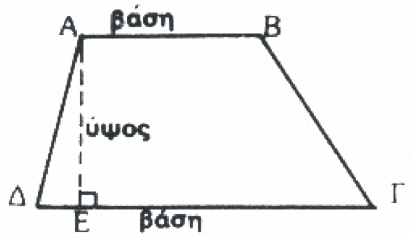


ΑΣΚΗΣΗ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ

Να δείξετε ότι οι διαγώνιες του τετραγώνου είναι κάθετες.

Το τραπέζιο.

Το τετράπλευρο, που έχει *δύο μόνο* απέναντι πλευρές του παράλληλες, λέγεται **τραπέζιο.** Οι παράλληλες πλευρές λέγονται **βάσεις** και η απόστασή τους, **ύψος** του τραπεζίου.



Ένα τραπέζιο, που έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες, λέγεται **ισοσκελές τραπέζιο.**

Αποδεικνύεται ότι:

Σε ένα ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ.

- **Οι γωνίες, που πρόσκεινται σε κάθε βάση του, είναι ίσες.**
- **Οι διαγώνιές του είναι ίσες.**

Αντίστροφα.

Ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, αν αληθεύει μία από τις συνθήκες:

- **Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μία βάση του, είναι ίσες.**
- **Οι διαγώνιές του είναι ίσες.**
- **Η ευθεία, που συνδέει τα μέσα των βάσεων, είναι κάθετη σ' αυτές.**

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Χαρακτηρίστε την κάθε μία από τις παρακάτω φράσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

α. Ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος. (Σ) (Λ)

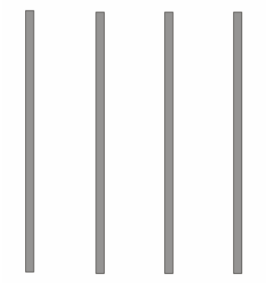
β. Ένας ρόμβος είναι παραλληλόγραμμο. (Σ) (Λ)

γ. Ένα τετράγωνο είναι και ρόμβος. (Σ) (Λ)

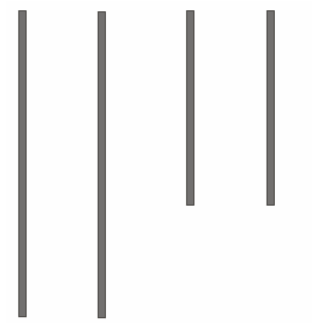
δ. Η διαγώνιος του ορθογωνίου χωρίζει το ορθογώνιο σε δύο ίσα ορθογώνια τρίγωνα. (Σ) (Λ)

ε. Η διαγώνιος του τετραγώνου το χωρίζει σε δύο ισοσκελή τρίγωνα. (Σ) (Λ)

2. Τι είδους τετράπλευρα μπορούν να κατασκευαστούν και με τις τέσσερεις ίσες ράβδους της διπλανής εικόνας; (Δικαιολογείστε την απάντηση).

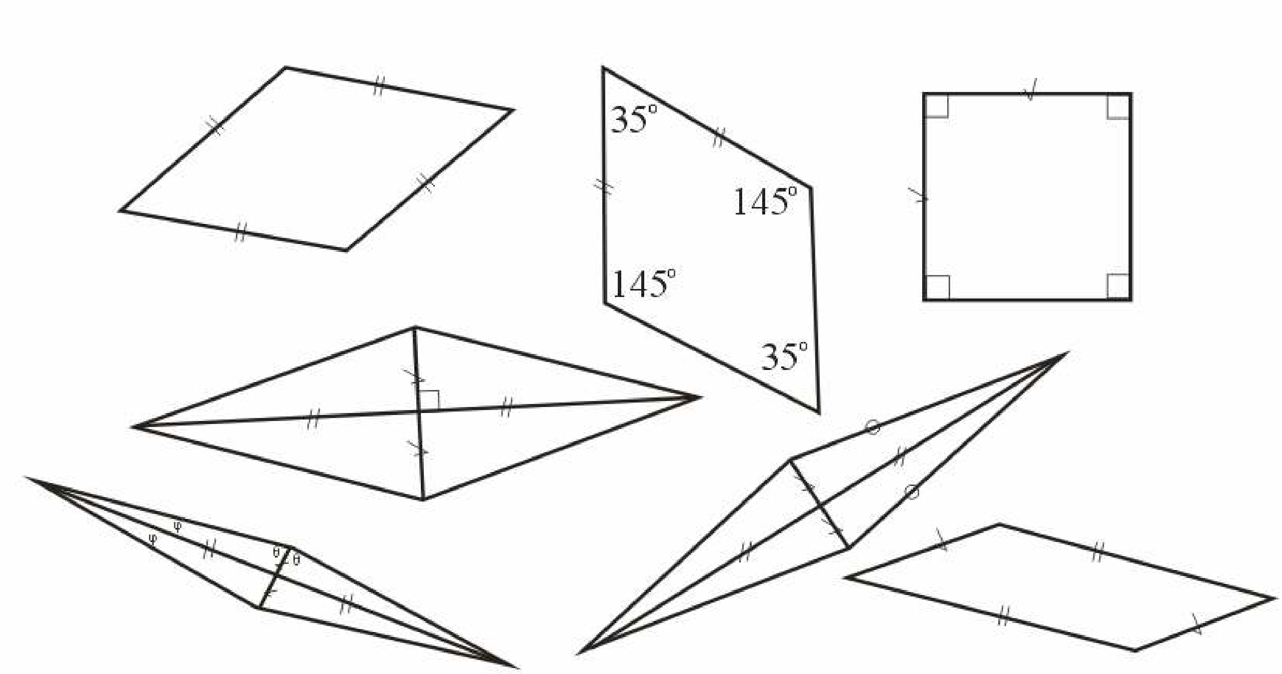


3. Τι είδους τετράπλευρα μπορούν να κατασκευαστούν και με τις τέσσερεις ίσες ράβδους της διπλανής εικόνας; (Δικαιολογείστε την απάντηση).



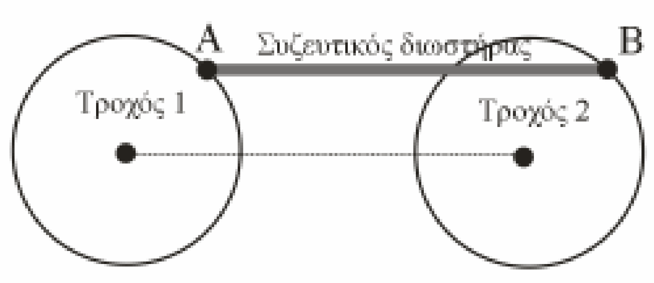
4. Εξηγείστε γιατί το διπλανό τετράγωνο είναι παραλληλόγραμμο. Τι παρατηρείτε για τις διπλανές (προσκείμενες) γωνίες;

5. Κάποιο από τα παρακάτω τετράπλευρα δεν ανήκει στην ίδια κατηγορία με όλα τα υπόλοιπα. Εξηγείστε το γιατί.



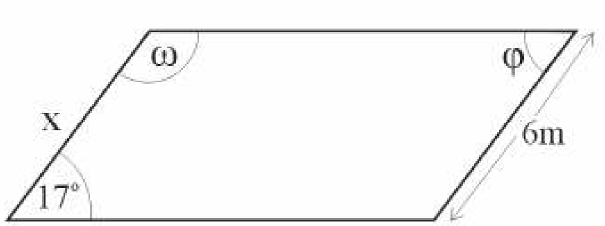
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δύο τροχοί με ίσες ακτίνες συνδέονται με ένα διωστήρα που έχει μήκος ίσο με την απόσταση των αξόνων των δύο τροχών. Να δικαιολογήσετε γιατί ο διωστήρας είναι πάντοτε παράλληλος προς την ευθεία που ενώνει τα κέντρα των τροχών.

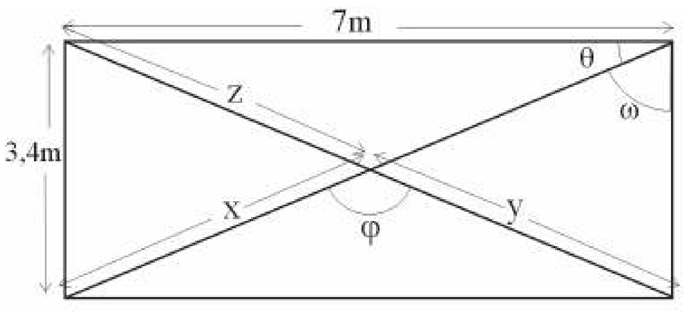


2. Αν σε ένα παραλληλόγραμμο μία γωνία του είναι ορθή να δικαιολογήσετε γιατί το παραλληλόγραμμο αυτό πρέπει να είναι ορθογώνιο.

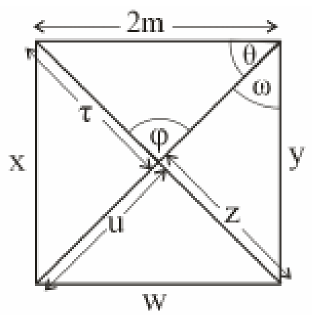
3. Αν το διπλανό τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο να υπολογιστεί το μήκος της πλευράς x και το μέτρο των γωνιών ω και φ.



4. Αν το διπλανό τετράπλευρο είναι ορθογώνιο, να υπολογιστούν τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων x, y και z, καθώς και το μέτρο των γωνιών ω, φ και θ.



5. Αν το διπλανό τετράπλευρο είναι τετράγωνο, να υπολογιστούν τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων x, y, z, w, u και τ, καθώς και το μέτρο των γωνιών ω, φ και θ.



ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ-ΚΛΙΜΑΚΑ

Όταν η φωτογραφία ενός προσώπου μεγεθύνεται ή σμικρύνεται, το πρόσωπο παραμένει το *ίδιο*. Αυτό συμβαίνει γιατί οι σχέσεις όλων το μεγεθών στο σχήμα παραμένουν αναλλοίωτες.
Για παράδειγμα, στο διπλανό σχήμα το πλάτος της μύτης α προς το πλάτος α΄ της σμίκρυνσης είναι το ίδιο με το πλάτος του προσώπου β προς το πλάτος β΄:

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'}$$

Τέτοιες σχέσεις ισχύουν για όλα τα μήκη των επιμέρους στοιχείων των δύο σχημάτων. Τα σχήματα αυτά ονομάζονται **όμοια**.

Όταν τα σχήματα είναι πολύγωνα έχουμε ειδικότερα:

Όμοια πολύγωνα

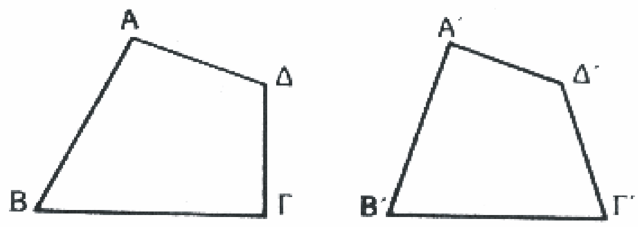
Δύο (κυρτά) πολύγωνα λέγονται όμοια, όταν έχουν αντίστοιχα ίσες μία προς μία όλες τις γωνίες τους και ανάλογα τα ζεύγη των πλευρών που ορίζονται από τις κορυφές των αντίστοιχων ίσων γωνιών.

Για παράδειγμα τα δύο (κυρτά) τετράπλευρα ΑΒΓΔ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄ είναι **όμοια**, αν και μόνο, αν ισχύουν:

(I) $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$,

$\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$, $\hat{\Delta} = \hat{\Delta}'$

(II) $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \dfrac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \dfrac{\Delta A}{\Delta'A'}$



Συμβολικά γράφουμε: ΑΒΓΔ ~ Α΄Β΄Γ΄Δ΄.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Η ομοιότητα δύο πολυγώνων απαιτεί δύο συνθήκες. Γενικά η ύπαρξη της μιας δεν συνεπάγεται οπωσδήποτε την άλλη.

Κλίμακες. Σμίκρυνση και μεγένθυση.

Όταν ο μηχανικός θέλει να απεικονίσει ένα οικόπεδο σ' ένα χαρτί, σχεδιάζει σ' αυτό ένα σχήμα πολύ μικρότερο, ώστε να χωράει στο χαρτί και να είναι **όμοιο** προς το σχήμα του οικοπέδου.

Αυτό το όμοιο σχήμα, που γίνεται στο χαρτί, λέγεται *σχέδιο ή σχεδιάγραμμα*.

Ο λόγος της ομοιότητας του *σχεδίου* προς το όμοιό του πραγματικό λέγεται **κλίμακα** και συμβολίζεται **κ**. Ώστε:

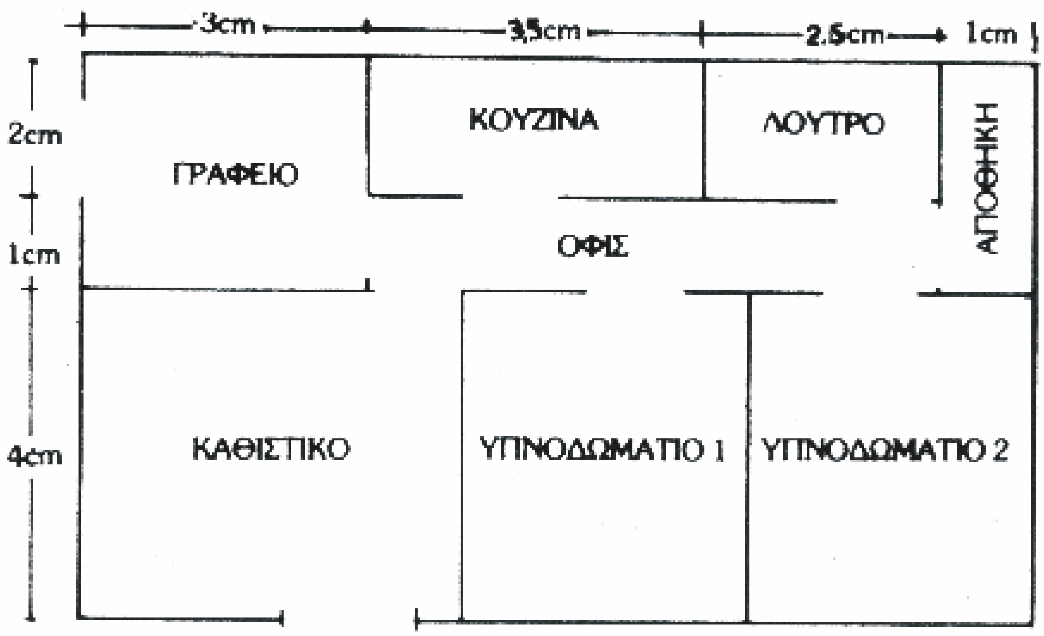
Αν συμβολίσουμε την απόσταση δύο σημείων του σχεδίου με **α** *και την πραγματική απόσταση των αντίστοιχων σημείων με* **[α]** *τότε έχουμε*

$$\boxed{\kappa = \frac{\alpha}{[\alpha]} \quad \text{ή} \quad \alpha = \kappa \cdot [\alpha]}$$

$$\left(\text{Κλίμακα} = \frac{\text{απόσταση δύο σημείων του σχεδίου}}{\text{απόσταση δύο σημείων πραγματική}}\right)$$

Αν είναι $\kappa < 1$ τότε λέμε ότι έχουμε **σμίκρυνση**, ενώ όταν $\kappa > 1$, έχουμε **μεγένθυση. Η κλίμακα αναγράφεται πάντοτε στο φύλλο σχεδίου.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Το σχέδιο που ακολουθεί δείχνει την «κάτοψη» ενός σπιτιού με κλίμακα $\kappa = 1{:}100$. Να βρεθούν οι διαστάσεις κάθε δωματίου.



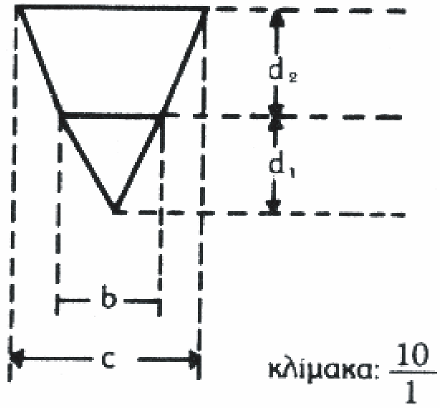
Έχουμε $\kappa = \dfrac{\alpha}{[\alpha]}$ ή $[\alpha] = \dfrac{1}{\kappa} \cdot \alpha$ με $\dfrac{1}{\kappa} = 100$

Συνεπώς βρίσκουμε

Καθιστικό:	$0{,}04 \times 100 = 4m$	και $0{,}04 \times 100 = 4m$
Υπνοδωμάτιο (1,2):	$0{,}03 \times 100 = 3m$	και $0{,}04 \times 100 = 4m$
Κουζίνα:	$0{,}035 \times 100 = 3{,}5m$	και $0{,}02 \times 100 = 2m$
Αποθήκη:	$0{,}01 \times 100 = 1m$	και $0{,}03 \times 100 = 3m$
Γραφείο:	$0{,}03 \times 100 = 3m$	και $0{,}03 \times 100 = 3m$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Από το σχέδιο (παριστάνει μια «κάθετη τομή» της άκρης μιας γραφίδας) να βρεθούν οι πραγματικές διαστάσεις [d_1], [d_2], [b], [c] του πραγματικού αντικειμένου.



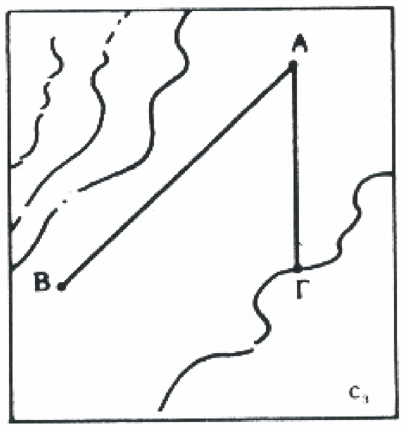
Λύση: Μετράμε με ακρίβεια τις αποστάσεις d_1, d_2, b, c του σχεδίου και βρίσκουμε
d_1 = 10mm, d_2 = 11mm, b = 10mm, c = 19mm. Από τη σχέση $\kappa = \frac{a}{[a]}$ για

κ = 10 έχουμε

$10 = \frac{10}{[d_1]}$ ή $[d_1] = 1mm$ $10 = \frac{10}{[b]}$ ή $[b] = 1mm$

$10 = \frac{11}{[d_2]}$ ή $[d_2] = 11mm$ $10 = \frac{19}{[c]}$ ή $[c] = 1{,}9mm$

2. Το σχέδιο παριστάνει μια τοποθεσία. Αν η πραγματική απόσταση των Α και Β είναι ΑΒ = [d] = 11,4km να βρείτε:
i) την κλίμακα με την οποία έγινε το σχέδιο και
ii) την πραγματική απόσταση των σημείων Α και Γ.



Λύση: i) Μετράμε με ακρίβεια την απόσταση ΑΒ στο σχέδιο και βρίσκουμε
ΑΒ = d = 38mm. Από τη σχέση
$\kappa = \frac{d}{[d]}$ για $d = 38mm = 3{,}8cm$
και $[d] = 11{,}4km = 11{,}4 \cdot 10^5 cm = 1.140.000cm$ έχουμε

$$\kappa = \frac{3{,}8}{1.140.000} = \frac{1}{300.000}$$

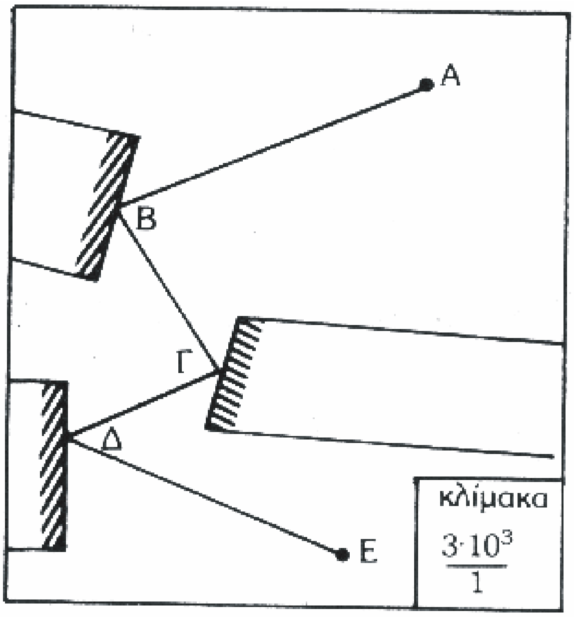
ii) Μετράμε στο σχέδιο την απόσταση ΑΓ και βρίσκουμε ΑΓ = c = 26mm = 2,6cm. Οπότε με
$\kappa = \frac{1}{300.000}$ από τη σχέση $\kappa = \frac{c}{[c]}$ έχουμε

$$\kappa = \frac{1}{300.000} = \frac{2{,}6}{[c]}$$ ή $[c] = 300.000 \cdot 2{,}6cm = 780.000cm = 7{,}8km.$

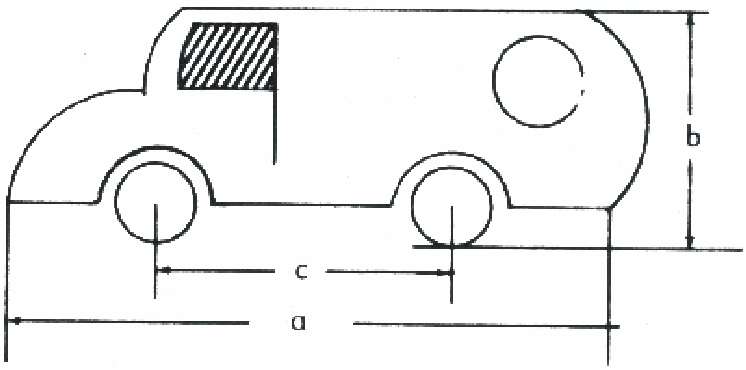
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

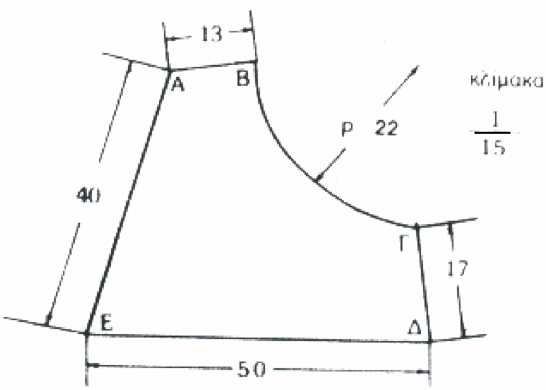
1.
Ένα ηλεκτρόνιο μετά από διαδοχικές ανακλάσεις, ξεκινώντας από το σημείο Α κατέληξε στο Ε. Η κίνηση φωτογραφήθηκε και έγινε η μεγένθυση όπως παρουσιάζεται στο σχέδιο (β). Να βρεθεί το πραγματικό μήκος της τροχιάς του ηλεκτρονίου.



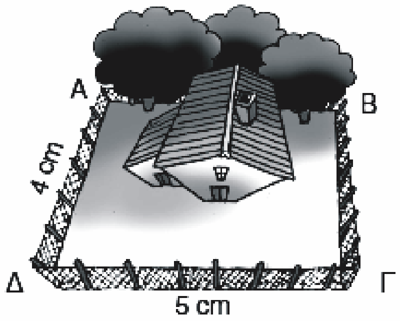
2. Στο διπλανό σχέδιο (ε) το πραγματικό μήκος του αμαξώματος είναι [a] = 6,3m. Να βρεθούν οι πραγματικές διαστάσεις [b] και [c] αφού πρώτα βρεθεί η κλίμακα του σχεδίου.



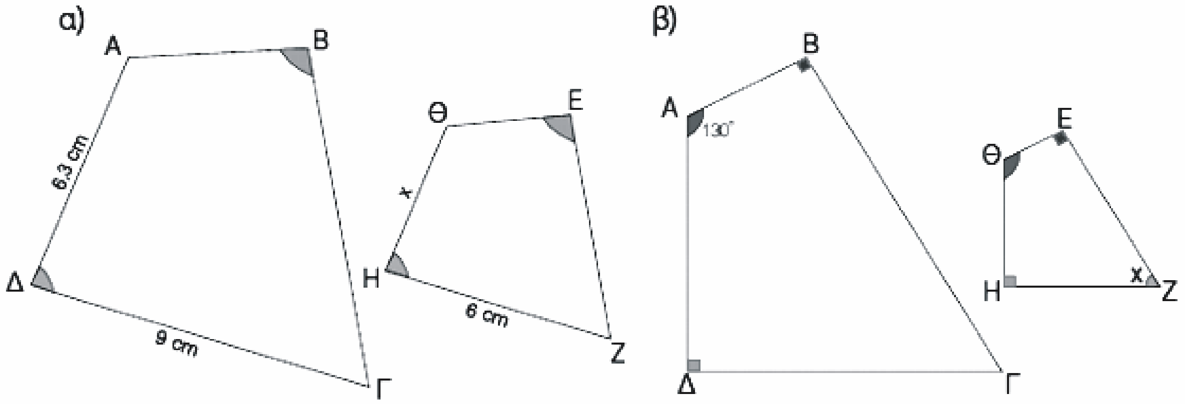
3. Το διπλανό σχέδιο παριστάνει ένα ενδυματολογικό σχέδιο (πατρόν). Να βρεθούν οι πραγματικές του διαστάσεις.
Οι διαστάσεις στο σχέδιο είναι σε mm.



4. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η αεροφωτογραφία ενός αγροκτήματος που έχει σχήμα ορθογωνίου και έχει περιφραχτεί με συρματόπλεγμα μήκους 270 m. Να βρεθούν οι πραγματικές διαστάσεις του αγροκτήματος. Με ποια κλίμακα έχει φωτογραφηθεί το αγρόκτημα;

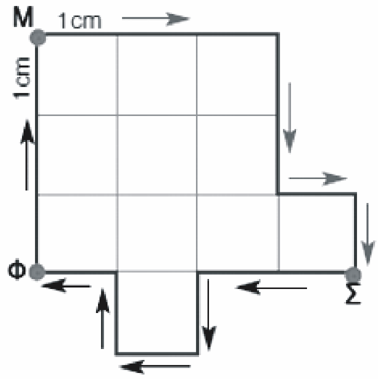


5. Αν τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι όμοια, να βρείτε το x σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:



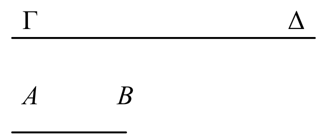
6. Ένα παραλληλόγραμμο έχει πλευρές 24 cm και 18 cm. Ένας μαθητής θέλοντας να κατασκευάσει ένα παραλληλόγραμμο όμοιο μ' αυτό αλλά που να έχει τη μεγαλύτερη πλευρά 20 cm, σκέφτηκε να μειώσει και την άλλη πλευρά κατά 4 cm. Ήταν σωστή η σκέψη του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

7. Ένας μαθητής ξεκίνησε το πρωί από το σπίτι του Μ και αφού ακολούθησε τη διαδρομή που φαίνεται στο σχέδιο, έφτασε στο σχολείο του Σ. Το μεσημέρι επέστρεψε σπίτι του από άλλο δρόμο προκειμένου να περάσει και από το σπίτι ενός φίλου του που βρισκόταν στο σημείο Φ. Αν η συνολική διαδρομή που έκανε ο μαθητής ήταν 640 m, να βρείτε πόσο απέχουν τα σπίτια των δύο φίλων. Ποια είναι η κλίμακα του σχεδίου;



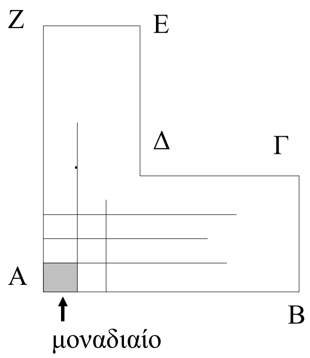
ΕΜΒΑΔΟ ΣΧΗΜΑΤΟΣ

Γνωρίζουμε, ότι για να μετρήσουμε το μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος ΓΔ το συγκρίνουμε με ένα σταθερό ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, που το δεχόμαστε ως μονάδα μέτρησης. Ο θετικός αριθμός που προκύπτει από αυτήν τη μέτρηση λέγεται μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ.



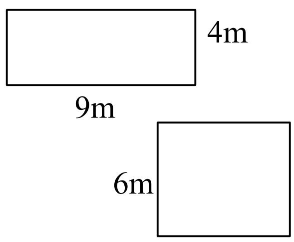
Το ίδιο κάνουμε για να μετρήσουμε μια επιφάνεια. Αυτή τη φορά βέβαια χρησιμοποιούμε ως μονάδα μέτρησης ένα τετράγωνο με πλευρά ίση με τη μονάδα.

Ο θετικός αριθμός που φανερώνει πόσες φορές το μοναδιαίο τετράγωνο χωράει μέσα στην επιφάνεια που μετράμε λέγεται **εμβαδό** της επιφάνειας ή μέτρο της επιφάνειας.



Είναι φανερό ότι οι επιφάνειες δύο ίσων σχημάτων έχουν το ίδιο εμβαδό. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Δηλαδή, υπάρχουν και επιφάνειες διαφορετικών σχημάτων που όμως έχουν το ίδιο εμβαδό.

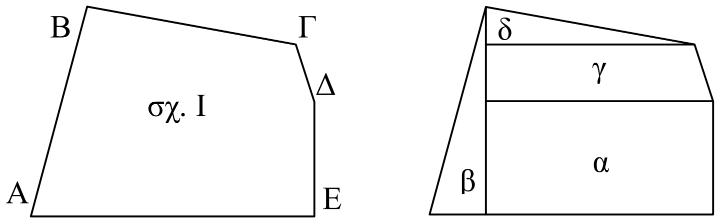
Για παράδειγμα, το διπλανό ορθογώνιο έχει το ίδιο εμβαδό με το τετράγωνο, αν και είναι διαφορετικά σχήματα.



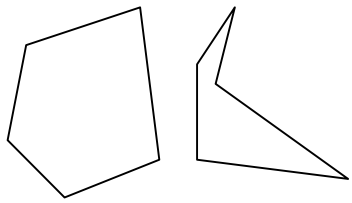
Τις επιφάνειες των σχημάτων που έχουν το ίδιο εμβαδό τις ονομάζουμε ισεμβαδικές ή **ισοδύναμες.**

Ένας τρόπος για να μετρήσουμε την επιφάνεια ενός σχήματος (εμβαδομέτρηση) είναι να το χωρίσουμε σε γνωστά σχήματα (ορθογώνια, τραπέζια, τρίγωνα, κλπ). Έπειτα, γνωρίζοντας τους τύπους για τα εμβαδά αυτών των γνωστών σχημάτων, μπορούμε να υπολογίσουμε συνολικά το εμβαδό της επιφάνειας που μας ενδιαφέρει.

Για παράδειγμα, το σχήμα Ι μπορεί να χωριστεί σε γνωστά σχήματα, δηλαδή στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (α), στα ορθογώνια τρίγωνα (β) και (δ) και στο ορθογώνιο τραπέζιο (γ).



Το σχήμα που αποτελείται από ένα πολύγωνο και τα εσωτερικά του σημεία, ονομάζεται **πολυγωνικό χωρίο**.



Πολυγωνικά χωρία

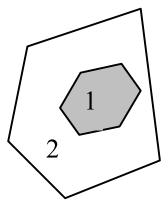
Τα εμβαδά των πολυγωνικών χωρίων έχουν τις εξής ιδιότητες:

α) Ίσα πολυγωνικά χωρία έχουν ίσα εμβαδά.

β) Αν μια πολυγωνική επιφάνεια χωρίζεται σε πολυγωνικά χωρία που δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, το εμβαδό της ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των πολυγωνικών χωρίων. Έτσι στο σχήμα Ι παραπάνω έχουμε

$$E_{ΑΒΓΔΕ} = E_α + E_β + E_γ + E_δ.$$

γ) Αν μια πολυγωνική επιφάνεια περιέχεται σε μια άλλη πολυγωνική επιφάνεια, το εμβαδό της είναι μικρότερο από αυτής που την περιέχει.



$E_2 > E_1$

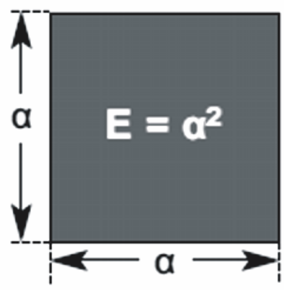
Εμβαδά βασικών σχημάτων

1. Εμβαδό τετραγώνου

Το εμβαδό ενός τετραγώνου είναι όσο το τετράγωνο της πλευράς του.

Δηλαδή, αν η πλευρά έχει μήκος ***α*** μέτρα, τότε το τετράγωνο έχει εμβαδό:

$$\boxed{E = \alpha^2 \quad m^2}\ .$$



2. Εμβαδό ορθογωνίου παραλληλογράμμου

Η μεγαλύτερη πλευρά του ορθογωνίου λέγεται συνήθως ***μήκος***, η μικρότερη ***πλάτος*** και οι δύο μαζί διαστάσεις του ορθογώνιου.

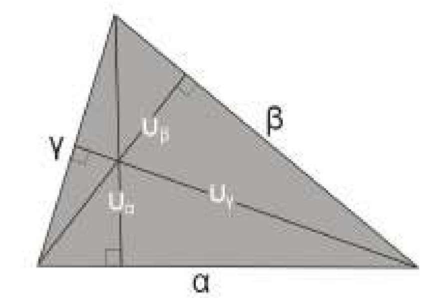
Το εμβαδό του ορθογωνίου παραλληλόγραμμου είναι ίσο με το μήκος επί το πλάτος του.

Δηλαδή, αν οι διαστάσεις του έχουν μήκος **α** μέτρα και **β** μέτρα, τότε το ορθογώνιο έχει εμβαδό:

$$\boxed{E = \boldsymbol{\alpha \cdot \beta} \quad m^2}$$

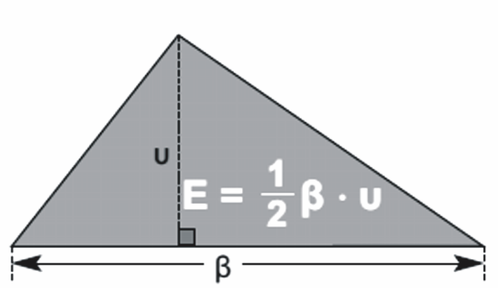
3. Εμβαδό Τριγώνου

Ύψος ενός τριγώνου ονομάζεται η απόσταση μιας κορυφής από την απέναντι πλευρά, δηλαδή το μήκος του κάθετου ευθύγραμμου τμήματος από την κορυφή προς την απέναντι πλευρά. Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε ένα τρίγωνο με τα τρία ύψη, που το καθένα αντιστοιχεί σε κάθε μία πλευρά.



Το εμβαδό ενός τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο της μιας πλευράς επί το ύψος που αντιστοιχεί σ' αυτήν.

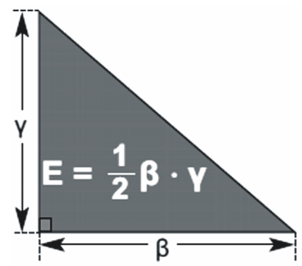
Δηλαδή, αν μία πλευρά του τριγώνου έχει μήκος **β** μέτρα και το αντίστοιχο σε αυτήν ύψος έχει μήκος **υ** μέτρα, το εμβαδό του τριγώνου είναι:



$$\boxed{E = \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta \cdot \upsilon} \quad m^2}$$

Στην ειδική περίπτωση που το τρίγωνο είναι ορθογώνιο η κάθετη πλευρά του είναι το ύψος προς την άλλη πλευρά, οπότε το εμβαδόν του προκύπτει ως το ημιγινόμενο των δύο κάθετων πλευρών:

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta \cdot \gamma} \quad m^2}$$

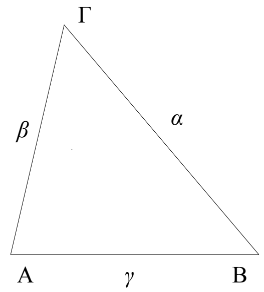


Στην πράξη είναι ίσως δύσκολο να φέρουμε σωστά το ύψος, σε ένα τρίγωνο. Γι' αυτό χρησιμοποιούμε έναν άλλο τύπο για το εμβαδό του τριγώνου, που χρειάζεται μόνο τις πλευρές του. Επιγράφεται **τύπος Ήρωνα** και είναι ο ακόλουθος:

$$\boxed{E_{\mathrm{AB\Gamma}} = \sqrt{\tau(\tau - a)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}}$$

όπου τ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου, δηλαδή: $\tau = \frac{1}{2}\left(a + \beta + \gamma\right)$.

Παράδειγμα: Στο διπλανό τρίγωνο έχουμε α = 7m, β = 5m και γ = 6m. Πόσο είναι το εμβαδό του;



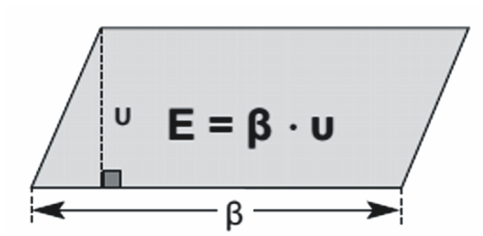
Λύση:

Έχουμε $\tau = \frac{1}{2}(a + \beta + \gamma) = \frac{1}{2}(7 + 5 + 6)$=9.

Άρα, $E = \sqrt{9(9-7)(9-5)(9-6)} = \sqrt{216}$ ≈14,7m².

4. Εμβαδό (πλάγιου) παραλληλογράμμου

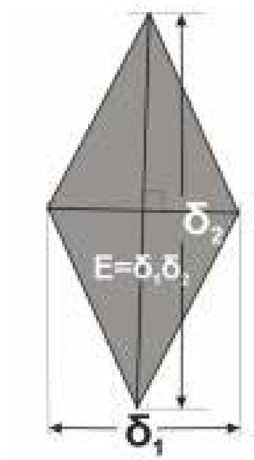
Το εμβαδό κάθε πλάγιου παραλληλόγραμμου είναι ίσο με το γινόμενο μιάς πλευράς του επί το αντίστοιχο προς αυτήν ύψος.



Δηλαδή, αν το μήκος μιας πλευράς του παραλληλογράμμου είναι **β** μέτρα και το αντίστοιχο προς αυτήν ύψος είναι **υ** μέτρα, το εμβαδόν του είναι:

$$\boxed{E = \boldsymbol{\beta \cdot \upsilon} \quad m^2}$$

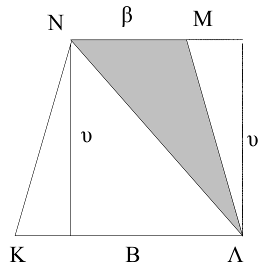
4α. Εμβαδό ρόμβου



Στην ειδική περίπτωση που το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος με μήκη διαγωνίων δ_1 και δ_2 μέτρα το εμβαδό του δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{E = \boldsymbol{\delta_1 \cdot \delta_2} \quad m^2}$$

5. Εμβαδό τραπεζίου

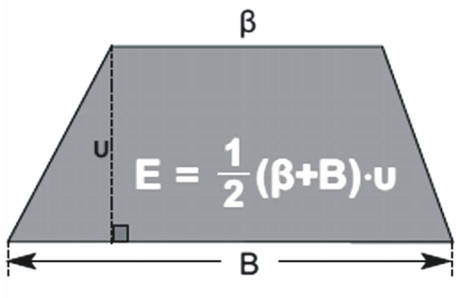


Όπως γνωρίζουμε, τραπέζιο είναι το τετράπλευρο που έχει δύο απέναντι πλευρές παράλληλες. Στο διπλανό τραπέζιο οι παράλληλες πλευρές είναι οι ΚΛ, ΝΜ. Η πλευρά ΚΛ λέγεται και **μεγάλη βάση**, ενώ η πλευρά ΜΝ λέγεται **μικρή βάση**. Η απόσταση μεταξύ των βάσεων είναι το **ύψος** του τραπεζίου.

Το εμβαδό τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων επί το ύψος.

Δηλαδή, αν το μήκος της μικρής βάσης είναι **β** μέτρα, της μεγάλης βάσης **Β** μέτρα και το ύψος είναι **υ** μέτρα, το εμβαδόν του είναι:

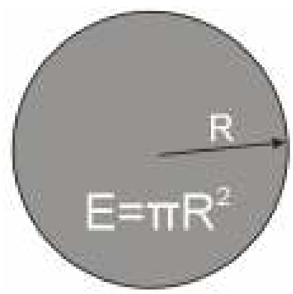
$$\boxed{\mathrm{E} = \frac{\mathbf{B}+\boldsymbol{\beta}}{2}\cdot\boldsymbol{\upsilon} \quad \mathrm{m}^2}$$



6. Εμβαδό κύκλου

Το εμβαδό του κύκλου δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{\mathrm{E} = \boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{R}^2 \quad \mathrm{m}^2}$$

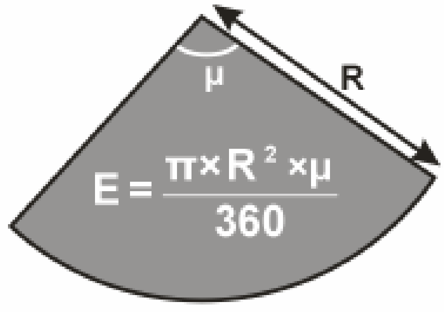


όπου **π** το γνωστό πηλίκο μήκους προς διάμετρο (≈ 3,14...) και **R** η ακτίνα του.

6. Εμβαδό κυκλικού τομέα

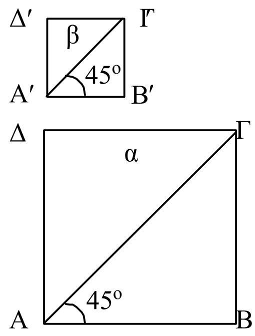
Το εμβαδό του κυκλικού τομέα δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{\mathrm{E} = \frac{\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{R}^2\cdot\boldsymbol{\mu}}{360} \quad \mathrm{m}^2}$$



όπου **π** το γνωστό πηλίκο μήκους προς διάμετρο (≈ 3,14...), **R** η ακτίνα του και **μ** η επίκεντρη γωνία σε μοίρες.

Λόγος εμβαδών όμοιων σχημάτων



• Ας πάρουμε δύο τετράγωνα ΑΒΓΔ και Α′Β′Γ′Δ′ με πλευρές α και β αντιστοίχως. Ο λόγος ομοιότητας των τετραγώνων είναι:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{\alpha}{\beta} = \lambda .$$

Τα εμβαδά τους είναι $E_1=\alpha^2$ και $E_2=\beta^2$ αντίστοιχα. Ο λόγος των εμβαδών τους είναι

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \lambda^2 .$$

Δηλαδή ο λόγος των εμβαδών δύο τετραγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου της ομοιότητάς τους.

• Ας πάρουμε δύο όμοια ορθογώνια ΑΒΓΔ και Α′Β′Γ′Δ′ με πλευρές α, β και α′,β′ αντιστοίχως. Ο λόγος ομοιότητας των ορθογωνίων είναι: $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \lambda$.

Τα εμβαδά τους είναι $E_1 = \alpha\cdot\beta$ και $E_2 = \alpha'\cdot\beta'$.

Ο λόγος των εμβαδών τους είναι $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\alpha\cdot\beta}{\alpha'\cdot\beta'} = \frac{\alpha}{\alpha'}\cdot\frac{\beta}{\beta'} = \lambda\cdot\lambda = \lambda^2$.

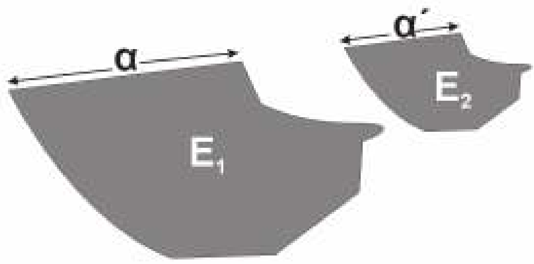
Δηλαδή, **ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων ορθογωνίων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας**

Η ιδιότητα αυτή που αποδείξαμε για τα τετράγωνα και τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα ισχύει **γενικά για όλα τα όμοια σχήματα**.

Δηλαδή:

Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου της ομοιότητάς τους

$$\boxed{\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2 = \lambda^2}$$



ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Βρείτε το εμβαδόν τετραγώνου με περίμετρο 8m.

2. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει υποτείνουσα 5m και μία κάθετη πλευρά 4m. Πόσο είναι το εμβαδόν του;

3. Οι πλευρές ενός τετραγώνου μειώνονται κατά 20%. Είναι δυνατόν να μειωθεί το εμβαδόν του κατά 30%, 36% ή 40%; Είναι δυνατόν να εκτιμήσουμε το μήκος της πλευράς. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

4. Αν σε ένα τρίγωνο μας δώσουν την περίμετρο και δύο πλευρές του μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδό του;

5. Σε ένα τρίγωνο έχουμε $α=3m$, $β=2m$ και $Γ=30^0$. Πόσο είναι το εμβαδόν του;

6. Αν διπλασιάσω τις πλευρές ενός τετραγώνου πόσο αυξάνεται το εμβαδό του;

7. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια. Αν έχουν ίσες τις υποτείνουσές τους είναι και μεταξύ τους ίσα;

8. Να βρείτε ένα τρόπο για να χωρίσουμε ένα τρίγωνο σε τρία ισεμβαδικά μέρη; Πως θα το χωρίσουμε σε τέσσερα ισεμβαδικά μέρη;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Βρείτε το εμβαδό τετραγώνου με πλευρά 3.5in. Δώστε το αποτέλεσμα σε cm^2.

2. Το εμβαδό ενός τετραγώνου είναι $25m^2$. Πόσο θα γίνει το εμβαδό του, αν ελαττώσουμε το μήκος της πλευράς κατά 2m;

3. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει εμβαδό 100m². Το μήκος του είναι 20m. Πόσα μέτρα είναι το πλάτος του;

4. Πόσο είναι το εμβαδό πλάγιου παραλληλόγραμμου με μήκος 3,5m και ύψος 3dm;

5. Να υπολογίσετε το ύψος πλάγιου παραλληλογράμμου με εμβαδόν 10m² και ύψος 16dm.

6. Το εμβαδό ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι 100m². Αυξάνουμε μία από τις πλευρές του κατά 10%. Πόσο είναι το νέο εμβαδό;.

7. Ένας συνεταιρισμός αγόρασε μια έκταση 354,66 στρεμ. προς 650€ το στρέμμα. Η έκταση χωρίστηκε σε οικόπεδα, με δρόμους και κοινόχρηστους χώρους συνολικής επιφάνειας 63,2στρ., που η κατασκευή τους κόστισε 22500€. Πόσο πρέπει να πωληθεί το m² κάθε οικόπεδου ώστε ο συνεταιρισμός να έχει όφελος 300000€;

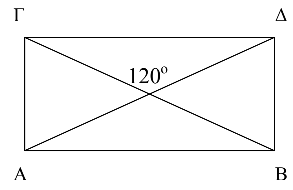
8. Οι πλευρές ενός τετραγώνου αυξάνονται κατά 3m και το εμβαδό του διπλασιάζεται. Πόσο ήταν το μήκος της πλευράς αρχικά.

9. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο 20m. Το εμβαδό του είναι 24m². Ποιες είναι οι διαστάσεις του;

10. Αν αυξηθεί το μήκος ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου κατά 3m, τότε το εμβαδό του αυξάνεται κατά 9m². Αν αυξηθεί το πλάτος του κατά 3m, τότε το εμβαδό αυξάνεται κατά 12m². Ποιες είναι οι διαστάσεις του;

11. Αυξάνουμε το μήκος και το πλάτος ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου κατά 1m. Τότε το εμβαδό του αυξάνεται κατά 21m². Πόση είναι η περίμετρός του;

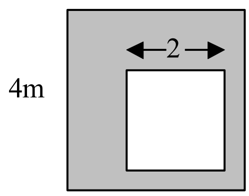
12. Οι διαγώνιες ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου σχηματίζουν γωνία 120ο και το μήκος κάθε μιας είναι 12cm. Να υπολογίσετε το εμβαδό του.



13. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει υποτείνουσα 13m και περίμετρο 30m. Πόσο είναι το εμβαδό του;

14. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει τη μια κάθετη πλευρά 4m και περίμετρο 12m. Πόσο είναι το εμβαδό του;

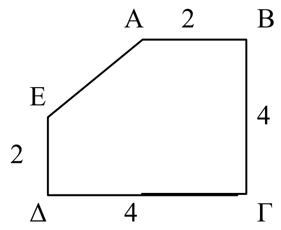
15. Βρείτε το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου τμήματος στο διπλανό σχήμα.



16. Ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει πλευρά 10m. Πόσο είναι το εμβαδό του;

17. Ένα τρίγωνο έχει πλευρές με μήκη 7m, 4.5m και 5.2m. Πόσο είναι το εμβαδό του;

18. Πόσο είναι το εμβαδό του διπλανού σχήματος ΑΒΓΔΕ; Οι αριθμοί παριστάνουν τα μήκη των αντίστοιχων ευθύγραμμων τμημάτων σε μέτρα.



19. Ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει περίμετρο 30m. Πόσο είναι το εμβαδό του;

20. Να αποδείξετε ότι κάθε διάμεσος ενός τριγώνου το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα.

21. Σε ένα **ισοσκελές τραπέζιο** οι δύο μη παράλληλες πλευρές του είναι ίσες και έχουν μήκος 5m. Όταν οι βάσεις του είναι 15m και 9m, πόσο είναι το εμβαδόν του;

22. Το εμβαδό ενός τραπεζίου είναι $100m^2$. Το ύψος του είναι 10m και η μία βάση του 20m. Πόση είναι η άλλη βάση του;

23. Έστω ένα ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ, με Α=1□. Αν ΑΒ=4m , ΓΔ=2m και η διαγώνιος ΒΔ=5m, πόσο είναι το εμβαδό του;

24. Η διαγώνιος σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι 20m και το εμβαδό του 200m. Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του.

25. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η μία κάθετη πλευρά είναι 10m και το ύψος προς την υποτείνουσα είναι 8m. Να υπολογίσετε το εμβαδό του.

26. Η μεγάλη βάση ενός τραπεζίου είναι διπλάσια από την μικρή βάση. Το ύψος είναι το μισό της μικρής βάσης. Αν το εμβαδόν του τραπεζίου είναι $12m^2$, να υπολογίσετε τις βάσεις και το ύψος του.

27. Σε ένα ρόμβο η γωνία $Α=60^o$ και η πλευρά ΑΒ=3dm. Να υπολογίσετε το εμβαδό του.

28. Σε ένα τρίγωνο έχουμε γωνίες $Α=30^o$ και $Β=45^o$. Η πλευρά γ που βρίσκεται απέναντι από την γωνία Γ, είναι 10m. Να υπολογίσετε τα μήκη α, β.

29. Ένα τρίγωνο έχει εμβαδό $5m^2$. Αν οι πλευρές α=5m και β=4m, πόση είναι η γωνία Γ;

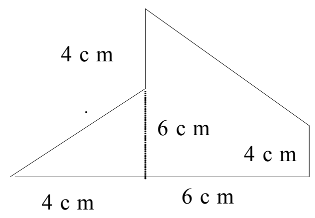
30. Ένας τοπογράφος μετρά ένα τετράπλευρο οικόπεδο ΑΒΓΔ και βρίσκει ΑΒ=63m, ΒΓ=61m, ΓΑ=84m, ΑΔ=60m, ΔΓ=62m. Πόσο είναι το εμβαδό του;

31. Αυξάνουμε τη πλευρά ενός τετραγώνου κατά 10%. Πόσο αυξάνεται το εμβαδό του;

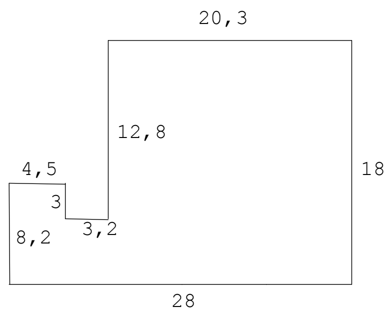
32. Μειώνουμε την πλευρά ενός τετραγώνου κατά 25%. Πόσο μειώνεται το εμβαδό του;

33. Η πλευρά ενός ισοπλεύρου τριγώνου διπλασιάζεται. Πόσο αυξάνεται το εμβαδό του;

34. Το διπλανό σχήμα παριστάνει την κάτοψη ενός οικοπέδου σε κλίμακα 10000:1. Υπολογίστε το εμβαδό του.



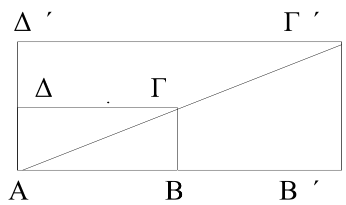
35. Το διπλανό σχήμα παριστάνει την κάτοψη ενός οικοπέδου σε κλίμακα 3000:1. Αν οι αριθμοί υποδηλώνουν mm πόσο είναι το εμβαδό του;



36. Η διχοτόμος ενός ισόπλευρου τριγώνου διπλασιάζεται. Πόσο αυξάνεται το εμβαδό του;

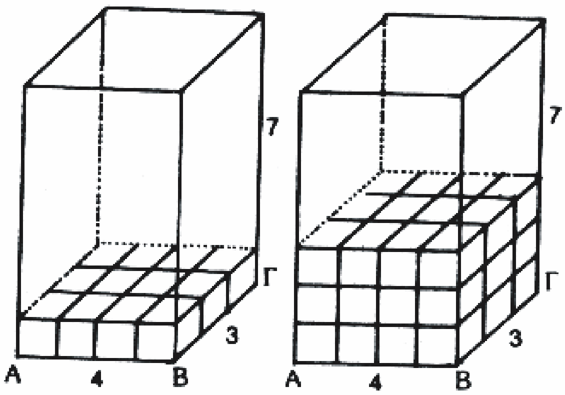
37. Η διάμεσος ενός ισοπλεύρου τριγώνου διπλασιάζεται. Πόσο αυξάνεται το εμβαδό του;

38. Προεκτείνουμε την διαγώνιο ΑΓ του διπλανού ορθογώνιου παραλληλόγραμμου στο διπλάσιο, έτσι ώστε ΑΓ=ΓΓ'. Πόσο αυξάνεται τότε το εμβαδό του;



39. Ένας πατέρας έχει ένα τριγωνικό οικόπεδο και θέλει να το μοιράσει στους δύο γιους του. Πως θα επιτύχει δίκαιο μοίρασμα.

ΟΓΚΟΣ ΣΤΕΡΕΟΥ



Πρακτικά, για να κατανοήσουμε την έννοια του όγκου ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις π.χ. $\alpha = 4cm$, $\beta = 3cm$, και $\gamma = 7cm$ φανταζόμαστε ότι «γεμίζουμε» το χώρο, που καταλαμβάνει από το στερεό αυτό, με κύβους, που η ακμή τους είναι 1cm (μοναδιαίους κύβους). Παρατηρούμε τότε, ότι το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο «γεμίζει» με 7 στρώματα κύβων που το καθένα έχει 12 κύβους. Συνεπώς το στερεό μας γεμίζει με $4 \cdot 3 \cdot 7 = 84$ κύβους ή όπως λέγεται διαφορετικά με 84 κυβικά εκατοστά (Συμβολικά $84\ cm^3$).

Ο αριθμός 84 ονομάζεται όγκος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου του με μονάδα μέτρησης το $1cm^3$. Γενικά αποδεικνύεται ότι:

Ο όγκος V ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις **α, β, γ** *δίνεται από το τύπο* $\mathbf{V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma}$.

Για το κύβο ακμής α ο τύπος αυτός γίνεται $\mathbf{V = \alpha^3}$.

Μονάδες όγκου, που παράγονται από το $1m^3$ είναι:

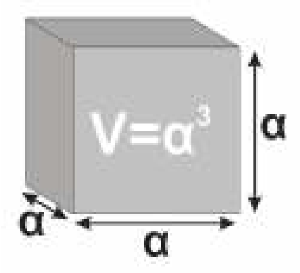
Μονάδα	Σχέση
Κυβικό χιλιόμετρο	$\mathbf{1\ km^3 = 10^9\ m^3}$
Κυβική παλάμη	$\mathbf{1\ dm^3 = 10^{-3}\ m^9}$
Κυβικό εκατοστό	$\mathbf{1\ cm^3 = 10^{-6}\ m^3 = 10^{-3}\ dm^3}$
Κυβικό χιλιοστό	$\mathbf{1\ mm^3 = 10^{-6}\ m^3 = 10^{-6}\ dm^3}$

$1\ m^3 = 10^3\ dm^3 = 100^3\ cm^3 = 1.000^3\ mm^3$

Όγκοι βασικών σχημάτων

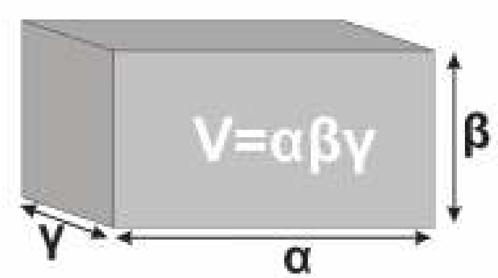
1. Όγκος κύβου

$$V = \boldsymbol{\alpha^3} \quad m^3$$



2. Όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου

$$V = \boldsymbol{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma} \quad m^3$$

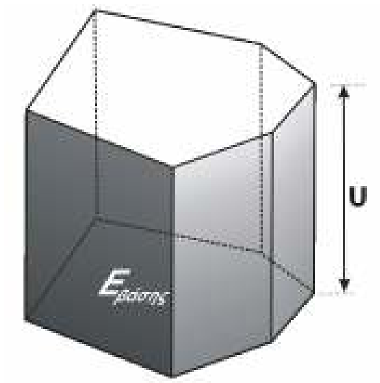


3. Όγκος πρίσματος

V= Εμβαδό βάσης · ύψος

ή πιο σύντομα:

$$V = \mathbf{E}_{\boldsymbol{\beta}} \cdot \boldsymbol{\upsilon} \quad m^3$$

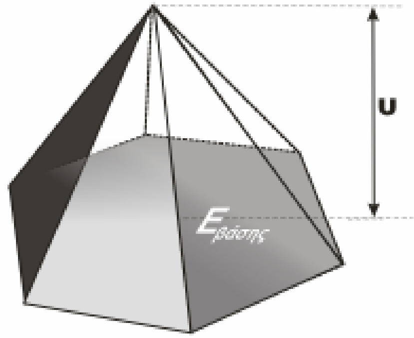


4. Όγκος πυραμίδας

$$V = \frac{1}{3} \cdot \text{Εμβαδό βάσης} \cdot \text{ύψος}$$

ή πιο σύντομα:

$$V = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \cdot \mathbf{E}_{\boldsymbol{\beta}} \cdot \boldsymbol{\upsilon} \quad m^3$$

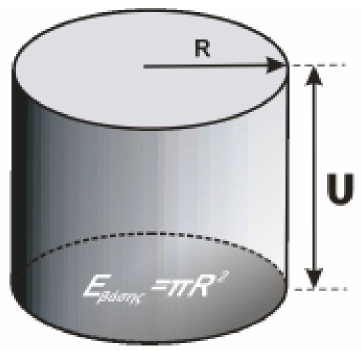


5. Όγκος κυλίνδρου

V= Εμβαδό βάσης · ύψος

ή, αφού η βάση είναι κύκλος:

$$V = \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{R}^2 \cdot \boldsymbol{\upsilon} \quad m^3$$

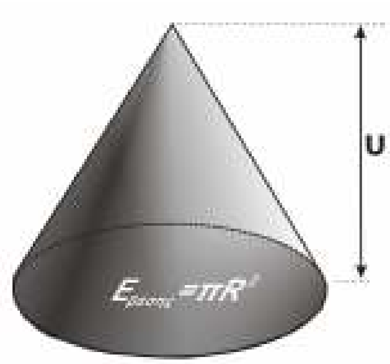


6. Όγκος κώνου

V= $\frac{1}{3}$ · Εμβαδό βάσης · ύψος

ή, αφού η βάση είναι κύκλος:

$$V = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \cdot \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{R}^2 \cdot \boldsymbol{\upsilon} \quad m^3$$



7. Όγκος σφαίρας

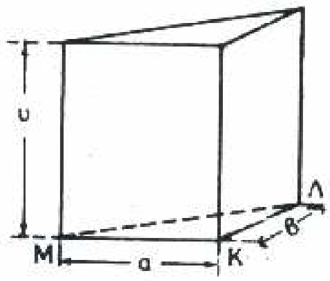
$$V = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}} \cdot \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{R}^3 \quad m^3$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθεί ο όγκος κύβου με ακμή $\alpha = 4 \cdot 10^{-3}$ m.

2. Αν στο διπλανό σχήμα είναι
$\alpha = 0,3$m, $\beta = 4$m,
$\upsilon = 0,42$m και
$MK \perp K\Lambda$, να βρεθεί ο όγκος του πρίσματος.



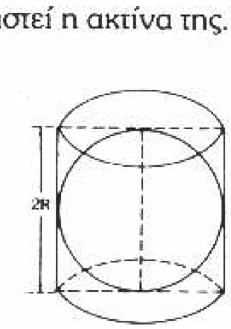
3. Να βρεθεί το ύψος πυραμίδας που έχει όγκο $20m^3$ και οι πλευρές της τριγωνικής βάσης της είναι 12m, 13m, 11m. (Χρησιμοποιήστε το τύπο του Ήρωνα).

4. Το ύψος κυλίνδρου είναι 4m και η βάση του έχει ακτίνα 2,5m. Να βρεθεί ο όγκος του.

5. Ένας κύβος έχει ακμή $\alpha = 3$m. Να βρεθεί το ύψος κώνου που έχει όγκο ίσο με τον όγκο του κύβου και ακτίνα $R = 2$m.

6. Ο όγκος σφαίρας είναι $113.040m^3$. Να υπολογιστεί η ακτίνα της.

7. Στο διπλανό σχήμα να βρεθεί ο όγκος του μέρους του κυλίνδρου που βρίσκεται εκτός της σφαίρας, αν η ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου είναι 4cm.



8. Αν O το σημείο τομής των διαγωνίων ενός κύβου και $ΑΒΓΔ$ μια έδρα του, να βρεθεί ο όγκος της πυραμίδας $ΟΑΒΓΔ$ αν η ακμή του κύβου είναι $4cm$.

9. Είναι γνωστό ότι αν ε το ειδικό βάρος ενός σώματος, B το βάρος του και V ο όγκος του, τότε $\varepsilon = \frac{B}{V}$.

Με βάση την ισότητα αυτή να βρείτε το βάρος κάθε μιας από τις σιδερένιες ράβδους που εικονίζονται στα παρακάτω σχήματα. Οι διαστάσεις είναι σε mm και το ειδικό βάρος του σιδήρου $7,8$.