Να διατηρηθεί μέχρι
Βαθμός ασφαλείας

Μαρούσι, 8 - 9 -2011
Αριθ. Πρωτ. :101837 /Γ2
Βαθμός Προτερ.:

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΕΝΙΑΙΟΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ
ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑΣ ΚΑΙ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΣΠΟΥΔΩΝ Δ/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΤΜΗΜΑ Β΄

Ταχ. Δ/ νση: Α. Παπανδρέου 37
Τ.Κ.– Πόλη: 151 80 Μαρούσι
Πληροφορίες:Τάσος Βιολέτης, Ρόη Μάρκου
Τηλέφωνο: 2103442229
fax: 2103443253
e-mail: t09tee07@minedu.gov.gr

ΠΡΟΣ:

*** Περιφερειακές Δ/νσεις Α/θμιας και Β/θμιας Εκπ/σης**
*** Διευθύνσεις Δ.Ε. της χώρας**
*** Γραφεία Ε.Ε. (μέσω Δ/νσεων Δ.Ε.)**
*** Ημερήσια και Εσπερινά ΕΠΑ.Λ. και ΕΠΑ.Σ. όλης της χώρας (μέσω Δ/νσεων Δ.Ε. και Γραφείων Ε.Ε.)**
*** Σχολεία Δεύτερης Ευκαιρίας (μέσω Δ/νσεων Δ.Ε.)**
*** Σιβιτανίδειος Σχολή (Θεσσαλονίκης 150, 176 10 Καλλιθέα)**
*** Γραφεία Σχολικών Συμβούλων (μέσω Δ/νσεων Δ.Ε.)**

ΚΟΙΝ.:

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο,
Τμήμα Β΄ ΤΕΕ,
Μεσογείων 400,
153 42 ΑΓ. ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ

<u>ΘΕΜΑ:</u> «Οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθημάτων των ΕΠΑ.Λ.- ΕΠΑ.Σ. για το σχολικό έτος 2011-2012»

Σας αποστέλλουμε οδηγίες σχετικά με τη διδασκαλία των Μαθημάτων των ΕΠΑ.Λ. – ΕΠΑ.Σ. για το σχολικό έτος 2011 – 2012, σύμφωνα με τις αρ. 12/14-06-2010, 19/27-10-2010 και 9/4-05-2011 Πράξεις του Τμήματος Τεχνικής και Επαγγελματικής Εκπαίδευσης του Παιδαγωγικού .Ινστιτούτου.

<u>Οι διδάσκοντες να ενημερωθούν ενυπόγραφα.</u>

<u>Συνημμένα στο ηλεκτρονικό ταχυδρομείο:</u>
Σελίδες 44

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

ΣΤΥΛΙΑΝΟΣ ΜΕΡΚΟΥΡΗΣ

<u>Εσωτ. Διανομή:</u>
Δ/νση Σπουδών Δ.Ε.,Τμήμα Β΄

«ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΕΠΑ.Λ.-ΕΠΑ.Σ.
ΓΙΑ ΤΟ ΣΧ. ΕΤΟΣ 2011- 2012

Έχει εκδοθεί νέα διαταγή, για την Α' Λυκείου και δεν ισχύει η παρούσα

Α΄Τάξη Ημερησίου ΕΠΑ.Λ.

~~**Η διδακτέα ύλη των μαθημάτων Άλγευρας, Γεωμετρίας για την Α΄ Λυκείου στο Ημερήσιο και Εσπερινό ΕΠΑ.Λ. και για το σχολικό έτος 2011-2012 θα ακολουθεί το αναλυτικό πρόγραμμα και τα βιβλία που θα ισχύσουν για το αντίστοιχο έτος στο Γενικό Λύκειο.**~~

Διδακτέα ύλη των Μαθηματικών των Β' και Γ' Τάξεων του Ημερήσιου ΕΠΑ.Λ. και των Β', Γ' και Δ' Τάξεων του Εσπερινού ΕΠΑ.Λ., καθώς και διδακτική της διαχείριση, κατά το σχολικό έτος 2011 – 2012.

Β΄ Τάξη Ημερήσιου ΕΠΑ.Λ.
Άλγεβρα Γενικής Παιδείας
[2 ώρες την εβδομάδα καθ' όλη τη διάρκεια του έτους]

Ι. Διδακτέα ύλη

- **Από το βιβλίο «Αλγεβρα Α΄ Γενικού Λυκείου» των Σ. Ανδρεαδάκη, Β. Κατσαργύρη, Σ. Παπασταυρίδη, Γ. Πολύζου και Α. Σβέρκου, έκδοση Ο.Ε.Δ.Β..**

Κεφ. 7ο: <u>Τριγωνομετρια</u> (Διδακτέα αλλά όχι εξεταστέα)
7.1. **Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας**
7.2. **Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες**
7.3. **Αναγωγή στο 1ο Τεταρτημόριο**

- **Από το βιβλίο «Άλγεβρα Β΄ Γενικού Λυκείου» των Σ. Ανδρεαδάκη, Β. Κατσαργύρη, Σ. Παπασταυρίδη, Γ. Πολύζου και Α. Σβέρκου, έκδοση Ο.Ε.Δ.Β..**

Κεφ. 1ο : <u>Τριγωνομετρια</u>
1.1. **Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις**
1.2. **Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις**
1.3. **Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών (<u>χωρίς</u> την υποπαράγραφο «Εφαπτομένη αθροίσματος και διαφοράς γωνιών»)**
1.4. **Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 2α (<u>χωρίς</u> τον τύπο της εφ2α και τις εφαρμογές 1, 2, 3, 4, 6)**

Κεφ. 2ο: <u>Πολυώνυμα - Πολυωνυμικές εξισώσεις</u>
2.1. **Πολυώνυμα**
2.2. **Διαίρεση πολυωνύμων**
2.3. **Πολυωνυμικές εξισώσεις**

2.4. Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές.

Κεφ. 3ο: <u>Πρόοδοι</u>
3.1. Ακολουθίες
3.2. Αριθμητική πρόοδος
3.3. Γεωμετρική πρόοδος
3.4. Ανατοκισμός – Ίσες καταθέσεις – Χρεωλυσία
3.5. Άθροισμα άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου

Κεφ. 4ο: <u>Εκθετική και Λογαριθμική συνάρτηση</u>
4.1. Εκθετική συνάρτηση
4.2. Λογάριθμοι (<u>χωρίς</u> την απόδειξη της αλλαγής βάσης)
4.3. Λογαριθμική συνάρτηση (να διδαχθούν μόνο οι λογαριθμικές συναρτήσεις με βάση το 10 και το e).

II. Διαχείριση διδακτέας ύλης

Κεφάλαιο 7ο Άλγεβρας Α΄ Λυκείου (Προτείνεται να διατεθούν <u>6 διδακτικές ώρες</u>)

§7.1 Να δοθεί έμφαση στην έννοια του ακτινίου, στη σύνδεσή του με τις μοίρες και την αναπαράστασή του στον τριγωνομετρικό κύκλο.

§7.2 Α) Προτείνεται να μη διδαχθούν οι ταυτότητες 4.
Β) Να γίνει επιλογή από τις ασκήσεις 1-6 και 10-13 της Α΄ Ομάδας.

§7.3 Προτείνεται να μη δοθούν προς λύση οι ασκήσεις της Β΄ Ομάδας.

Κεφάλαιο 1ο (Προτείνεται να διατεθούν <u>10 διδακτικές ώρες</u>)

§1.1 Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα οι ασκήσεις:
Α) 1, 3, 4, 5, 6 και 7(i, ii) της Α΄ Ομάδας
Β) 1, 2 και 3 της Β΄ ομάδας.

§1.2 Προτείνεται να μη γίνουν:
Α) Η άσκηση 11(ii) της Α΄ Ομάδας
Β) Όλες οι ασκήσεις της Β΄ ομάδας.

§1.3 Προτείνεται να μη γίνουν οι ασκήσεις 2, 3, 7, 8 και 9 της Β΄ Ομάδας.

§1.4 Προτείνεται να μη γίνουν οι ασκήσεις 7, 8 και 9 της Β΄ Ομάδας.

Κεφάλαιο 2ο (Προτείνεται να διατεθούν <u>13 διδακτικές ώρες</u>)

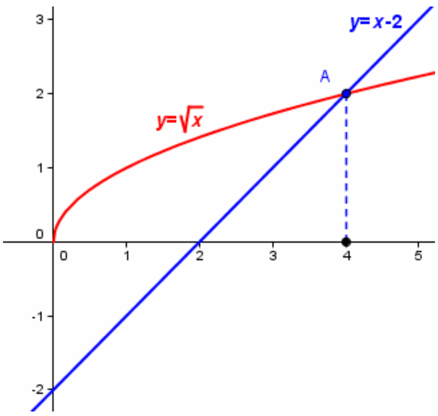
§2.1 Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα ασκήσεις:
Α) 1 και 2 (i, ii, iii) της Α΄ Ομάδας
Β) 2 και 3 της Β΄ Ομάδας.

§2.2 Προτείνεται:
Α) Να γίνουν κατά προτεραιότητα οι ασκήσεις 1 (i, iv), 2, 3 και 10 της Α΄ Ομάδας
Β) Να μη γίνουν οι ασκήσεις της Β΄ Ομάδας.

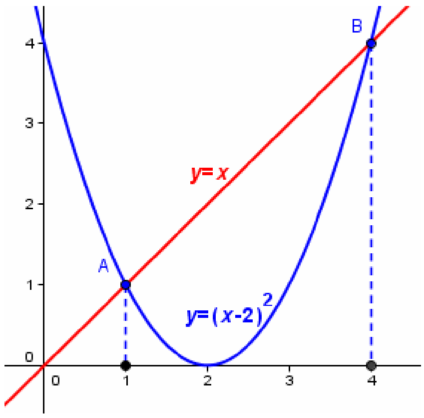
§2.3
Α) Να μη δοθεί έμφαση στην τυπική διατύπωση του θεωρήματος (σελ. 77), αλλά στη γεωμετρική ερμηνεία του, στο παράδειγμα που ακολουθεί και στην άσκηση 8.

Β) Επιπλέον, προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα οι ασκήσεις 1, 4, 5, 6 και 8 της Α΄ Ομάδας και τα προβλήματα της Β΄ Ομάδας, τα οποία οδηγούν στην επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων.

§2.4 Α) Να δοθεί έμφαση στο γεγονός ότι η ύψωση των μελών μιας εξίσωσης στο τετράγωνο δεν οδηγεί πάντα σε ισοδύναμη εξίσωση. Αυτό μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια των παρακάτω γραφικών παραστάσεων που αναφέρονται στο παράδειγμα 2, σελ. 82.



Γραφική λύση της $\sqrt{x}=x-2$



Γραφική λύση της $x=(x-2)^2$

Β) Επιπλέον, προτείνεται να μη γίνουν οι ασκήσεις 3 και 4 της Β΄ Ομάδας.

Κεφάλαιο 3ο (Προτείνεται να διατεθούν 11 διδακτικές ώρες)

§3.1 Προτείνεται να μη γίνουν οι ασκήσεις της Β΄ Ομάδας.

§3.2 Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα οι ασκήσεις:
Α) 1(i, ii, iii), 2(ii), 3(i, ii), 4(i), 5(i), 8(iii, iv), 9(i), 11(i), και 12 της Α΄ Ομάδας
Β) 4, 5, 11, 12, 14 και 16 της Β΄ Ομάδας

§3.3 Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα οι ασκήσεις:
Α) 1(i, ii), 2(ii), 3(i), 4(i), 5(ii), 6, 9(i, ii), 10(i, ii), 11(i), 12 και 13 της Α΄ Ομάδας
Β) 13 και 14 της Β΄ Ομάδας.

§3.4 Α) Προτείνεται οι τύποι να δίνονται στους μαθητές για την επίλυση ασκήσεων, ώστε να μην αποτελέσουν αντικείμενο απομνημόνευσης.
Β) Προτείνεται, επίσης, να χρησιμοποιούνται υπολογιστές τσέπης.
Γ) Προτείνεται να μη γίνουν οι ασκήσεις Β' Ομάδας.

§3.5 Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα:
Α) Οι ασκήσεις της Α' Ομάδας
Β) Μόνο η άσκηση 3 της Β' Ομάδας

Κεφάλαιο 4ο (Προτείνεται να διατεθούν <u>12 διδακτικές ώρες</u>)

§4.1 Προτείνεται να δοθεί έμφαση στα προβλήματα της Β' Ομάδας, με προτεραιότητα στα 6, 7 και 8.

§4.2 Α) Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα:
- Οι ασκήσεις της Α' Ομάδας με έμφαση στα προβλήματα
- Οι ασκήσεις 2, 3, 5 της Β' Ομάδας.

Β) Προτείνεται να μη γίνουν οι ασκήσεις 6, 7 και 8 της Β' Ομάδας.

§4.3 Α) Προτείνεται να διδαχθούν μόνο οι συναρτήσεις $f(x) = \log x$ και $f(x) = \ln x$.
Β) Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα οι ασκήσεις:
- 2, 5, 6, 7 και 8 της Α' Ομάδας
- 1(i, iii), 3, 5, 7 και 8 της Β' Ομάδας.

Ασκήσεις Γ' Ομάδας:
Να μη διδάσκονται ασκήσεις Γ' Ομάδας.

Γεωμετρία Γενικής Παιδείας

[1 ώρα την εβδομάδα καθ' όλη τη διάρκεια του έτους]

Ι. Διδακτέα ύλη

Από το βιβλίο «Ευκλείδεια Γεωμετρία Α' και Β' Γενικού Λυκείου» των Αργυρόπουλου Η., Βλάμου Π., Κατσούλη Γ., Μαρκάκη Σ. και Σιδέρη Π., έκδοση Ο.Ε.Δ.Β..

Κεφ. 9ο: <u>Μετρικές σχέσεις</u>
9.1 Ορθές προβολές
9.2 Το Πυθαγόρειο θεώρημα
9.3 Γεωμετρικές κατασκευές
9.4 Γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος (χωρίς την απόδειξη του θεωρήματος ΙΙ)
9.5 Θεωρήματα Διαμέσων
9.7 Τέμνουσες κύκλου

Κεφ. 10ο: <u>Εμβαδά</u>
10.1 Πολυγωνικά χωρία
10.2 Εμβαδόν ευθύγραμμου σχήματος - Ισοδύναμα ευθύγραμμα σχήματα

10.3 Εμβαδόν βασικών ευθύγραμμων σχημάτων
10.4 Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου (χωρίς την απόδειξη του τύπου ΙΙΙ)
10.5 Λόγος εμβαδών ομοίων τριγώνων – πολυγώνων
10.6 Μετασχηματισμός πολυγώνου σε ισοδύναμό του

Κεφ. 11ο: <u>Μέτρηση Κύκλου</u>
11.1 Ορισμός κανονικού πολυγώνου
11.2 Ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων (χωρίς τις αποδείξεις των θεωρημάτων)
11.3 Εγγραφή βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και στοιχεία τους (χωρίς τις εφαρμογές 2 και 3)
11.4 Προσέγγιση του μήκους του κύκλου με κανονικά πολύγωνα
11.5 Μήκος τόξου
11.6 Προσέγγιση του εμβαδού κύκλου με κανονικά πολύγωνα
11.7 Εμβαδόν κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος
11.8 Τετραγωνισμός κύκλου

ΙΙ. Διαχείριση διδακτέας ύλης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9
(Προτείνεται να διατεθούν 9 διδακτικές ώρες)

- **Παράγραφοι 9.1, 9.2 (προτείνεται να διατεθούν 2 δ.ω.)**:

Α) Στις παραγράφους αυτές η άσκοπη ασκησιολογία αλγεβρικού χαρακτήρα δε συνεισφέρει στην κατανόηση της Γεωμετρίας.
Β) Προτείνεται να γίνει το σχόλιο της εφαρμογής ως σύνδεση με την επόμενη παράγραφο.
Γ) Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα 4, 6 σελ. 186.

- **Παράγραφος 9.3 (προτείνεται να διατεθούν 2 δ.ω.)**:

Στην παράγραφο αυτή είναι σκόπιμο να διατεθεί χρόνος ώστε να σχολιαστεί το ιστορικό σημείωμα για την ανακάλυψη των ασύμμετρων μεγεθών και να γίνουν και οι 3 κατασκευές (υποτείνουσα και κάθετη πλευρά ορθογωνίου τριγώνου, μέση ανάλογος, άρρητα πολλαπλάσια ευθύγραμμου τμήματος που δίνουν και τον τρόπο κατασκευής ευθυγράμμων τμημάτων με μήκος τετραγωνική ρίζα φυσικού – αφορμή για μία σύντομη συζήτηση για τη δυνατότητα κατασκευής ή μη των αρρήτων).

- **Παράγραφος 9.4-9.5 (προτείνεται να διατεθούν 3 δ.ω)**:

Α) Στην παράγραφο 9.4, προτείνεται να μην αναλωθεί επιπλέον διδακτικός χρόνος για άσκοπη ασκησιολογία αλγεβρικού τύπου.
Β) Τα θεωρήματα των διαμέσων (παράγραφος 9.5) μπορούν να διδαχθούν ως εφαρμογές των θεωρημάτων της οξείας και αμβλείας γωνίας (χωρίς τις ασκήσεις τους) αφού και η παράγραφος 9.6 (γεωμετρικοί τόποι που στηρίζονται στα θεωρήματα των διαμέσων) είναι εκτός ύλης.
Γ) Εφαρμογές των θεωρημάτων των διαμέσων υπάρχουν σε ασκήσεις των επόμενων παραγράφων.
Δ) Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα της σελίδας 194.

- **Παράγραφος 9.7 (προτείνεται να διατεθούν 2 δ.ω.)**:

Α) Προτείνεται να δοθεί έμφαση στην 3η εφαρμογή και στο σχόλιό της (κατασκευή χρυσής τομής, ο λόγος φ).

Β) Από τις ασκήσεις μία επιλογή θα μπορούσε να είναι: οι ερωτήσεις κατανόησης, εμπέδωσης οι 1 και 4 αποδεικτικές οι 1 και 3. Τα σύνθετα θέματα θα μπορούσαν να εξαιρεθούν από την ύλη και οι γενικές ασκήσεις.

Γ) Η δραστηριότητα 2 σελ. 205 θα μπορούσε να συνεισφέρει στην κατανόηση της 1-1 αντιστοιχίας μεταξύ των σημείων της ευθείας και των πραγματικών αριθμών.

Δ) Να μη γίνουν:

- Τα σύνθετα θέματα 3, 4 σελ. 204.
- Οι γενικές ασκήσεις του κεφαλαίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10
(Προτείνεται να διατεθούν 8 διδακτικές ώρες)

- **Παράγραφοι 10.1-10.3 (προτείνεται να διατεθούν 2 δ.ω.)**:

Α) Οι διαθέσιμες ώρες αυξάνονται προκειμένου να γίνουν και οι 3 εφαρμογές (με την παρατήρηση της 2) και οι 2 δραστηριότητες των σελ. 215 και 217.

Β) Θα μπορούσε να γίνει η απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος μέσω εμβαδών, όπως παρατίθεται στα στοιχεία του Ευκλείδη και αναφέρεται στο ιστορικό σημείωμα της σελ. 228.

Γ) Προτεινόμενες ασκήσεις:

- Οι ερωτήσεις κατανόησης
- Από τις ασκήσεις εμπέδωσης οι 3 και 6
- Από τις αποδεικτικές ασκήσεις οι 1,4,7 και 8.

Δ) Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα 1, 5 σελ. 218.

- **Παράγραφος 10.4 (προτείνεται να διατεθούν 2 δ.ω.)**:

Α) Να μη γίνει ο τύπος του Ήρωνα και οι αντίστοιχες ασκήσεις αλλά να εξηγηθεί ο συμβολισμός της ημιπεριμέτρου.

Β) Μία επιλογή ασκήσεων θα μπορούσε να είναι:

- Οι ερωτήσεις κατανόησης 1 και 2.
- Από τις ασκήσεις εμπέδωσης οι 3 και 4.
- Από τις αποδεικτικές 1,3 και 5.

Γ) Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα 1, 2 σελ. 221.

- **Παράγραφοι 10.5 - 10.6 (προτείνεται να διατεθούν 4 δ.ω.)**:

Α)Η παράγραφος 10.6 προτείνεται να διδαχθεί αφού χρειάζεται στο πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου (παράγραφος 11.8).

Β) Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα της σελίδας 225.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11
(Προτείνεται να διατεθούν 10 διδακτικές ώρες)

- **Παράγραφοι 11.1-11.2 (προτείνεται να διατεθούν 3 δ.ω.)**:

Α) Στην παράγραφο 11.1 μπορεί να γίνει μία υπενθύμιση της έννοιας του κυρτού πολυγώνου και των στοιχείων του, όπως αναφέρεται στην παράγραφο 2.20 που είναι εκτός της ύλης Α΄ Λυκείου.

Β) Προτείνεται να γίνει η παρατήρηση και το σχόλιο της σελ.236 που χρειάζονται για την επόμενη παράγραφο.

Γ) Μπορεί επίσης να γίνει μία αναφορά στο ρόλο των κανονικών πολυγώνων στη φύση, την τέχνη και τις επιστήμες (βιβλίο καθηγητή για επέκταση της αποδεικτικής άσκησης 1 σελ. 237 και συσχέτιση με τη διακόσμηση με κανονικά πολύγωνα).

Δ) Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα των σελίδων 237 – 238.

- **Παράγραφος 11.3 (προτείνεται να διατεθούν 3 δ.ω.)**:

Α) Βάσει του σχολίου και της παρατήρησης της σελ. 236 της προηγούμενης παραγράφου οι μαθητές μπορούν μόνοι τους να οδηγηθούν στην εγγραφή των βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο, όπως προτείνεται και στο βιβλίο του καθηγητή.

Β) Προτείνεται να δοθεί έμφαση στην εφαρμογή 1 και στη συνέχεια να γίνει η δραστηριότητα 1 σελ. 242.

Γ) Να μη γίνουν οι εφαρμογές:

  - Οι εφαρμογές 2 και 3 της παραγράφου 11.3
  - Τα σύνθετα θέματα της σελίδας 242.

- **Παράγραφοι 11.4-11.5 (προτείνεται να διατεθούν 2 δ.ω.)**:

Α) Οι παράγραφοι αυτοί μπορούν να προετοιμάσουν τους μαθητές που θα ακολουθήσουν τη θετική κατεύθυνση για την εισαγωγή στις άπειρες διαδικασίες με φυσιολογικό τρόπο.

Β) Θα μπορούσαν να αναφερθούν κάποια επιπλέον στοιχεία για τον αριθμό π, αλλά θα πρέπει να ξεκαθαριστεί τι είναι αλγεβρικός και τι υπερβατικός αριθμός (για την παράγραφο 11.8).

Γ) Να μη γίνει το σύνθετο θέμα 2 της σελίδας 245.

- **Παράγραφοι 11.6-11.8 (προτείνεται να διατεθούν 2 δ.ω.)**:

Α) Προτείνεται να δοθεί έμφαση στις εφαρμογές (μηνίσκοι του Ιπποκράτη) και στη δραστηριότητα σελ. 249.

Β) Στην παράγραφο 11.8 (το αδύνατο του τετραγωνισμού του κύκλου) να γίνει αναφορά στα μη επιλύσιμα προβλήματα της Γεωμετρίας με στοιχεία από το ιστορικό σημείωμα της σελ.254.

Γ) Να μη γίνει το σύνθετο θέμα 4 της σελίδας 251.

Μαθήματα Κατεύθυνσης
Μαθηματικά Θετικής-Τεχνολογικής Κατεύθυνσης

Ι. Διδακτέα ύλη

Από το βιβλίο «Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Β΄ Τάξης Γενικού Λυκείου» των Αδαμόπουλου Λ., Βισκαδουράκη Β., Γαβαλά Δ., Πολύζου Γ. και Σβέρκου Α., έκδοση Ο.Ε.Δ.Β..

Κεφ. 1ο: <u>Διανύσματα</u>

1.1. Η Έννοια του Διανύσματος
1.2. Πρόσθεση και Αφαίρεση Διανυσμάτων
1.3. Πολλαπλασιασμός Αριθμού με Διάνυσμα (χωρίς τις Εφαρμογές 1 και 2 στις σελ. 25-26)
1.4. Συντεταγμένες στο Επίπεδο (χωρίς την Εφαρμογή 2 στη σελ. 35)
1.5. Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

Κεφ. 2ο: <u>Η Ευθεία στο Επίπεδο</u>

2.1. Εξίσωση Ευθείας
2.2. Γενική Μορφή Εξίσωσης Ευθείας
2.3. Εμβαδόν Τριγώνου (<u>χωρίς</u> τις αποδείξεις των τύπων της απόστασης σημείου από ευθεία, του εμβαδού τριγώνου και της Εφαρμογής 1 στη σελ. 73)

Κεφ. 3ο: <u>Κωνικές Τομές</u>

3.1. Ο Κύκλος (χωρίς τις παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου)

3.2. Η Παραβολή (χωρίς την απόδειξη της εξίσωσης της παραβολής, την απόδειξη του τύπου της εφαπτομένης και την Εφαρμογή 1 στη σελ. 96)

3.3. Η Έλλειψη (χωρίς την απόδειξη της εξίσωσης της έλλειψης, τις παραμετρικές εξισώσεις της έλλειψης, την Εφαρμογή στη σελ. 107, την Εφαρμογή 1 στη σελ. 109 και την Εφαρμογή 2 στη σελ. 110)

3.4. Η Υπερβολή (χωρίς την απόδειξη της εξίσωσης της υπερβολής και την απόδειξη του τύπου των ασυμπτώτων)

3.5 Μόνο η υποπαράγραφος «σχετική θέση ευθείας και κωνικής» και σύμφωνα με την προτεινόμενη διαχείριση.

Κεφ. 4ο: <u>Θεωρία Αριθμών</u>

4.1. Η Μαθηματική Επαγωγή

ΙΙ. Διαχείριση διδακτέας ύλης

Κεφάλαιο 1ο (Προτείνεται να διατεθούν <u>17 διδακτικές ώρες</u>).
Ειδικότερα για την §1.5 προτείνονται τα εξής:
Α) Μετά τη διδασκαλία της υποπαραγράφου «Προβολή διανύσματος σε διάνυσμα» να δοθεί και να συζητηθεί η ερώτηση κατανόησης 13 της σελίδας 54, με σκοπό να κατανοήσουν οι μαθητές:

- ✓ Το ρόλο της προβολής διανύσματος σε διάνυσμα κατά τον υπολογισμό του εσωτερικού γινομένου αυτών.
- ✓ Ότι δεν ισχύει η ιδιότητα της διαγραφής στο εσωτερικό γινόμενο.

Β) Προτείνεται να μη γίνουν οι ασκήσεις:

- 8, 9 και 10 της Α΄ Ομάδας (σελ. 47-48).
- Οι ασκήσεις 1, 3 και 10 της Β΄ Ομάδας (σελ. 48-50).
- Οι Γενικές Ασκήσεις (σελ. 50-51).

Κεφάλαιο 2ο (Προτείνεται να διατεθούν <u>10 διδακτικές ώρες</u>).
Ειδικότερα για την §2.3 προτείνονται τα εξής:
Α) Πριν δοθούν οι τύποι της απόστασης σημείου από ευθεία και του εμβαδού τριγώνου, προτείνεται να δοθούν στους μαθητές να επεξεργαστούν δραστηριότητες, όπως οι παρακάτω δύο:

1η: Δίνονται η ευθεία $\varepsilon: x-y+1=0$ και το σημείο $A(5,\ 2)$. Να βρεθούν:
α) Η εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στην ε.
β) Οι συντεταγμένες του σημείου τομής της ζ με την ε.
γ) Η απόσταση του A από την ε.
Στη συνέχεια, να δηλωθεί στους μαθητές ότι με ανάλογο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ο τύπος απόστασης ενός σημείου από μία ευθεία, ο οποίος και να δοθεί.

2η: Δίνονται τα σημεία $A(5,\ 2)$, $B(2,\ 3)$ και Γ (3,4). Να βρεθούν:
α) Η εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$.
β) Το ύψος $A\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$ και
γ) Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

Στη συνέχεια, να δηλωθεί στους μαθητές ότι με ανάλογο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ο τύπος του εμβαδού τριγώνου του οποίου είναι γνωστές οι συντεταγμένες των κορυφών.
Β) Προτείνεται να μη γίνουν:
- Η άσκηση 7 της Β΄ Ομάδας (σελ. 76).
- Από τις Γενικές Ασκήσεις οι 3, 4, 5, 6 και 7 (σελ. 76-77).

Κεφάλαιο 3ο (Προτείνεται να διατεθούν 20 διδακτικές ώρες).
Ειδικότερα για τις §3.2, 3.3 και 3.5 προτείνονται τα εξής:
§3.2 Α**)** Πριν δοθεί ο τύπος της εξίσωσης της παραβολής, προτείνεται να λυθεί ένα πρόβλημα εύρεσης εξίσωσης παραβολής της οποίας δίνεται η εστία και η διευθετούσα. Για παράδειγμα της παραβολής με εστία το σημείο $E(1,0)$ και διευθετούσα την ευθεία $\delta: x=-1$. Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τη βασική ιδέα της απόδειξης.
Β) Προτείνονται οι ασκήσεις 4-8 να γίνουν για συγκεκριμένη τιμή του p, π.χ. για $p=2$
§3.3 Α**)** Πριν δοθεί ο τύπος της εξίσωσης της έλλειψης, προτείνεται να λυθεί ένα πρόβλημα εύρεσης εξίσωσης έλλειψης της οποίας δίνονται οι εστίες και το σταθερό άθροισμα 2α. Για παράδειγμα της έλλειψης με εστίες τα σημεία $E'(-4,0)$, $E(4,0)$ και $2\alpha=10$.
Β) Προτείνεται να μη δοθεί έμφαση σε ασκήσεις που αναλώνονται σε πολλές πράξεις, π.χ. οι ασκήσεις 3 και 5 της Β΄ Ομάδας (σελ. 112 – 113)
§3.5 Από την παράγραφο αυτή θα διδαχθεί μόνο η υποπαράγραφος «Σχετική θέση ευθείας και κωνικής» και για κωνικές της μορφής των παραγράφων 3.1 – 3.4. Έτσι, οι μαθητές θα γνωρίσουν την αλγεβρική ερμηνεία του γεωμετρικού ορισμού της εφαπτομένης των κωνικών τομών και γενικότερα της σχετικής θέσης ευθείας και κωνικής τομής.
Κεφάλαιο 4ο (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες).
§4.1Η Μαθηματική Επαγωγή αποτελεί βασική αποδεικτική μέθοδο την οποία πρέπει να γνωρίζουν οι μαθητές που στρέφονται προς τις θετικές σπουδές.

Γ΄ Τάξη Ημερήσιου ΕΠΑ.Λ.
Μαθηματικά Ι
[5 ώρες την εβδομάδα καθ' όλη τη διάρκεια του έτους]

Ι. Διδακτέα ύλη

Από το βιβλίο "Μαθηματικά", Α΄ τάξης του 2ου Κύκλου των Τ.Ε.Ε. (Π. Βλάμος, Α. Δούναβης, Δ. Ζέρβας), έκδοση Ο.Ε.Δ.Β..

Α/Α	Κεφάλαιο / Περιεχόμενο	Σελίδες (από … έως)
1	Κεφ. 2: Περιγραφική Στατιστική	
	Παράγρ. 2.1, 2.2, 2.3 (χωρίς την κατανομή συχνοτήτων σε κλάσεις άνισου πλάτους στις σελ. 75-76) Παράγρ. 2.4 και 2.5 (εκτός της μέσης απόλυτης απόκλισης στις σελίδες 84 – 86) Παράγρ. 2.6 Εξαιρούνται οι Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου στη σελ.102.	59- 102
2	Κεφ. 3: Όριο - Συνέχεια Συνάρτησης	
	Α. Παράγρ. 3.1, 3.2, 3.3 Παράγρ. 3.4 (μόνο μελέτη απροσδιόριστης μορφής 0/0 για ρητές συναρτήσεις καθώς και για τα ριζικά μόνο την πρώτη περίπτωση του πίνακα συζυγών παραστάσεων της σελ. 115). Εξαιρούνται οι εφαρμογές: 1β και 1γ στις σελίδες 118 και 119, 4δ στις σελίδες 122 και 123, 5 στις σελ. 123 και 124, 6 στις σελίδες 124 και 125, και 7 στις σελίδες 125 και 126.	107-132
	Β. Παράγρ. 3.6, 3.7, 3.8 και 3.9. Εξαιρούνται οι εφαρμογές : 2 στις σελίδες 142 και 143, 5 στη σελ.145 και 7 στις σελίδες 147 και 148.	133-151
3	Κεφ. 4: Στοιχεία Διαφορικού Λογισμού	
	Α. Παράγρ. 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 και 4.6.	173 - 200
	Β. Παράγρ. 4.8 και 4.9.	210 - 222
4	Κεφ. 5: Στοιχεία Ολοκληρωτικού Λογισμού	
	Παράγρ. 5.1, 5.2, 5.3 και 5.4. Εξαιρούνται οι εφαρμογές: 7 και 8 στις σελίδες 238 και 239, 9 και 10 στις σελίδες 246 και 247, οι ασκήσεις 1, 2, 3, 4 στις σελίδες 249 και 250, η απόδειξη του τύπου της παραγοντικής ολοκλήρωσης στη σελ. 242 και οι Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου στις σελ.258-261.	231 -258

Γενική Παρατήρηση :

Α) Οι εφαρμογές και τα παραδείγματα του βιβλίου μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως προτάσεις για τη λύση ασκήσεων ή την απόδειξη άλλων προτάσεων.

Β) Εφαρμογές και ασκήσεις που αναφέρονται σε όρια στο άπειρο, καθώς και σε παραγράφους ή τμήματα παραγράφων που έχουν εξαιρεθεί, δεν αποτελούν μέρος της εξεταστέας ύλης.

ΙΙ. Διδακτική διαχείριση

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΠΙΝΑΚΕΣ – ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
Το κεφάλαιο αυτό δε θα διδαχθεί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ (Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 22 διδακτικές ώρες.)
Με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται οι μαθητές:

- Να γνωρίζουν τις διαδοχικές φάσεις μίας στατιστικής έρευνας
- Να γνωρίζουν τις βασικές έννοιες της Περιγραφικής Στατιστικής και να χρησιμοποιούν σωστά τη σχετική ορολογία.
- Να μπορούν να διαβάσουν και να κατασκευάσουν πίνακες κατανομής συχνοτήτων.
- Να μπορούν να διαβάζουν τις διάφορες μορφές των γραφικών παραστάσεων κατανομών συχνοτήτων.
- Να μπορούν να παριστάνουν γραφικά μία κατανομή συχνοτήτων.
- Να γνωρίζουν και να μπορούν να υπολογίζουν:
  - ✓ τις παραμέτρους θέσης μίας κατανομής συχνοτήτων και
  - ✓ τις παραμέτρους διασποράς μιας κατανομής συχνοτήτων.

Μεγάλο μέρος του περιεχομένου της ενότητας της Περιγραφικής Στατιστικής έχει διδαχθεί στο Γυμνάσιο. Εδώ γίνεται συστηματικότερη παράσταση και συμπλήρωση των σχετικών εννοιών.
Για να μην καθυστερεί η διδασκαλία, οι στατιστικοί πίνακες και τα διαγράμματα κρίνεται σκόπιμο να ετοιμάζονται σε φωτοτυπίες ή διαφάνειες πριν από το μάθημα. Αν αυτό δεν είναι εφικτό, συνιστάται να γίνεται επεξεργασία τους μέσα από το βιβλίο.
Να καταβληθεί προσπάθεια με κατάλληλα παραδείγματα να κατανοήσουν οι μαθητές τις έννοιες πληθυσμός, μεταβλητή και δείγμα. Είναι σημαντικό να αναγνωρίζουν οι μαθητές τη χρησιμότητα του δείγματος από το οποίο μπορούν να προκύψουν αξιόπιστες πληροφορίες για ολόκληρο τον πληθυσμό.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ
Κατά τη διδασκαλία του 2ου κεφαλαίου

- Από την παράγραφο 2.3 δε θα διδαχθεί η κατανομή συχνοτήτων σε κλάσεις άνισου πλάτους στις σελ. 75-76.
- Από την παράγραφο 2.5 δε θα διδαχθεί η μέση απόλυτη απόκλιση στις σελίδες 84 – 86.
- Δε θα διδαχθούν οι Γενικές Ασκήσεις του Κεφαλαίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΟΡΙΟ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 28 διδακτικές ώρες.)
Με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται οι μαθητές:

- Να μπορούν να βρίσκουν το όριο μίας συνάρτησης στο x_o, όταν δίνεται η γραφική της παράσταση.
- Να γνωρίζουν τις βασικές ιδιότητες του ορίου συνάρτησης και με τη βοήθειά του να υπολογίζουν το όριο πολλών συναρτήσεων.
- Να κατανοήσουν την έννοια της συνέχειας συνάρτησης σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της.

Η έννοια του ορίου συνάρτησης στο x_o, εισάγεται είτε εποπτικά με την βοήθεια της γραφικής παράστασης, είτε με παρατήρηση κατάλληλου πίνακα τιμών της συνάρτησης. Τόσο τα σχήματα όσο και οι πίνακες, για οικονομία χρόνου, να δίδονται στους μαθητές είτε με διαφάνειες, είτε με φωτοτυπίες ή ακόμα να γίνονται οι παρατηρήσεις μέσα από ανοικτά βιβλία.

Η διδασκαλία του ορίου **δεν αποτελεί αυτοσκοπό** αλλά στοχεύει στην προετοιμασία για την εισαγωγή στις έννοιες της παραγώγου και του ολοκληρώματος. Δεν θα γίνουν ασκήσεις που αναφέρονται στις περιπτώσεις 2 και 3 του πίνακα συζυγών παραστάσεων της σελίδας 115.

Η έννοια της συνέχειας συνάρτησης εισάγεται εποπτικά και ακολουθεί ο ορισμός με την βοήθεια του ορίου.

Διευκρινίζεται ότι στην αρχή του κεφαλαίου αυτού πρέπει να γίνει μία επανάληψη στην έννοια της συνάρτησης, με επιδίωξη οι μαθητές να μπορούν:

- να βρίσκουν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης
- να σχεδιάζουν τις γραφικές παραστάσεις των βασικών συναρτήσεων (αχ, $αχ^2$, α/χ, ημ, συν, εφ, e^x, lnχ)
- από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης να βρίσκουν την τιμή της σ' ένα σημείο x_0, τη μονοτονία της κατά διαστήματα και τα ακρότατα.
- να βρίσκουν το άθροισμα, το γινόμενο και το πηλίκο απλών συναρτήσεων.

Επειδή οι μαθητές δεν έχουν διδαχθεί την έννοια της σύνθετης συνάρτησης, θα πρέπει ο διδάσκων να αφιερώσει τον αναγκαίο χρόνο για την κατανόηση της έννοιας αυτής πριν τη διδασκαλία του θεωρήματος της συνέχειας σύνθετης συνάρτησης, σελ. 141.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Κατά τη διδασκαλία του $3^{ου}$ κεφαλαίου

- Από την παράγρ. 3.4 θα διδαχθεί **μόνο** η μελέτη απροσδιόριστης μορφής 0/0 για ρητές συναρτήσεις καθώς και για τα ριζικά μόνο η πρώτη περίπτωση του πίνακα συζυγών παραστάσεων της σελ. 115.
- Δε θα διδαχθούν οι παράγραφοι 3.5, 3.10 και 3.11.
- Δε θα διδαχθούν οι εφαρμογές: 1β και 1γ στις σελίδες 118 και 119, 4δ στις σελίδες 122 και 123, 5 στις σελ. 123 και 124, 6 στις σελίδες 124 και 125, 7 στις σελίδες 125 και 126, 2 στις σελίδες 142 και 143, 5 στη σελ.145, και 7 στις σελίδες 147 και 148.

.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: **ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ** (**Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 40 διδακτικές ώρες**.)

Με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται οι μαθητές:

- Να κατανοήσουν την έννοια της παραγώγου σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης και να την ερμηνεύουν ως ρυθμό μεταβολής.
- Να γνωρίζουν του κανόνες παραγώγισης βασικών συναρτήσεων.
- Να μπορούν να προσδιορίζουν τα διαστήματα στα οποία μία συνάρτηση είναι σταθερή, γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.
- Να μπορούν να βρίσκουν τα ακρότατα (αν υπάρχουν) μίας συνάρτησης.

Για την εύρεση του ρυθμού μεταβολής να χρησιμοποιηθούν παραδείγματα από τη μέτρηση στερεών έτσι, ώστε οι μαθητές να επαναλάβουν τους αντίστοιχους τύπους. Να λυθούν προβλήματα στα οποία να ζητείται το μέγιστο ή το ελάχιστο μιας συνάρτησης.

Να γίνουν πολλές εφαρμογές του Διαφορικού Λογισμού τόσο στην Γεωμετρία, όσο και σε άλλες επιστήμες.

Διευκρινίζεται ότι:

α) Στην Παράγραφο **4.4,** η παράγωγος σύνθετης συνάρτησης αποτελεί μέρος της διδακτέας και εξεταστέας ύλης. Δηλαδή, **δεν εξαιρείται** ο κανόνας της αλυσίδας.

β) Η παράγραφος **4.6** της παράγουσας συνάρτησης να διδαχθεί μαζί με τα ολοκληρώματα (Αν μείνει στη θέση της, θα ξεχαστεί από τους μαθητές, αφενός γιατί ακολουθούν η μονοτονία και τα ακρότατα που είναι ιδιαίτερης βαρύτητας, αφετέρου επειδή δεν υπάρχουν ασκήσεις στο σχολικό βιβλίο που να υποστηρίζουν τη διδασκαλία της.)
β) Στην Παράγραφο **4.9,** το κριτήριο της 2ης παραγώγου αποτελεί μέρος της διδακτέας και εξεταστέας ύλης.
Με τη διδασκαλία του κριτηρίου της 2ης παραγώγου, προσφέρεται στους μαθητές η δυνατότητα να χρησιμοποιούν εναλλακτικούς τρόπους για την εύρεση των ακρότατων της συνάρτησης.
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ
Δεν θα διδαχθεί η παράγραφος 4.7.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: **ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ** (**Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 35 διδακτικές ώρες**.)

Με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται οι μαθητές:
- Να κατανοήσουν την έννοια της παράγουσας ή αρχικής συνάρτησης.
- Να κατανοήσουν την έννοια και τις ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.
- Να υπολογίζουν ολοκληρώματα διαφόρων συναρτήσεων.
- Να μπορούν να υπολογίζουν το ολοκλήρωμα για την επίλυση διάφορων προβλημάτων και για τον υπολογισμό εμβαδών.

Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων θα γίνεται με την ανακάλυψη της παράγουσας ή με την παραγοντική ολοκλήρωση.
Να λυθούν προβλήματα στα οποία δίνεται ο ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους ως προς ένα άλλο και ζητείται η συνάρτηση που εκφράζει τη σχέση των δύο μεγεθών.
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ
Κατά τη διδασκαλία του 5ου κεφαλαίου
Δε θα διδαχθούν:
- Η απόδειξη του τύπου της παραγοντικής ολοκλήρωσης στη σελ. 242.
- Οι εφαρμογές: 7 και 8 στις σελίδες 238 και 239, 9 και 10 στις σελίδες 246 και 247.
- Οι ασκήσεις 1, 2, 3, 4 στις σελίδες 249 και 250.
- Οι Γενικές Ασκήσεις του Κεφαλαίου.

***Γενική Παρατήρηση*:**
Εφαρμογές και ασκήσεις που αναφέρονται σε όρια στο άπειρο καθώς και σε παραγράφους ή τμήματα παραγράφων που έχουν εξαιρεθεί **δεν** αποτελούν μέρος της εξεταστέας ύλης.

Μαθηματικά ΙΙ
Εισαγωγή

Η ύλη στα Μαθηματικά κατεύθυνσης Γ' Λυκείου, στο μεγαλύτερο μέρος της, αποτελεί μια εισαγωγή των μαθητών στις βασικές έννοιες της Μαθηματικής Ανάλυσης. Όπως έχει προκύψει από διεθνείς έρευνες αλλά και από έρευνες που έχουν γίνει στη χώρα μας, οι μαθητές αντιμετωπίζουν σημαντικά προβλήματα στην κατανόηση των εννοιών της Ανάλυσης.
Ο σχηματισμός σωστών εικόνων για μια μαθηματική έννοια αποτελεί αναγκαία προϋπόθεση για την κατανόηση της. Οι προτάσεις που ακολουθούν έχουν ως στόχο τη σωστή διαισθητική κατανόηση των βασικών εννοιών και των βασικών θεωρημάτων, με την ανάπτυξη

σωστών εικόνων και αντιλήψεων, καθώς και την ανάπτυξη δεξιοτήτων για τη λύση προβλημάτων.

ΙΙ. Διδακτέα ύλη

Από το βιβλίο «Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης» Γ΄ Τάξης Γενικού Λυκείου των Ανδρεαδάκη Στ., κ.α., έκδοση Ο.Ε.Δ.Β.

ΜΕΡΟΣ Α

Κεφ. 2ο : Μιγαδικοί αριθμοί

2.1. Η έννοια του Μιγαδικού Αριθμού
2.2. Πράξεις στο σύνολο C των Μιγαδικών
2.3. Μέτρο Μιγαδικού Αριθμού

ΜΕΡΟΣ Β

Κεφ. 1ο : Όριο - Συνέχεια συνάρτησης

1.1. Πραγματικοί αριθμοί
1.2. Συναρτήσεις.
1.3. Μονότονες συναρτήσεις - Αντίστροφη συνάρτηση.
1.4. Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in R$
1.5. Ιδιότητες των ορίων (χωρίς τις αποδείξεις της υποπαραγράφου: «Τριγωνομετρικά όρια»)
1.6. Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in R$
1.7. Όριο συνάρτησης στο άπειρο
1.8. Συνέχεια συνάρτησης

Κεφ. 2ο: Διαφορικός Λογισμός

2.1. Η έννοια της παραγώγου (χωρίς την υποπαράγραφο: «Κατακόρυφη εφαπτομένη»).
2.2. Παραγωγίσιμες συναρτήσεις - Παράγωγος συνάρτηση.
2.3. Κανόνες παραγώγισης, χωρίς την απόδειξη του θεωρήματος που αναφέρεται στην παράγωγο γινομένου συναρτήσεων.
2.4. Ρυθμός μεταβολής.
2.5. Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού.
2.6. Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.
2.7. Τοπικά ακρότατα συνάρτησης, χωρίς το θεώρημα της σελίδας 264 («Κριτήριο της 2ης παραγώγου»).
2.8. Κυρτότητα-Σημεία καμπής συνάρτησης (Θα μελετηθούν μόνο οι συναρτήσεις που είναι δύο, τουλάχιστον, φορές παραγωγίσιμες στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού τους).
2.9. Ασύμπτωτες - Κανόνες De l′ Hospital.
2.10. Μελέτη και χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.

Κεφ. 3ο: Ολοκληρωτικός Λογισμός

3.1. Αόριστο ολοκλήρωμα (Μόνο η υποπαράγραφος «Αρχική συνάρτηση», που θα συνοδεύεται από πίνακα παραγουσών συναρτήσεων ο οποίος περιλαμβάνεται στην προτεινόμενη διδακτική διαχείριση.
3.4. Ορισμένο ολοκλήρωμα.
3.5. Η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$.

3.7. Εμβαδόν επίπεδου χωρίου (χωρίς την εφαρμογή 3 της σελίδας 348).

Παρατηρήσεις:

1. Η διδακτέα - εξεταστέα ύλη θα διδαχτεί σύμφωνα με τις οδηγίες του Π.Ι.
2. Τα θεωρήματα, οι προτάσεις, οι αποδείξεις και οι ασκήσεις που φέρουν αστερίσκο δε διδάσκονται και δεν εξετάζονται.
3. Οι εφαρμογές και τα παραδείγματα των βιβλίων δεν εξετάζονται ούτε ως θεωρία ούτε ως ασκήσεις. Μπορούν, όμως, να χρησιμοποιηθούν ως προτάσεις για τη λύση ασκήσεων ή την απόδειξη άλλων προτάσεων.
4. Εξαιρούνται από την διδακτέα - εξεταστέα ύλη οι εφαρμογές και οι ασκήσεις που αναφέρονται σε λογαρίθμους με βάση διαφορετική του e και του 10.

ΙΙ. Διαχείριση διδακτέας ύλης

ΜΕΡΟΣ Α΄: Άλγεβρα

Κεφάλαιο 2ο (Προτείνεται να διατεθούν 12 διδακτικές ώρες)
Ειδικότερα:

§2.1 - **§2.2** (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)

§2.3 (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες).

Κατά τη διδασκαλία των τριών παραπάνω παραγράφων προτείνεται να δοθεί έμφαση στη γεωμετρική ερμηνεία των μιγαδικών αριθμών και των ιδιοτήτων τους σε συνδυασμό με γνώσεις από τα μαθηματικά κατεύθυνσης της Β' Λυκείου και την Ευκλείδεια Γεωμετρία.
Οι δύο (2) ώρες που απομένουν από τον συνολικό αριθμό των προτεινόμενων ωρών να διατεθούν για ασκήσεις από το σύνολο του κεφαλαίου.

ΜΕΡΟΣ Β΄: Ανάλυση

Κεφάλαιο 1ο (Προτείνεται να διατεθούν 33 διδακτικές ώρες).
Ειδικότερα:

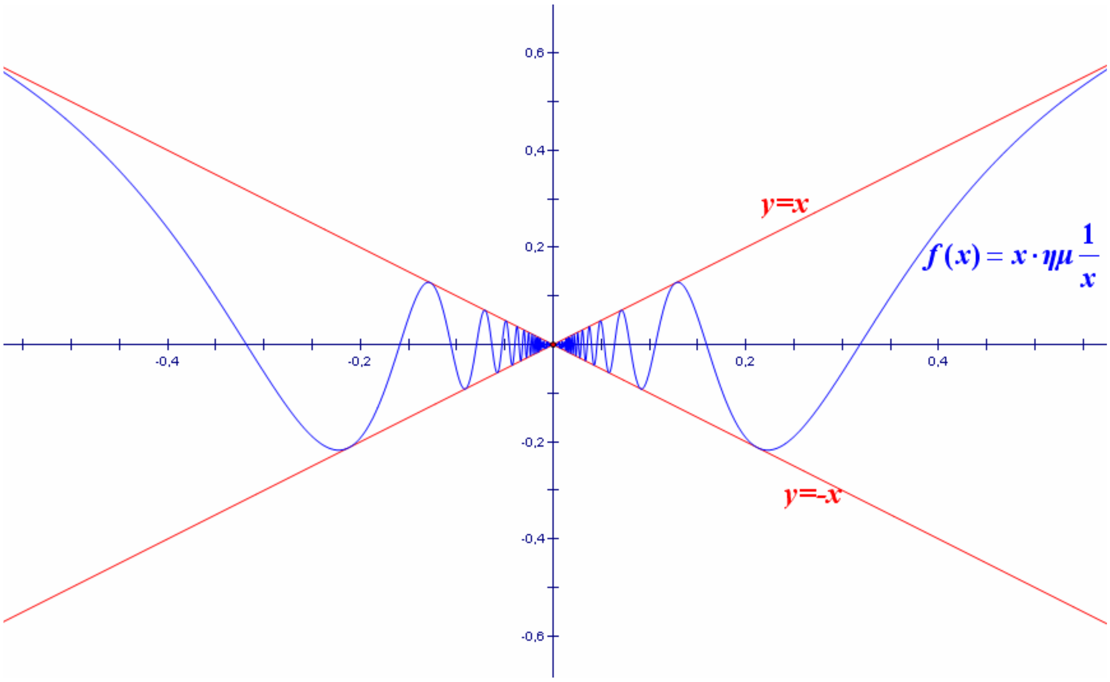
§1.1 (Προτείνεται να διατεθεί 1 διδακτική ώρα).
Το περιεχόμενο της παραγράφου αυτής είναι σημείο αναφοράς για τα επόμενα. Οι περισσότερες από τις έννοιες που περιέχονται είναι ήδη γνωστές στους μαθητές. Γι΄ αυτό η διδασκαλία δεν πρέπει να στοχεύει στην εξ΄ υπαρχής αναλυτική παρουσίαση γνωστών εννοιών, αλλά στο να δίνει "αφορμές" στους μαθητές να ανατρέχουν στα βιβλία των προηγούμενων τάξεων και να επαναφέρουν στη μνήμη τους γνωστές έννοιες και προτάσεις που θα τις χρειαστούν στα επόμενα.

§1.2 (Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες).

Να δοθεί έμφαση στις έννοιες της ισότητας και της σύνθεσης συναρτήσεων και στη χρήση και ερμηνεία των γραφικών παραστάσεων.

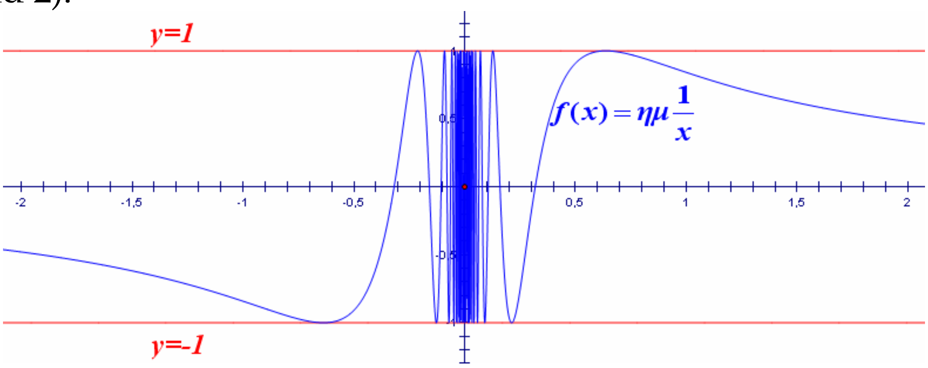
§1.3 (Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες).
α) Να γίνουν ασκήσεις ελέγχου της ιδιότητας 1-1 μέσα από γραφήματα.
β) Στην άσκηση 3 (σελ. 156) να μελετηθεί η μονοτονία των συναρτήσεων που δίδονται οι γραφικές τους παραστάσεις. Να γίνουν και άλλες τέτοιου τύπου ασκήσεις.

§1.4 (Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες).
Με δεδομένο ότι ο τυπικός ορισμός του ορίου (σελ. 161) δεν συμπεριλαμβάνεται στην ύλη, να δοθεί βάρος στη διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του ορίου. Δηλαδή, να γίνει προσπάθεια, μέσα από γραφικές παραστάσεις κατάλληλων συναρτήσεων, να αποκτήσουν οι μαθητές μια καλή εικόνα και να αποφευχθούν παρανοήσεις, που από τη βιβλιογραφία έχει προκύψει ότι δημιουργούνται συχνά στους μαθητές, για την έννοια του ορίου. Να τονιστεί ιδιαίτερα, μέσα από κατάλληλες γραφικές παραστάσεις, ότι η συμπεριφορά της συνάρτησης στο σημείο x_0 δεν επηρεάζει το όριο της όταν το x τείνει στο x_0, καθώς και ότι η τιμή του $\lim_{x\to x_0} f(x)$ καθορίζεται, από τις τιμές που παίρνει η συνάρτηση κοντά στο x_0. Δηλαδή, δύο συναρτήσεις που έχουν τις ίδιες τιμές σε ένα διάστημα γύρω από το x_0 αλλά μπορεί να διαφέρουν στο x_0 (παίρνουν διαφορετικές τιμές ή η μια ορίζεται και η άλλη δεν ορίζεται ή καμία δεν ορίζεται) έχουν το ίδιο όριο όταν το x τείνει στο x_0 (σχολικό βιβλίο, σελ. 158-160). Να τονιστεί, επίσης, ότι η ύπαρξη του ορίου δεν συνεπάγεται μονοτονία, κάτι που όπως προκύπτει από τη βιβλιογραφία είναι συνηθισμένη παρανόηση των μαθητών, ούτε όμως και τοπική μονοτονία δεξιά και αριστερά του x_0, δηλαδή μονοτονία σε ένα διάστημα αριστερά του x_0 και σε ένα διάστημα δεξιά του x_0. Για το σκοπό αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθούν γραφικές παραστάσεις κατάλληλων συναρτήσεων, που θα σχεδιαστούν με τη βοήθεια λογισμικού, όπως είναι για παράδειγμα η $f(x) = x \cdot \eta\mu\frac{1}{x}$ (Σχήμα 1).



Σχήμα 1.

Επίσης, επειδή πολλοί μαθητές θεωρούν ότι όταν ένα όριο δεν υπάρχει τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι διαφορετικά, να δοθούν γραφικά και να συζητηθούν παραδείγματα που δεν υπάρχουν τα πλευρικά όρια, όπως για παράδειγμα η $f(x) = \eta\mu\frac{1}{x}$ (Σχήμα 2).

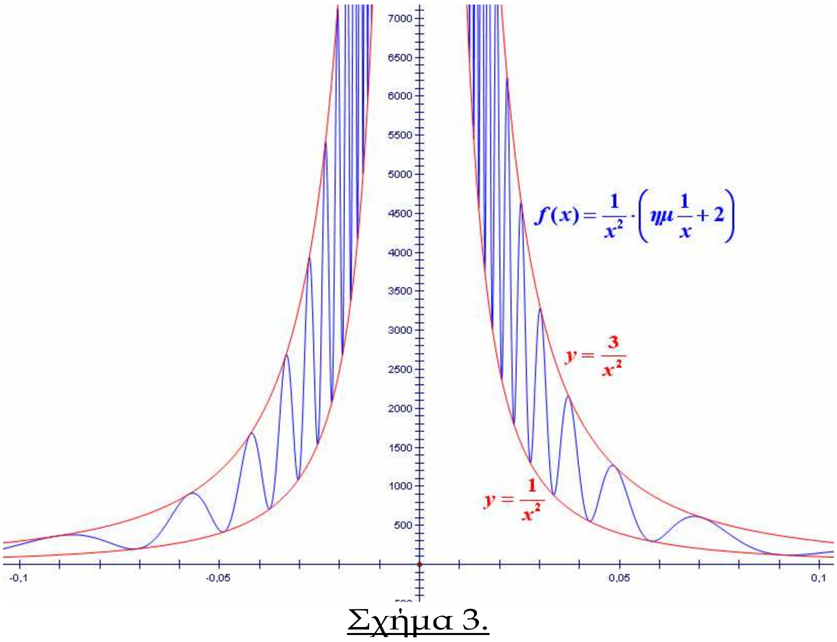


Σχήμα 2.

§1.5 (Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες).

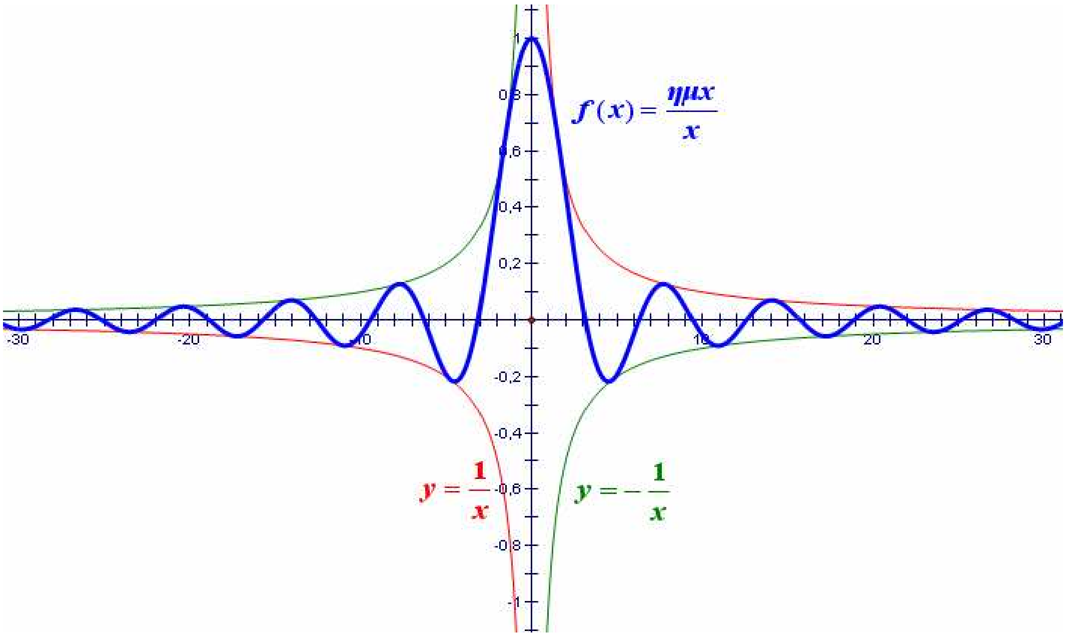
Στην ενότητα αυτή δεν έχει νόημα μια άσκοπη ασκησιολογία που οι μαθητές υπολογίζουν όρια, κάνοντας χρήση αλγεβρικών δεξιοτήτων. Στη λύση των ασκήσεων να ζητείται από τους μαθητές να τονίζουν τις ιδιότητες των ορίων που χρησιμοποιούν, ώστε οι ασκήσεις αυτές να αποκτούν ουσιαστικό περιεχόμενο από πλευράς Ανάλυσης, κάτι που θα βοηθήσει στην ανάπτυξη της κατανόησης από τους μαθητές της έννοιας του ορίου. Για παράδειγμα σε ερωτήσεις όπως «να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^3-8}$» (άσκηση 3 i) θα πρέπει να ζητείται από τους μαθητές να αιτιολογήσουν ποιες ιδιότητες των ορίων χρησιμοποιούνται στα ενδιάμεσα στάδια μέχρι τον τελικό υπολογισμό, να προβληματιστούν αν οι $f(x)=\dfrac{x^4-16}{x^3-8}$ και $g(x)=\dfrac{(x^2+4)\cdot(x+2)}{x^2+2x+4}$ είναι ίσες και, αφού διαπιστώσουν ότι δεν είναι ίσες, να δικαιολογήσουν γιατί έχουν ίσα όρια. Επίσης σε ασκήσεις όπου η συνάρτηση ορίζεται με διαφορετικό τύπο σε δύο συνεχόμενα διαστήματα, όπως π.χ. η άσκηση 5 (σελ. 175), να ζητείται αιτιολόγηση γιατί στο σημείο αλλαγής του τύπου είμαστε υποχρεωμένοι να ελέγχουμε τα πλευρικά όρια, ενώ στα άλλα σημεία του πεδίου ορισμού μπορούμε να βρούμε το όριο χρησιμοποιώντας τον αντίστοιχο τύπο. Δηλαδή, να φαίνεται ότι οι μαθητές κατανοούν ότι το όριο καθορίζεται από τις τιμές της συνάρτησης κοντά στο x_0 και εκατέρωθεν αυτού. Αυτό μας επιτρέπει στα σημεία τα διαφορετικά από το x_0 να χρησιμοποιούμε τον ένα τύπο, ενώ στο x_0 πρέπει να πάρουμε πλευρικά όρια.

§1.6 (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες).
Να δοθεί βάρος στη διαισθητική προσέγγιση της έννοιας με τη χρήση γραφικών παραστάσεων. Εκτός από τα παραδείγματα του βιβλίου να δοθούν, μέσα από κατάλληλες γραφικές παραστάσεις, που θα σχεδιαστούν με τη βοήθεια λογισμικού, παραδείγματα όπου το όριο δεν είναι πεπερασμένο αλλά δεν υπάρχει μονοτονία, όπως π.χ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x^2}\cdot\left(\text{ημ}\dfrac{1}{x}+2\right)$ (Σχήμα 3), ώστε να αποφευχθεί η παρανόηση που συνδέει την ύπαρξη μη πεπερασμένου ορίου στο x_0 με τη μονοτονία.



<u>Σχήμα 3.</u>

§1.7 (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες).
Να δοθεί βάρος στη διαισθητική προσέγγιση της έννοιας. Να δοθούν, μέσα από κατάλληλες γραφικές παραστάσεις, παραδείγματα συναρτήσεων των οποίων το όριο, όταν το x τείνει στο $+\infty$, υπάρχει αλλά οι συναρτήσεις αυτές δεν είναι μονότονες, όπως είναι για παράδειγμα η $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$ (Σχήμα 4), καθώς και συναρτήσεων των οποίων το όριο δεν υπάρχει, όταν το x τείνει στο $+\infty$, όπως είναι για παράδειγμα η $f(x)=\eta\mu x$.



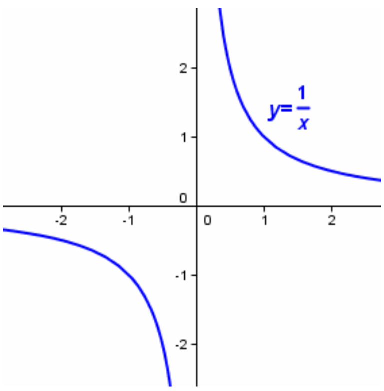
Σχήμα 4.

Τα όρια:

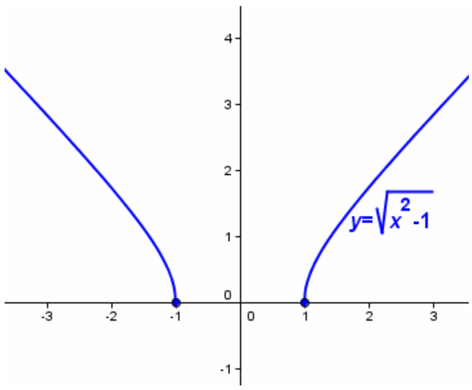
$$\lim_{x\to+\infty} x^n, \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} \text{ και } \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n}$$

να συζητηθούν με τη χρήση γραφικών παραστάσεων, που θα σχεδιαστούν με τη βοήθεια λογισμικού, και πινάκων τιμών, με στόχο να αντιληφθούν διαισθητικά οι μαθητές ποια είναι τα όρια αυτά.
Η τελευταία παράγραφος, πεπερασμένο όριο ακολουθίας, να συζητηθεί γιατί θα χρειαστεί για το ορισμένο ολοκλήρωμα.

§1.8 (Προτείνεται να διατεθούν 10 διδακτικές ώρες).
Στην πρώτη ενότητα (ορισμός της συνέχειας) να συζητηθούν και γραφικά παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού ένωση ξένων διαστημάτων, όπως είναι για παράδειγμα οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{1}{x}$ (Σχήμα 5) και $g(x)=\sqrt{x^2-1}$ (Σχήμα 6)



Σχήμα 5



Σχήμα 6

και να συζητηθεί γιατί το γράφημα των συναρτήσεων αυτών διακόπτεται, παρόλο που είναι συνεχείς. Να δοθούν στους μαθητές και σχετικές ασκήσεις.

Επίσης, κατά τη διδασκαλία των θεωρημάτων Bolzano, ενδιάμεσων τιμών και μέγιστης και ελάχιστης τιμής, καθώς και της πρότασης ότι η συνεχής εικόνα διαστήματος είναι διάστημα, να δοθεί έμφαση και να συζητηθούν οι γραφικές παραστάσεις που ακολουθούν τις τυπικές διατυπώσεις αυτών, ώστε οι μαθητές να βοηθηθούν στην ουσιαστική κατανόηση τους.
Το θεώρημα Bolzano είναι το πρώτο ουσιαστικά θεώρημα που συναντάνε οι μαθητές στην Ανάλυση. Για αυτό είναι καλό να γίνει μια συζήτηση που να αφορά την αναγκαιότητα των υποθέσεων του θεωρήματος ανάλογη με το σχόλιο του θεωρήματος των ενδιάμεσων τιμών (σελ. 194). Επίσης θα πρέπει να τονισθεί ότι δεν ισχύει το αντίστροφο. Δηλαδή ενδέχεται οι τιμές μιας συνάρτησης στα άκρα ενός κλειστού διαστήματος $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της να έχουν το ίδιο πρόσημο, η συνάρτηση να μην είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και όμως να παίρνει την τιμή 0 σε ένα εσωτερικό σημείο του $[\alpha, \beta]$.
Οι ώρες που απομένουν να διατεθούν για την επίλυση επαναληπτικών ασκήσεων από ολόκληρο το κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 2ο (Προτείνεται να διατεθούν 38 διδακτικές ώρες)

§2.1 (Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες).
Να δοθεί έμφαση στην εισαγωγή της έννοιας μέσω του προβλήματος της στιγμιαίας ταχύτητας και της εφαπτομένης. Μετά τον ορισμό της παραγώγου και της εφαπτομένης γραφικής παράστασης συνάρτησης (σελ214) να συζητηθεί αναλυτικότερα η έννοια της εφαπτομένης. Επίσης, να δοθούν παραδείγματα που θα βοηθήσουν τον μαθητή να ανακατασκευάσει την εικόνα της εφαπτομένης που έχει από τον κύκλο (η εφαπτομένη έχει ένα κοινό σημείο και δεν κόβει την καμπύλη) και να σχηματίσει μια γενικότερη εικόνα για την εφαπτομένη ευθεία. Για παράδειγμα, προτείνεται να συζητηθούν και να δοθούν στους μαθητές γραφικά:

i) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^3$ στο σημείο Ο, ώστε να καταλάβουν ότι η εφαπτομένη μιας καμπύλης μπορεί να διαπερνά την καμπύλη και

ii) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \begin{cases} x^2, & \alpha\nu\ x \leq 0 \\ 0, & \alpha\nu\ x > 0 \end{cases}$ στο σημείο Ο, ώστε να καταλάβουν ότι μια ημιευθεία της εφαπτομένης μιας καμπύλης μπορεί να συμπίπτει με ένα τμήμα της καμπύλης και επιπλέον ότι η εφαπτομένη μιας ευθείας σε κάθε σημείο της συμπίπτει με την ευθεία.

§2.2 (Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες).
Να προσεχθεί ιδιαίτερα το θέμα της κατανόησης από τους μαθητές των ρόλων του h και του x στην έκφραση $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ που χρησιμοποιείται στο βιβλίο για τον υπολογισμό της παραγώγου των τριγωνομετρικών συναρτήσεων (σελ 225). Να τονιστεί η διαφορά παραγώγου σε σημείο και παραγώγου συνάρτησης.

§2.3 (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες).

Να δοθεί βάρος στην παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης καθώς και στην παρατήρηση της σελίδας 234 σχετικά με το ότι το σύμβολο $\frac{dy}{dx}$ δεν είναι πηλίκο.
Στην εφαρμογή 2 (σελ 236) που αφορά στην εφαπτομένη του κύκλου να τονιστεί ότι η εξίσωση της ευθείας που βρέθηκε με βάση τον αναλυτικό ορισμό της εφαπτομένης είναι ίδια με αυτή που γνωρίζουμε από την αναλυτική γεωμετρία. Αυτό για να σταθεροποιηθεί στους μαθητές η αντίληψη ότι η έννοια της εφαπτομένης που πραγματεύονται στην ανάλυση συνδέεται και επεκτείνει την έννοια της εφαπτομένης που γνωρίσανε στη γεωμετρία.

§2.4 (Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες).
Η έννοια του ρυθμού μεταβολής είναι σημαντική και δείχνει τη σημασία της έννοιας της παραγώγου στις εφαρμογές. Για το λόγο αυτό καλό είναι να γίνει προσπάθεια οι μαθητές να κατανοήσουν την έννοια και να δουν ορισμένες χρήσιμες εφαρμογές.

§2.5 (Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες).
Να δοθεί έμφαση στη γεωμετρική ερμηνεία των θεωρημάτων Rolle και Μέσης Τιμής που υπάρχει στο σχολικό βιβλίο μετά τη διατύπωση των θεωρημάτων αυτών. Επειδή οι μαθητές έχουν χρησιμοποιήσει το θεώρημα του Bolzano, σε ασκήσεις όπως η εφαρμογή 1 ii) μπορεί να συζητηθεί πρώτα η δυνατότητα απόδειξης με χρήση του θεωρήματος Bolzano και να φανεί ότι δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε αυτό το θεώρημα. Έτσι φαίνεται ότι το θεώρημα Rolle αποτελεί ουσιαστικό εργαλείο και για τέτοιες περιπτώσεις. Στην εφαρμογή 3 να γίνει συζήτηση τι εκφράζει το πηλίκο $\frac{S(2,5)-S(0)}{2,5}$ (μέση ταχύτητα της κίνησης) με στόχο να κατανοήσουν οι μαθητές ότι αυτό που αποδεικνύεται είναι ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης υπάρχει τουλάχιστον μια χρονική στιγμή κατά την οποία η στιγμιαία ταχύτητα θα είναι ίση με τη μέση ταχύτητα που είχε το αυτοκίνητο σε όλη την κίνηση.
Εναλλακτικά θα μπορούσε να συζητηθεί στην αρχή του κεφαλαίου, το γεγονός ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης ενός αυτοκινήτου κάποια στιγμή της διαδρομής η στιγμιαία ταχύτητά του θα είναι ίση με τη μέση ταχύτητά του (κάτι που οι μαθητές το αντιλαμβάνονται διαισθητικά). Στη συνέχεια να διατυπωθεί η μαθηματική σχέση που εκφράζει το γεγονός αυτό, και να τεθεί το ερώτημα αν το συμπέρασμα μπορεί να γενικευθεί και για άλλες συναρτήσεις. Η απάντηση στην ερώτηση αυτή είναι το θεώρημα Μέσης Τιμής.

§2.6 (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες).
Στην αρχή της διδασκαλίας αυτού του κεφαλαίου μπορεί να συνδεθεί η μονοτονία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της με την διατήρηση του λόγου μεταβολής $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ στο διάστημα αυτό. Συγκεκριμένα, να αποδειχτεί ότι η f είναι:

i) γνησίως αύξουσα στο *Δ*, αν και μόνο αν $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$, δηλαδή, αν και μόνο αν όλες οι χορδές της γραφικής της παράστασης της *f* στο *Δ* έχουν θετική κλίση.

ii) γνησίως φθίνουσα στο *Δ*, αν και μόνο αν $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$, δηλαδή, αν και μόνο αν όλες οι χορδές της γραφικής της παράστασης της *f* στο *Δ* έχουν αρνητική κλίση.

Με τον τρόπο αυτό θα συνδεθεί η μονοτονία με την παράγωγο και θα δικαιολογηθεί το γιατί στην απόδειξη του θεωρήματος της σελίδας 253 χρησιμοποιούμε το λόγο μεταβολής $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

§2.7 (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες).

§2.8 (Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες).

§2.9 (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες).
Για μια διαισθητική κατανόηση του κανόνα De L′ Hospital προτείνεται, πριν τη διατύπωση του, να δοθεί στους μαθητές να υπολογίσουν το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1-x^2}$, το οποίο είναι της μορφής «$\dfrac{0}{0}$». Οι μαθητές θα διαπιστώσουν ότι αδυνατούν να υπολογίσουν το όριο αυτό με τις μεθόδους που γνωρίζουν μέχρι τώρα. Για να τους βοηθήσουμε να υπολογίσουν το παραπάνω όριο προτείνουμε να δοθεί σε αυτούς η ακόλουθη δραστηριότητα.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ:

i) Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις συναρτήσεις $f(x)=\ln x$ και $g(x)=1-x^2$.

ii) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των *f* και *g* στο κοινό τους σημείο *A(1,0)* είναι οι ευθείες $\varepsilon: y=x-1$ και $\zeta: y=-2x+2$ αντιστοίχως και να τις χαράξετε.

iii) Να κάνετε χρήση του ότι «κοντά» στο $x_0=1$ οι τιμές των συναρτήσεων $f(x)=\ln x$ και $g(x)=1-x^2$ *προσεγγίζονται* από τις τιμές των εφαπτομένων τους $y=x-1$ και $y=-2x+2$ για να καταλήξετε στο συμπέρασμα ότι «κοντά» στο $x_0=1$ η τιμή του πηλίκου $\dfrac{\ln x}{1-x^2}$ είναι κατά προσέγγιση ίση με την τιμή του πηλίκου $\dfrac{x-1}{-2x+2}$, δηλαδή ότι «κοντά» στο $x_0=1$ ισχύει:

$$\frac{\ln x}{1-x^2}\simeq\frac{x-1}{-2x+2}=\frac{x-1}{-2x(x-1)}=\frac{1}{-2},$$

που είναι το πηλίκο των κλίσεων των παραπάνω ευθειών.

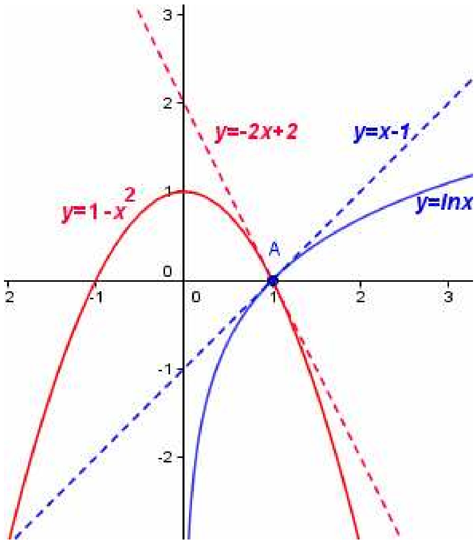
Επομένως, «κοντά» στο $x_0=1$ ισχύει $\dfrac{f(x)}{g(x)}\simeq\dfrac{f'(1)}{g'(1)}$, το οποίο υπό μορφή ορίου γράφεται:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(1)}{g'(1)}.$$

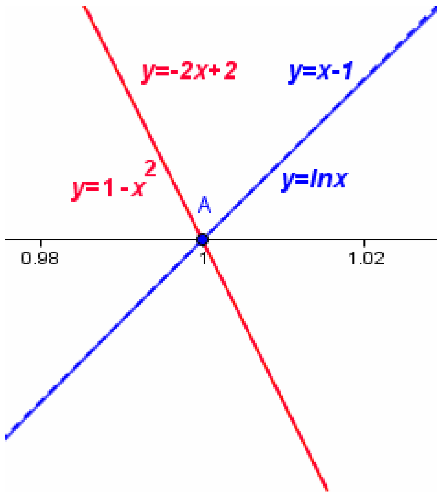
ΣΧΟΛΙΟ

Η διαπίστωση του ότι «κοντά» στο $x_0=1$ οι τιμές των συναρτήσεων $f(x)=\ln x$ και $g(x)=1-x^2$ *προσεγγίζονται* από τις τιμές των εφαπτομένων τους $y=x-1$ και $y=-2x+2$ μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια ενός δυναμικού λογισμικού (πχ. Geogebra), ως εξής:

- ✓ Παριστάνουμε γραφικά τις συναρτήσεις $y=\ln x$ και $y=1-x^2$ και στη συνέχεια χαράσσουμε τις εφαπτόμενες τους $y=x-1$ και $y=-2x+2$ αντιστοίχως (σχήμα 7).
- ✓ Έπειτα, κάνουμε αλλεπάλληλα ZOOM κοντά στο σημείο $A(1,0)$. Θα παρατηρήσουμε ότι η $y=\ln x$ θα συμπέσει με την ευθεία $y=x-1$, ενώ η $y=1-x^2$ θα συμπέσει με την ευθεία $y=-2x+2$. (σχήμα 8).



Σχήμα 7



Σχήμα 8

Οι 3 διδακτικές ώρες που απομένουν (από τον συνολικό αριθμό των ωρών που προτείνεται να διατεθούν για το 2ο κεφάλαιο), προτείνεται να διατεθούν για επίλυση επαναληπτικών ασκήσεων.

Κεφάλαιο 3ο (Προτείνεται να διατεθούν 20 διδακτικές ώρες).

§3.1 (Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες).

Α) Να δοθεί έμφαση στα προβλήματα που διατυπώνονται στο σχολικό βιβλίο στην αρχή της ενότητας και να τονιστεί η σημασία της αντίστροφης διαδικασίας της παραγώγισης. Θα ήταν καλό να συζητηθούν διεξοδικά ορισμένα από αυτά ή άλλα ανάλογα, ώστε να προκύψει η σημασία της αρχικής συνάρτησης.

Β) Να συζητηθεί μόνο η πρώτη παράγραφος που αφορά στην παράγουσα συνάρτηση. Το αόριστο ολοκλήρωμα παραλείπεται και αντί του πίνακα αόριστων ολοκληρωμάτων (σελ. 305) να δοθεί ο παρακάτω πίνακας των παραγουσών μερικών βασικών συναρτήσεων.

Α/Α	Συνάρτηση	Παράγουσες
1	$f(x)=0$	$G(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$,
2	$f(x)=1$	$G(x)=x+c,\ c\in\mathbb{R}$
3	$f(x)=\frac{1}{x}$	$G(x)=\ln\lvert x\rvert+c,\ c\in\mathbb{R}$
4	$f(x)=x^{\alpha}$	$G(x)=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c,\ c\in\mathbb{R}$
5	$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$	$G(x)=\eta\mu x+c,\ c\in\mathbb{R}$
6	$f(x)=\eta\mu x$	$G(x)=-\sigma\upsilon\nu x+c,\ c\in\mathbb{R}$
7	$f(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$G(x)=\varepsilon\varphi x+c,\ c\in\mathbb{R}$
8	$f(x)=\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$G(x)=-\sigma\varphi x+c,\ c\in\mathbb{R}$
9	$f(x)=e^{x}$	$G(x)=e^{x}+c,\ c\in\mathbb{R}$
10	$f(x)=\alpha^{x}$	$G(x)=\frac{\alpha^{x}}{\ln\alpha}+c,\ c\in\mathbb{R}$

Σημείωση:
Οι τύποι του πίνακα αυτού ισχύουν σε κάθε ***διάστημα*** *στο οποίο οι παραστάσεις του x που εμφανίζονται έχουν νόημα.*

Οι δύο ιδιότητες των αόριστων ολοκληρωμάτων στο τέλος της σελίδας 305 μπορούν να αναδιατυπωθούν ως εξής:
Αν οι συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες των f και g αντιστοίχως και ο λ είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε:

i) Η συνάρτηση $F+G$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $f+g$ και
ii) Η συνάρτηση λF είναι μια παράγουσα της συνάρτησης λf .

Οι εφαρμογές των σελίδων 306 και 307 να γίνουν με τη χρήση των αρχικών συναρτήσεων. Να λυθούν μόνο οι ασκήσεις 2, 4, 5 και 7 της Α' Ομάδας.

§3.4 (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες).
Να γίνει αναλυτικά το πρώτο μέρος που αφορά στον υπολογισμό του εμβαδού παραβολικού χωρίου. Στη συνέχεια να γίνει διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος

και να συνδεθεί με το εμβαδόν όταν η συνάρτηση δεν παίρνει αρνητικές τιμές και με τον υπολογισμό του παραβολικού χωρίου που προηγήθηκε. Να γίνει η εφαρμογή του βιβλίου για το ολοκλήρωμα σταθερής συνάρτησης και οι ιδιότητες που ακολουθούν.

§3.5 (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες).
Να δοθεί έμφαση στο σχόλιο που αφορά στην εποπτική απόδειξη του συμπεράσματος.

§3.7 (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες).
Οι 4 διδακτικές ώρες που απομένουν (από τον συνολικό αριθμό των ωρών που προτείνεται να διατεθούν για το κεφάλαιο αυτό), προτείνεται να διατεθούν για επίλυση επαναληπτικών ασκήσεων.

Μάθημα Επιλογής
Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής

[2 ώρες την εβδομάδα]

Ι. Διδακτέα ύλη

Από το βιβλίο «Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής» της Γ΄ Τάξης Γενικού Λυκείου των Λ. Αδαμόπουλου κ.α., έκδοση Ο.Ε.Δ.Β..

Κεφ. 1ο: <u>Στοιχεία Διαφορικού Λογισμού</u>

1.1. Συναρτήσεις
1.2. Η έννοια της παραγώγου
1.3. Παράγωγος συνάρτησης
1.4. Εφαρμογές των Παραγώγων, χωρίς το κριτήριο της 2ης παραγώγου

Κεφ. 2ο: <u>Στατιστική</u>

2.1. Βασικές έννοιες
2.2. Παρουσίαση Στατιστικών Δεδομένων, χωρίς την υποπαράγραφο «Κλάσεις άνισου πλάτους»
2.3. Μέτρα Θέσης και Διασποράς, χωρίς τις υποπαραγράφους: «Εκατοστημόρια», «Ενδοτεταρτημοριακό εύρος» και «Επικρατούσα τιμή»

Κεφ. 3ο: <u>Πιθανότητες</u>

3.1. Δειγματικός Χώρος-Ενδεχόμενα
3.2. Έννοια της Πιθανότητας

<u>Παρατηρήσεις</u>:

1. Η διδακτέα - εξεταστέα ύλη θα διδαχτεί σύμφωνα με τις οδηγίες του Π.Ι.
2. Τα θεωρήματα, οι προτάσεις, οι αποδείξεις και οι ασκήσεις που φέρουν αστερίσκο δε διδάσκονται και δεν εξετάζονται.
3. Οι εφαρμογές και τα παραδείγματα των βιβλίων δεν εξετάζονται ούτε ως θεωρία ούτε ως ασκήσεις. Μπορούν, όμως, να χρησιμοποιηθούν ως προτάσεις για τη λύση ασκήσεων, ή την απόδειξη άλλων προτάσεων.
4. Οι τύποι 2 και 4 των σελίδων 93 και 94 του βιβλίου «Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής» θα δίνονται στους μαθητές τόσο κατά τη

διδασκαλία όσο και κατά την εξέταση θεμάτων των οποίων η αντιμετώπιση απαιτεί τη χρήση τους.

ΙΙ. Διδακτική διαχείριση

Κεφάλαιο 1. Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 15 διδακτικές ώρες.

Σε όλο το κεφάλαιο γίνεται ευρεία χρήση της εποπτείας και των παραδειγμάτων για την ερμηνεία και για την κατανόηση των διάφορων εννοιών και προτάσεων.

Στην αρχή της **§1.1** γίνεται μια σύντομη αναφορά στην έννοια της συνάρτησης και των ιδιοτήτων της. Πολλές από τις έννοιες και τους συμβολισμούς αυτού του κεφαλαίου είναι ήδη γνωστά στους μαθητές από προηγούμενες τάξεις γι΄ αυτό και η διδασκαλία τους δεν πρέπει να στοχεύει στην αναλυτική παρουσίασή τους, αλλά στο να τα επαναφέρουν οι μαθητές στη μνήμη τους, επειδή θα τους χρειαστούν στα επόμενα κεφάλαια.

Στην ίδια παράγραφο παρουσιάζεται μέσω παραδειγμάτων και χωρίς μαθηματική αυστηρότητα η έννοια του ορίου και γίνεται μια σύντομη αναφορά στην έννοια της συνεχούς συνάρτησης. Επισημαίνεται ότι η διδασκαλία των εννοιών αυτών δεν αποτελεί αυτοσκοπό, αλλά στοχεύει στην προετοιμασία για την εισαγωγή της έννοιας της παραγώγου. Δεν πρέπει επομένως να καθυστερήσει η διδασκαλία με άσκοπη "ασκησιολογία". Κατά τη διδασκαλία των εννοιών της παραγράφου αυτής, για εξοικονόμηση χρόνου, συνιστάται οι πίνακες, τα σχήματα και η ερμηνεία τους να προσφέρονται σε διαφάνειες ή σε φωτοτυπίες ή, στην περίπτωση που αυτό είναι αδύνατον, οι μαθητές να χρησιμοποιούν τα βιβλία τους.

Σχετικά με την έννοια της συνεχούς συνάρτησης αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η πρόταση $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ μας πληροφορεί ότι οι τιμές του $f(x)$ είναι πολύ κοντά στο $f(x_0)$, όταν το x είναι πολύ κοντά στο x_0. Αυτό σημαίνει ότι μικρές μεταβολές στο x έχουν ως αποτέλεσμα μόνο μικρές μεταβολές στις τιμές μιας συνεχούς συνάρτησης.

Στην **§1.2** εισάγεται η έννοια της παραγώγου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο της. Η παράγωγος είναι ένα από τα θεμελιώδη εργαλεία των Μαθηματικών και χρησιμοποιείται σε ένα ευρύ φάσμα επιστημών.

Για τον ορισμό της παραγώγου ακολουθείται η ιστορική πορεία της εξέλιξης της έννοιας. Παρατηρούμε κατ΄ αρχάς ότι ως εφαπτομένη ενός κύκλου (Ο, R) σε ένα σημείο του Α θα μπορούσαμε να ορίσουμε την οριακή θέση μιας τέμνουσας ΑΜ, καθώς το Μ κινούμενο πάνω στον κύκλο τείνει να συμπέσει με το Α. Με βάση την παρατήρηση αυτή ορίζουμε ως εφαπτομένη της καμπύλης μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ την ευθεία η οποία διέρχεται από το A και έχει ως συντελεστή διεύθυνσης τον αριθμό $\lambda = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Δε δίνεται ο τύπος της εξίσωσης της εφαπτομένης της καμπύλης μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο της $(x_0, f(x_0))$. Όμως, μέσα από εφαρμογές, εξηγείται ο τρόπος με τον οποίο προσδιορίζεται κάθε φορά η εφαπτομένη αυτή, αφού γνωρίζουμε ένα σημείο της και μπορούμε να βρούμε το συντελεστή διεύθυνσής της. Δε γίνεται επίσης αναφορά στην έννοια της κατακόρυφης εφαπτομένης. Μαθητές με αυξημένη μαθηματική περιέργεια θα ικανοποιήσουν τις αναζητήσεις τους αυτές στα Μαθηματικά της Θετικής και της Τεχνολογικής κατεύθυνσης της Γ' Λυκείου.

Στη συνέχεια, διαπιστώνεται ότι και άλλα παραδείγματα, όπως ο προσδιορισμός της στιγμιαίας ταχύτητας ενός κινητού, του οριακού κόστους στην Οικονομία, της ταχύτητας μιας αντίδρασης στη Χημεία κτλ., οδηγούν στον υπολογισμό ενός ορίου της μορφής $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$. Το όριο αυτό, όταν υπάρχει, ονομάζεται παράγωγος της f στο t_0. Φυσικά το πρόβλημα της εφαπτομένης και το πρόβλημα της στιγμιαίας ταχύτητας έχουν προετοιμάσει το έδαφος, ώστε να γίνει αποδεκτός και κατανοητός ο ορισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο της και η ερμηνεία της ως ρυθμού μεταβολής.

Στην **§1.3** ορίζεται **η** (πρώτη) **παράγωγος** μιας **συνάρτησης** *f*. Με τον όρο **παράγωγος της *f*** εννοείται η συνάρτηση f' , η οποία σε κάθε σημείο *x* του πεδίου ορισμού της *f*, όπου αυτή είναι παραγωγίσιμη, αντιστοιχίζει την παράγωγό της στο σημείο αυτό. Με ανάλογο τρόπο ορίζεται και η **δεύτερη παράγωγος** της *f* και ως παραδείγματα αναφέρονται η ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon(t)=x'(t)}$ και η επιτάχυνση $\boldsymbol{a(t)=x''(t)}$ στην ευθύγραμμη κίνηση ενός σώματος. Ακολουθεί η παραγώγιση βασικών συναρτήσεων και οι κανόνες παραγώγισης αθροίσματος, γινομένου, πηλίκου και σύνθετης συνάρτησης. Αναφέρονται μόνο οι αποδείξεις όσων τύπων και κανόνων είναι απλές.

Επισημαίνεται ότι στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\boldsymbol{\eta\mu x}$, $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu x}$ και $\boldsymbol{\varepsilon\varphi x}$ το $\boldsymbol{x}$ εκφράζει το μέτρο μιας γωνίας σε ακτίνια (rad). Αν θ είναι το μέτρο της ίδιας γωνίας σε μοίρες, τότε $\eta\mu x=\eta\mu\theta^o$ και $x=\dfrac{\pi}{180}\theta$. Επομένως,

$$(\eta\mu\theta^o)'_\theta=(\eta\mu x)'_\theta=(\eta\mu x)'_x\cdot x_\theta{}'=\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{180}\sigma\upsilon\nu\theta^o.$$

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για τις άλλες τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Στην **§1.3** υλοποιείται ο κύριος στόχος της διδασκαλίας του κεφαλαίου, που είναι η χρησιμοποίηση των παραγώγων στον προσδιορισμό των ακροτάτων. Όπως και στις προηγούμενες παραγράφους, έτσι και εδώ για την κατανόηση των ιδιοτήτων κυριαρχεί η γεωμετρική εποπτεία. Για να συνδεθεί καλύτερα η σχέση του προσήμου της πρώτης παραγώγου με τα ακρότατα, μπορεί ο διδάσκων να αναφέρει παραδείγματα και από τη Φυσική. Έτσι, στο παράδειγμα της σελίδας 39 του βιβλίου μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι όταν το σώμα φτάσει στο υψηλότερο σημείο, η ταχύτητά του πρέπει να μηδενιστεί, διότι διαφορετικά το σώμα θα εξακολουθούσε να ανεβαίνει. Επομένως, βρίσκουμε ότι η χρονική στιγμή t που θα έχουμε το μέγιστο ύψος, δηλαδή το μέγιστο της συνάρτησης $h(t)=20t-5t^2$, είναι όταν $\upsilon(t)=h'(t)=20-10t=0$. Άρα για $t=2$ έχουμε το μέγιστο ύψος, που είναι ίσο με $h(2)=40-20=20$.

Οι μέθοδοι του Διαφορικού Λογισμού για τον προσδιορισμό των ακρότατων τιμών ενός μεταβαλλόμενου μεγέθους έχουν πρακτική εφαρμογή σε πολλές περιοχές των επιστημών αλλά και της καθημερινής ζωής. Για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων αυτό που κυρίως προέχει είναι η μετατροπή του προβλήματος που είναι διατυπωμένο στην καθημερινή γλώσσα σε πρόβλημα **μεγίστου** ή **ελαχίστου** με τον ορισμό μιας συνάρτησης, της οποίας πρέπει να βρεθούν τα ακρότατα. Είναι σκόπιμο επομένως να τονιστούν με τη βοήθεια κατάλληλου προβλήματος οι αρχές "επίλυσης προβλήματος", τις οποίες έχουν γνωρίσει οι μαθητές σε προηγούμενες τάξεις, και να προσαρμοστούν στη συγκεκριμένη κατάσταση. Επισημαίνεται ότι η διαδικασία επίλυσης προβλήματος δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια συλλογή στρατηγικών, τις οποίες κάθε λογικά σκεπτόμενος άνθρωπος πρέπει να χρησιμοποιήσει προκειμένου να αντιμετωπίσει ένα πρόβλημα.

Σχετικά με την επίλυση προβλημάτων με τη βοήθεια του Διαφορικού Λογισμού πρέπει να αναφερθεί ότι πολλά προβλήματα μεγίστου ή ελαχίστου περιέχουν διακριτές μεταβλητές. Για παράδειγμα, ο αριθμός των παραγόμενων μονάδων ενός προϊόντος, καθώς και ο αριθμός των εργαζομένων σε ένα εργοστάσιο πρέπει να είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί. Ο Διαφορικός Λογισμός όμως δεν εφαρμόζεται απευθείας σε προβλήματα που περιέχουν διακριτές μεταβλητές. Ωστόσο, μπορούμε μερικές φορές να οδηγηθούμε στη λύση ενός τέτοιου προβλήματος υποθέτοντας ότι κάθε μεταβλητή παίρνει τιμές σε όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών ή σε κάποιο διάστημά του, ακόμα και αν η φυσική ερμηνεία της μεταβλητής έχει νόημα μόνο για διακριτές τιμές. Έτσι, χρησιμοποιώντας το Διαφορικό Λογισμό βρίσκουμε μια λύση για το μαθηματικό μοντέλο, η οποία ελπίζουμε ότι προσεγγίζει τη λύση του πραγματικού προβλήματος.

Γενικά, με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται οι μαθητές:

- Να κατανοήσουν την έννοια της παραγώγου και να μπορούν να την ερμηνεύουν ως ρυθμό μεταβολής.
- Να μπορούν να βρίσκουν τις παραγώγους συναρτήσεων.
- Να κατανοήσουν ότι η γνώση του ρυθμού μεταβολής ενός μεταβαλλόμενου μεγέθους μας δίνει χρήσιμες πληροφορίες για το ίδιο το μέγεθος.

Να μπορούν με τη βοήθεια των παραγώγων να επιλύουν προβλήματα ακροτάτων.

Κεφάλαιο 2 Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 16 διδακτικές ώρες.

Στην **§2.1** πρέπει να καταβληθεί προσπάθεια, ώστε με κατάλληλα παραδείγματα να κατανοήσουν οι μαθητές τις έννοιες **πληθυσμός**, **μεταβλητή** (*ποσοτική, ποιοτική*), **απογραφή** και **δείγμα**. Να διευκρινιστεί ότι δε συμπίπτει το σύνολο των τιμών μιας μεταβλητής με τις παρατηρήσεις από την εξέταση ενός πληθυσμού ως προς τη μεταβλητή αυτή. Για παράδειγμα, οι τιμές της μεταβλητής "ομάδα αίματος" είναι Α, Β, ΑΒ και Ο, ενώ οι παρατηρήσεις από την εξέταση δέκα ατόμων μπορεί να είναι Α, Α, Β, Β, Β, ΑΒ, Α, ΑΒ, Ο, Β.

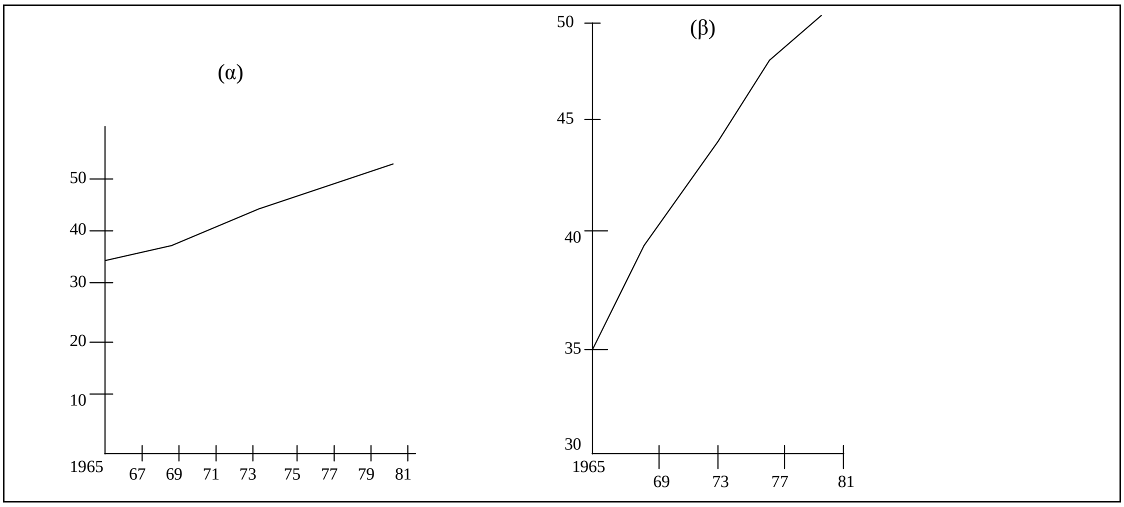
Όταν είναι πρακτικά αδύνατο ή οικονομικά ασύμφορο να εξετάσουμε κάθε μέλος ενός πληθυσμού, οδηγούμαστε στην εξέταση ενός αντιπροσωπευτικού δείγματος. Είναι σημαντικό να αναγνωρίσουν οι μαθητές τη χρησιμότητα του δείγματος, από το οποίο μπορούν να προκύψουν αξιόπιστες πληροφορίες για ολόκληρο τον πληθυσμό.

Στην **§2.2** παρουσιάζονται οι κατανομές συχνοτήτων και οι γραφικές παραστάσεις τους. Μια από τις απλούστερες διαδικασίες για την οργάνωση και τη συνοπτική παρουσίαση των δεδομένων είναι η κατανομή συχνοτήτων. Η κατανομή συχνοτήτων θεωρείται ως το πρώτο βήμα σε κάθε ανάλυση δεδομένων. Ανάλογα ορίζονται η κατανομή σχετικών συχνοτήτων, η κατανομή αθροιστικών συχνοτήτων και η κατανομή αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν ότι:

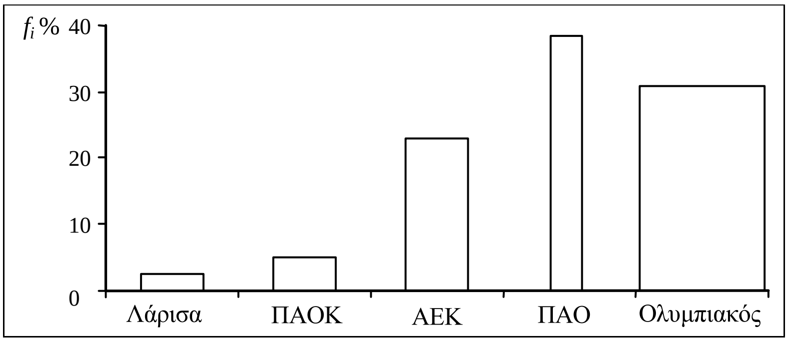
- Η (απόλυτη) **συχνότητα** $\boldsymbol{\nu_i}$ μιας τιμής x_i δηλώνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i στο δείγμα.
- Η **σχετική συχνότητα** $\boldsymbol{f_i}$ εκφράζει το ποσοστό (επί τοις %) μιας τιμής x_i, η οποία εμφανίζεται στο δείγμα των ν παρατηρήσεων. Γι' αυτό η σχετική συχνότητα προσφέρεται για τη σύγκριση πληθυσμών, όταν εξετάζονται ως προς την ίδια μεταβλητή. Βέβαια με τις σχετικές συχνότητες χάνουμε τις απόλυτες συχνότητες. Αν όμως ν είναι το μέγεθος του δείγματος, τότε $\nu_i = f_i \cdot \nu$.
- Η **αθροιστική συχνότητα** $\boldsymbol{N_i}$ και η **αθροιστική σχετική συχνότητα** $\boldsymbol{F_i}$, οι οποίες έχουν νόημα μόνο για ποσοτικές μεταβλητές, εκφράζουν το πλήθος και το ποσοστό αντιστοίχως των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες με x_i.
- Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να παραστήσουν γραφικά τα δεδομένα που έχουν συλλέξει, χρησιμοποιώντας κάθε φορά το κατάλληλο διάγραμμα. Ακόμη πρέπει να είναι σε θέση να «διαβάζουν» τα διάφορα διαγράμματα τα οποία παρουσιάζουν με άμεσο και οργανωμένο τρόπο τα στατιστικά δεδομένα και επιτρέπουν ορισμένες φορές να φανούν αμέσως οι σχέσεις που ενδεχομένως υπάρχουν. Πρέπει όμως να επιστήσουμε την προσοχή των μαθητών, δίνοντας

κατάλληλα παραδείγματα, για τον κίνδυνο παραπλάνησης που υπάρχει από την ανάγνωση ενός στατιστικού διαγράμματος. Για παράδειγμα, στο σχήμα 1 τα δυο διαγράμματα (α) και (β) αναφέρονται στο ποσοστό των εργαζομένων γυναικών στο σύνολο του γυναικείου πληθυσμού μιας χώρας άνω των 16 ετών. Δίνουν όμως εντελώς διαφορετική εικόνα για το πως μεταβάλλεται το ποσοστό αυτό.



Σχήμα 1

Το διάγραμμα (β) προκύπτει από το (α), αν απλώς μεγεθύνουμε την κλίμακα στον άξονα των y, σμικρύνουμε την κλίμακα στον άξονα των x και θεωρήσουμε ως αρχή μετρήσεων στον άξονα των y την ένδειξη 30. Ανάλογες παραποιήσεις μπορούν να πραγματοποιηθούν με το ραβδόγραμμα κατασκευάζοντας τα ορθογώνια με διαφορετικό πλάτος. Με τον τρόπο αυτό η οποιαδήποτε διαφορά στις συχνότητες εμφανίζεται πολλαπλάσια από ό,τι πραγματικά είναι. Για παράδειγμα, αν για την άσκηση 9 σελ. 80 παραστήσουμε το ιστόγραμμα συχνοτήτων όπως παρακάτω,



τότε η απεικόνιση της κατάστασης είναι παραπλανητική, σε βάρος του Παναθηναϊκού και υπέρ του Ολυμπιακού.

Όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μεγάλο, επιβάλλεται να γίνεται ομαδοποίηση. Στην ομαδοποίηση το **πλήθος των κλάσεων** ορίζεται αυθαίρετα από τον ερευνητή σύμφωνα με την πείρα του. Μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί και ο εμπειρικός τύπος του Sturges: $\kappa = 1+3,32\cdot\log\nu$, όπου κ είναι ο αριθμός των κλάσεων και ν είναι το μέγεθος του δείγματος.

Με την ομαδοποίηση έχουμε απώλεια πληροφοριών, η οποία είναι τόσο μεγαλύτερη όσο μικρότερος είναι ο αριθμός των κλάσεων. Όμως, με την ομαδοποίηση διευκολύνεται η επεξεργασία των δεδομένων και η παρουσίασή τους είναι εποπτικότερη.

Στην **§ 2.3** εξετάζονται τα μέτρα θέσης και διασποράς μιας κατανομής.

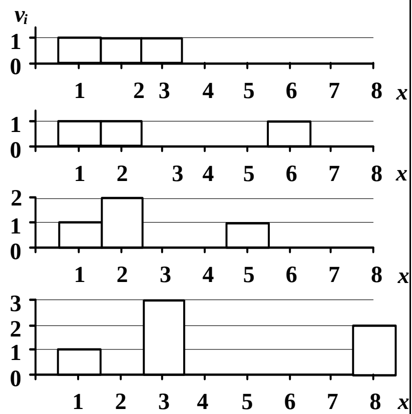
Ένας μεγάλος αριθμός δεδομένων μπορεί σε πολλές περιπτώσεις να περιγραφεί με ένα μέτρο κεντρικής τάσης και με ένα μέτρο διασποράς. Οι μαθητές πρέπει να ενημερωθούν για τους περιορισμούς και τις επιπτώσεις από τη χρήση καθενός από τα μέτρα θέσης και διασποράς. Είναι επίσης σημαντικό να κατανοήσουν ότι με την αντικατάσταση των δεδομένων από ένα μέτρο θέσης έχουμε μεν μια σύντομη πληροφόρηση, αλλά συγχρόνως έχουμε και μια σημαντική απώλεια πληροφοριών. Αν, για παράδειγμα, θέλουμε να πληροφορήσουμε κάποιον για τη θερμοκρασία μιας πόλης θα ήταν κατάχρηση να του δώσουμε πλήρη κατάλογο των καθημερινών θερμοκρασιών. Δίνοντάς του όμως για συντομία μόνο τη μέση ετήσια θερμοκρασία οπωσδήποτε δεν του δίνουμε πλήρη εικόνα της μεταβολής της θερμοκρασίας στη διάρκεια του έτους.

Η **μέση τιμή** είναι ο μέσος όρος των παρατηρήσεων μιας κατανομής. Η μέση τιμή ενός πληθυσμού συμβολίζεται με $\boldsymbol{\mu}$, ενώ ενός δείγματος με $\bar{\boldsymbol{x}}$. Στη στατιστική συμπερασματολογία γίνεται διάκριση μεταξύ της μέσης τιμής πληθυσμού και της μέσης τιμής δείγματος. Όμως στο βιβλίο χρησιμοποιείται μόνο η μέση τιμή δείγματος και συμβολίζεται με $\bar{x}$. Η μέση τιμή είναι το μέτρο της κεντρικής τάσης, το οποίο χρησιμοποιείται συχνότερα από τα άλλα, κυρίως επειδή έχει τις δύο ακόλουθες ιδιότητες:

α.Το άθροισμα των αποκλίσεων όλων των τιμών από τη μέση τιμή είναι ίσο με μηδέν, δηλαδή $\sum_{i=1}^{\nu}\left(x_i - \bar{x}\right) = 0$. Η ιδιότητα αυτή είναι σημαντική για την παραγωγή και την απλοποίηση πολλών τύπων της Στατιστικής. Την ερμηνεία αυτή της μέσης τιμής μπορούμε να τη δούμε και με το παρακάτω παράδειγμα:

Για καθένα από τα παρακάτω σύνολα δεδομένων υπολογίζουμε τη μέση τιμή τους και κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα συχνοτήτων. Στον άξονα 0x σημειώνουμε με "▲" τη μέση τιμή.

Παρατηρήσεις(x_i)	Μέση τιμή($\bar{X}$)	$\Sigma(x_i - \bar{x})$
1 2 3	2	0
1 2 6	3	0
1 2 2 5	2,5	0
1 3 3 3 8 8	4,333	0



Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει προφανώς και στην περίπτωση που έχουμε συχνότητες, όταν η παρατήρηση x_i εμφανίζεται v_i φορές. Τότε ισχύει η σχέση

$$\sum_{i=1}^{\kappa}(x_i - \bar{x})v_i = 0,$$

η οποία σύμφωνα με όσα ξέρουμε από τη Φυσική δείχνει ότι το $\bar{x}$ είναι η θέση του **κέντρου βάρους** κ σωματιδίων με βάρη $v_1, v_2, \ldots, v_\kappa$ τοποθετημένα στις θέσεις $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$. Αυτό ακριβώς φαίνεται και στα παραπάνω ιστογράμματα συχνοτήτων, όπου η μέση τιμή παριστάνεται με "▲". Αν θεωρήσουμε δηλαδή τον άξονα 0x να μην έχει βάρος και τοποθετήσουμε τα βάρη v_i στις θέσεις x_i και το υποστήριγμα ▲ στη θέση $\bar{x}$, τότε θα έχουμε ισορροπία, όπως π.χ. σε μία "τραμπάλα".

β.Το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων από τη μέση τιμή είναι μικρότερο από το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων από οποιαδήποτε άλλη τιμή στην κατανομή (εφαρμογή 2, σελίδα 98). Η ιδιότητα αυτή χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της διασποράς και της τυπικής απόκλισης.

Στο βιβλίο αναφέρεται και ο **σταθμικός μέσος,** ο οποίος χρησιμοποιείται στην περίπτωση που οι τιμές έχουν διαφορετική αξία. Μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί και για τον προσδιορισμό της μέσης τιμής περισσότερων ομάδων δεδομένων με διαφορετικό μέγεθος των οποίων γνωρίζουμε τις μέσες τιμές. Για παράδειγμα, αν η μέση τιμή της βαθμολογίας 80 κοριτσιών είναι 17 και η μέση τιμή της βαθμολογίας 50 αγοριών είναι 15, τότε η μέση τιμή της βαθμολογίας των 80+50=130 παιδιών είναι

$$\bar{x} = \frac{17 \cdot 80 + 15 \cdot 50}{80 + 50} = \frac{2110}{130} \approx 16.23 .$$

Η **διάμεσος** είναι το σημείο του άξονα των δεδομένων κάτω από το οποίο βρίσκεται το πολύ το 50% των παρατηρήσεων και συγχρόνως πάνω από αυτό το πολύ το 50% των παρατηρήσεων. Όταν ο αριθμός των παρατηρήσεων είναι μεγάλος , τότε γίνεται ομαδοποίηση των δεδομένων και η διάμεσος προσδιορίζεται με τη βοήθεια του ιστογράμματος των αθροιστικών συχνοτήτων.

Υποθέτοντας ότι οι παρατηρήσεις σε κάθε κλάση κατανέμονται ομοιόμορφα, αποδεικνύεται (με απλή μέθοδο των τριών) ότι ο τύπος που δίνει τη διάμεσο σε ομαδοποιημένα δεδομένα είναι:

$$\delta = L_i + \frac{\frac{\nu}{2} - N_{i-1}}{\nu_i} \cdot c_i$$

i	Κλάσεις	ν_i	N_i	$F_i\%$
1	156-162	2	2	5,0
2	262-168	8	10	25,0
3	168-174	12	22	55,0
3	174-180	11	33	82,5
5	180-186	5	38	95,0
6	186-192	2	40	100,0

όπου

L_i το κατώτερο όριο της κλάσης που περιέχει τη διάμεσο

ν_i η συχνότητα της κλάσης

c_i το πλάτος της κλάσης

N_{i-1} η αθροιστική συχνότητα της **προηγούμενης** κλάσης, και

ν το πλήθος των παρατηρήσεων.

Εφαρμόζοντας, για παράδειγμα, τον τύπο της διαμέσου για τα δεδομένα του πίνακα 9 της σελίδας 73 του βιβλίου, βρίσκουμε ότι η διάμεσος βρίσκεται στην τρίτη κλάση, επειδή εδώ αντιστοιχούν αθροιστικά οι $\nu/2 = 20$ παρατηρήσεις. Συνεπώς,

$$\delta = L_i + \frac{\frac{\nu}{2} - N_{i-1}}{\nu_i} c_i = 168 + \frac{\frac{40}{2} - 10}{12} \cdot 6 = 173\text{cm},$$

όπως (περίπου) και στη γραφική μέθοδο.

Ποιο είναι όμως το καλύτερο μέτρο θέσης μιας κατανομής; Σύμφωνα με ένα πρώτο κριτήριο η απάντηση εξαρτάται από το αν η μεταβλητή είναι ποιοτική ή ποσοτική. Αν η μεταβλητή είναι ποιοτική, τότε προσφέρεται μόνο η επικρατούσα τιμή, αν όμως η μεταβλητή είναι ποσοτική, τότε μπορούν να χρησιμοποιηθούν και τα τρία μέτρα θέσης. Σύμφωνα με ένα δεύτερο κριτήριο, η επιλογή του καταλληλότερου μέτρου θέσης εξαρτάται από το σκοπό για τον οποίο θα χρησιμοποιηθεί. Αν επιθυμούμε περαιτέρω στατιστική επεξεργασία, τότε η μέση τιμή προσφέρεται περισσότερο. Αν όμως ο σκοπός είναι βασικά περιγραφικός, τότε πρέπει να χρησιμοποιείται το μέτρο που περιγράφει καλύτερα τα δεδομένα. Η παρουσία ακραίων παρατηρήσεων (πολύ μικρών ή πολύ μεγάλων αναφορικά με τις άλλες παρατηρήσεις) είναι συχνά ένα από τα βασικότερα κριτήρια για την επιλογή κατάλληλου μέτρου θέσης. Η επικρατούσα τιμή και η διάμεσος μένουν γενικά ανεπηρέαστες από τις ακραίες τιμές του δείγματος. Η μέση τιμή όμως επηρεάζεται σημαντικά από τις τιμές αυτές, επομένως δεν ενδείκνυται σε τέτοιες περιπτώσεις. Έτσι, για παράδειγμα, στη διαπραγμάτευση για τους μισθούς των εργαζομένων σε μια εταιρεία, οι εργαζόμενοι θα επικαλούνται ως αντιπροσωπευτικό μισθό τη διάμεσο ή την επικρατούσα τιμή, ενώ οι εκπρόσωποι της εταιρείας τη μέση τιμή που επηρεάζεται σημαντικά από τους μισθούς των υψηλόβαθμων στελεχών της.

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα πόσο διασπαρμένες είναι οι τιμές μιας κατανομής, χρησιμοποιούμε τα **μέτρα διασποράς**. Από τα μέτρα αυτά αναφέρονται στο βιβλίο το εύρος, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση.

Από τα μέτρα διασποράς το **εύρος** χρησιμοποιείται αρκετά συχνά σε περιπτώσεις ελέγχου ποιότητας βιομηχανικών προϊόντων, όταν εργαζόμαστε με πολλά ισομεγέθη δείγματα. Αυτό οφείλεται στον εύκολο υπολογισμό του και στην εύκολη ερμηνεία του. Το εύρος όμως έχει το μειονέκτημα να εξαρτάται μόνο από τις δύο ακραίες τιμές και έχει την τάση να αυξάνεται, καθώς το μέγεθος του δείγματος μεγαλώνει. Αυτό έχει ως συνέπεια να μην είναι συγκρίσιμα ως προς το εύρος δύο δείγματα διαφορετικού μεγέθους.

Η **διακύμανση** ενός πληθυσμού μεγέθους N συμβολίζεται με $\boldsymbol{\sigma^2}$ και ο τύπος της είναι

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(t_i - \mu)^2}{N} \qquad (1),$$

όπου $\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i$ η μέση τιμή του πληθυσμού, ενώ η διακύμανση ενός δείγματος μεγέθους ν συμβολίζεται με s^{*2} και ο τύπος της είναι

$$s^{*2} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(t_i - \bar{x})^2}{\nu - 1} \qquad (2).$$

Στατιστικές διαδικασίες που χρησιμοποιούνται στις διάφορες επιστήμες συνήθως προσδιορίζουν τη διακύμανση s^{*2} ενός δείγματος, η οποία στη συνέχεια χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της διακύμανσης $\boldsymbol{\sigma^2}$ του πληθυσμού. Η δειγματική διακύμανση που προσδιορίζεται με τον τύπο (2) αποδεικνύεται ότι είναι μια *αμερόληπτη εκτιμήτρια*. Αν πάρουμε δηλαδή όλα τα δυνατά δείγματα μεγέθους ν και υπολογίσουμε τις διασπορές s^{*2} από τη σχέση (2), τότε η μέση τιμή τους θα ισούται με την πληθυσμιακή διασπορά σ^2. Αντίθετα, η δειγματική διακύμανση, όπως ορίζεται από τη σχέση $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(t_i - \bar{x})^2}{\nu}$, τείνει να υποεκτιμά τη πληθυσμιακή διακύμανση σ^2. Ωστόσο, στο βιβλίο για διδακτικούς λόγους χρησιμοποιούμε για τη δειγματική διακύμανση τον τύπο $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(t_i - \bar{x})^2}{\nu}$, αφού δεν πρόκειται να ασχοληθούμε με στατιστική συμπερασματολογία.

Η **τυπική απόκλιση** είναι η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης. Το μέτρο αυτό διασποράς ικανοποιεί την απαίτηση να εκφράζεται στην ίδια μονάδα μέτρησης με τις παρατηρήσεις.

Στην περίπτωση που οι παρατηρήσεις είναι μεγάλοι αριθμοί, μπορούμε να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς χρησιμοποιώντας την εφαρμογή 3 (σελίδα 99 του βιβλίου), σύμφωνα με την οποία αν $y = \alpha x + \beta$, τότε $\boldsymbol{\bar{y} = \alpha\bar{x} + \beta}$ και $\boldsymbol{s_y = |\alpha| \cdot s_x}$.

Για την ερμηνεία της τυπικής απόκλισης ως μέτρου διασποράς, ας υποθέσουμε ότι ο μέσος μισθός των υπαλλήλων μιας εταιρείας Α είναι $\bar{x}_A = 250.000$ δρχ. με τυπική απόκλιση $s_A = 42.000$ δρχ. Μια ερμηνεία της μεταβλητότητας των απολαβών των εργαζομένων έγκειται στον καθορισμό του ποσοστού των εργαζομένων που αναμένεται να βρίσκονται στο διάστημα $(\bar{x} - s,\ \bar{x} + s)$, ή με δύο τυπικές αποκλίσεις στο διάστημα $(\bar{x} - 2s,\ \bar{x} + 2s)$ κτλ. Αν υποθέσουμε ότι έχουμε περίπου κανονική κατανομή, τότε έχουμε την ερμηνεία του σχήματος 15, σελ. 95. Αντίθετα, για οποιοδήποτε σύνολο παρατηρήσεων, ανεξάρτητα από την κατανομή που έχουμε, εφαρμόζεται το θεώρημα του Chebyshev, το οποίο λέει ότι "το ποσοστό των παρατηρήσεων που περιλαμβάνονται στο διάστημα $(\bar{x} - \kappa s,\ \bar{x} + \kappa s)$, $\kappa \geq 1$, είναι τουλάχιστον $1 - \frac{1}{\kappa^2}$". Συνεπώς, στο διάστημα $(\bar{x} - 2s,\ \bar{x} + 2s)$ έχουμε τουλάχιστον το 75% των παρατηρήσεων, ενώ στο διάστημα $(\bar{x} - 3s,\ \bar{x} + 3s)$ έχουμε τουλάχιστον το 89% των παρατηρήσεων. Επομένως, για το παραπάνω παράδειγμα, αν υποθέσουμε ότι ο μισθός των υπαλλήλων ακολουθεί κανονική κατανομή, τότε αναμένεται το:

- 68% των υπαλλήλων να έχουν μισθό στο διάστημα (208.000, 292.000)
- 95% των υπαλλήλων να έχουν μισθό στο διάστημα (166.000, 334.000)
- 99,7% των υπαλλήλων να έχουν μισθό στο διάστημα (124.000, 376.000),

ενώ τα αντίστοιχα ποσοστά, όταν δεν υποθέτουμε κανονική κατανομή, γίνονται τουλάχιστον 0%, 75% και 89%.

Μερικές φορές σε στατιστικούς υπολογισμούς είναι αναγκαίο όχι μόνο να υπολογίσουμε απλώς τις τυπικές αποκλίσεις, αλλά να συγκρίνουμε μεταξύ τους τα μεγέθη των τυπικών αποκλίσεων σε διαφορετικές στατιστικές συλλογές. Δε φτάνουμε όμως στο σκοπό μας με το να παραλληλίσουμε μεταξύ τους τις τυπικές αποκλίσεις. Αυτό θα μας έδινε στην πλειοψηφία των περιπτώσεων μια εσφαλμένη εικόνα.

Ας υποθέσουμε ότι ο μέσος μισθός $\bar{x}$ και η τυπική απόκλιση s των υπαλλήλων δύο εταιρειών A και B δίνονται στον παρακάτω πίνακα για 3 διαφορετικές περιπτώσεις:

	Εταιρεία Α	Εταιρεία Β
Περίπτωση 1	$\bar{x}_A = 250.000$ δρχ. $s_A = 42.000$ δρχ.	$\bar{x}_B = 250.000$ δρχ. $s_B = 60.000$ δρχ.
Περίπτωση 2	$\bar{x}_A = 250.000$ δρχ. $s_A = 42.000$ δρχ.	$\bar{x}_B = 350.000$ δρχ. $s_B = 50.000$ δρχ.
Περίπτωση 3	$\bar{x}_A = 250.000$ δρχ. $s_A = 42.000$ δρχ.	$\bar{x}_B = \$1400$ $s_A = \$350$

Στην περίπτωση 1 έχουμε την ίδια μέση τιμή, οπότε η σύγκριση της μεταβλητότητας μπορεί να γίνει αμέσως, συνεπώς μπορούμε να πούμε ότι η μεταβλητότητα των μισθών στην εταιρεία Β είναι μεγαλύτερη από την μεταβλητότητα των μισθών στην εταιρεία Α. Δηλαδή οι εργαζόμενοι στην εταιρεία Α παρουσιάζουν μεγαλύτερη ομοιογένεια στις μηνιαίες αποδοχές τους από ό,τι στην εταιρεία Β. Αντίθετα, στη δεύτερη περίπτωση δεν μπορούμε να πούμε ότι έχουμε μεγαλύτερη μεταβλητότητα στην εταιρεία Β από ό,τι στην Α. Η τυπική απόκλιση $s_A = 42.000$ δρχ. έχει υπολογιστεί θεωρώντας τις αποκλίσεις των παρατηρήσεων από τη μέση τιμή $\bar{x}_A = 250.000$ δρχ., ενώ η $s_B = 50.000$ δρχ. υπολογίστηκε θεωρώντας τις αποκλίσεις των παρατηρήσεων από τη μέση τιμή $\bar{x}_B = 350.000$ δρχ. Ανάλογη είναι και η τρίτη περίπτωση, όπου έχουμε διαφορετικές μονάδες μέτρησης.

Στις δύο αυτές περιπτώσεις η μεταβλητότητα των δεδομένων μπορεί να συγκριθεί, αφού πρώτα εκφράσουμε τις σχετικές ποσότητες σε μια κοινή βάση. Γι ΄αυτό υπάρχει ανάγκη ορισμού μέτρων σχετικής μεταβλητότητας, τα οποία να συνδυάζουν μέτρα θέσης με μέτρα διασποράς. Το πιο γνωστό μέτρο σχετικής μεταβλητότητας είναι ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας, ο οποίος ορίζεται από τον τύπο $cv = \frac{s}{\bar{x}}$ και συνήθως εκφράζεται ως ποσοστό.

Σύγκριση μέσης τιμής, διαμέσου

Πλεονεκτήματα	***Μειονεκτήματα***
	Μέση τιμή
• Για τον υπολογισμό της χρησιμοποιούνται όλες οι τιμές. • Είναι μοναδική για κάθε σύνολο δεδομένων. • Είναι εύκολα κατανοητή. • Ο υπολογισμός της είναι σχετικά εύκολος. • Έχει μεγάλη εφαρμογή για περαιτέρω στατιστική ανάλυση.	• Επηρεάζεται πολύ από ακραίες τιμές. • Μπορεί να μην αντιστοιχεί σε δυνατή τιμή της μεταβλητής. Όταν η Χ είναι διακριτή, με ακέραιες τιμές, τότε η μέση τιμή μπορεί να μην είναι ακέραιος. • Δεν υπολογίζεται για ποιοτικά δεδομένα. • Είναι δύσκολος ο υπολογισμός της σε ομαδοποιημένα δεδομένα με ανοικτές τις ακραίες κλάσεις.
	Διάμεσος
• Είναι εύκολα κατανοητή. • Δεν επηρεάζεται από ακραίες τιμές. • Υπολογίζεται και στην περίπτωση που οι ακραίες κλάσεις είναι ανοικτές. • Ο υπολογισμός της είναι απλός. • Είναι μοναδική σε κάθε σύνολο δεδομένων.	• Δε χρησιμοποιούνται όλες οι τιμές για τον υπολογισμό της. • Είναι δύσκολη η εφαρμογή της για περαιτέρω στατιστική ανάλυση. • Δεν υπολογίζεται για ποιοτικά δεδομένα. • Για τον υπολογισμό της μπορεί να χρειαστεί παρεμβολή.

Σύγκριση μέτρων διασποράς

Πλεονεκτήματα	**Μειονεκτήματα**
	Εύρος

- Είναι πολύ απλό στον υπολογισμό.
- Χρησιμοποιείται αρκετά στον έλεγχο ποιότητας.
- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση της τυπικής απόκλισης.

- Δε θεωρείται αξιόπιστο μέτρο διασποράς, επειδή βασίζεται μόνο στις δυο ακραίες παρατηρήσεις.
- Δε χρησιμοποιείται για περαιτέρω στατιστική ανάλυση.

Διασπορά και τυπική απόκλιση

- Λαμβάνονται υπόψη για τον υπολογισμό τους όλες οι παρατηρήσεις.
- Έχουν μεγάλη εφαρμογή στη στατιστική συμπερασματολογία.
- Σε κανονικούς πληθυσμούς το 68%, 95%, 99,7% των παρατηρήσεων βρίσκονται στα διαστήματα $\bar{x} \pm s$, $\bar{x} \pm 2s$ και $\bar{x} \pm 3s$ αντίστοιχα.

- Το κυριότερο μειονέκτημα της διασποράς είναι ότι δεν εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με το χαρακτηριστικό. Το μειονέκτημα αυτό παύει να υπάρχει με τη χρησιμοποίηση της τυπικής απόκλισης
- Απαιτούνται περισσότερες αλγεβρικές πράξεις για τον υπολογισμό τους παρά στα άλλα μέτρα.

Συντελεστής μεταβολής

- Είναι καθαρός αριθμός.
- Χρησιμοποιείται ως μέτρο σύγκρισης της μεταβλητότητας, όταν έχουμε ίδιες ή και διαφορετικές μονάδες μέτρησης.
- Χρησιμοποιείται ως μέτρο ομοιογένειας ενός πληθυσμού.

- Δεν ενδείκνυται στην περίπτωση που η μέση τιμή είναι κοντά στο μηδέν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Από το κεφάλαιο 2 **δε θα διδαχτούν:**
  α) Οι κλάσεις άνισου πλάτους (σελ. 74)
  β) Τα εκατοστημόρια (σελ. 89) και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος (σελ. 92)
  γ) Η επικρατούσα τιμή (σελ. 90,91)
  δ) Η γραμμική παλινδρόμηση, §2.4
  ε) Η γραμμική συσχέτιση, §2.5
  στ) Η άσκηση 4 της σελ. 81.
- Κατά την εξέταση ασκήσεων που αναφέρονται σε ομαδοποίηση παρατηρήσεων, οι κλάσεις θα δίδονται υποχρεωτικά.
- Κατά τη διδασκαλία του ιστογράμματος συχνοτήτων **να τονιστεί ιδιαιτέρως** ότι οι παρατηρήσεις στις κλάσεις κατανέμονται **ομοιόμορφα.** Επομένως, αν σε μια κλάση πλάτους c αντιστοιχούν ν_i παρατηρήσεις, τότε σε ένα υποδιάστημα αυτής πλάτους $\boldsymbol{d}$ αντιστοιχούν $\nu_i \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{c}}$ παρατηρήσεις. Έτσι για παράδειγμα στην άσκηση 5 της σελ. 103 οι πωλητές που έκαναν πωλήσεις από 5 χιλιάδες ευρώ μέχρι 6 χιλιάδες ευρώ είναι $14 \cdot \frac{1}{2} = 7$.
- Κατά τη διδασκαλία της διακύμανσης να δίνονται οι τύποι 2 και 4 των σελίδων 93 & 94 αντιστοίχως.

Κεφάλαιο 3. Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 19 διδακτικές ώρες.

Η Θεωρία των Πιθανοτήτων προσφέρει τις μεθόδους με τις οποίες προσδιορίζουμε ένα μέτρο της βεβαιότητας, με την οποία αναμένεται να πραγματοποιηθεί ή να μην πραγματοποιηθεί ένα ενδεχόμενο. Η κατοχή επομένως των βασικών στοιχείων της Θεωρίας των Πιθανοτήτων θα καταστήσει τους αυριανούς πολίτες ικανούς να συλλογίζονται με ψυχραιμία, να κρίνουν και να εκτιμούν με αντικειμενικότητα τα γεγονότα, αφού θα έχουν κατανοήσει ότι υπάρχουν τρόποι για να βρούμε αν κάποια από αυτά είναι περισσότερο πιθανά από κάποια άλλα.

Στην **§3.1** εξηγούνται οι έννοιες του **πειράματος τύχης**, του **δειγματικού χώρου** και του **ενδεχομένου.** Για τα ενδεχόμενα, αφού είναι υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω, ισχύει η γνωστή από την Α' Λυκείου άλγεβρα των συνόλων. Πρέπει επομένως οι μαθητές να εξοικειωθούν με τις πράξεις μεταξύ των συνόλων, τις οποίες και να ερμηνεύουν ως αντίστοιχες πράξεις με ενδεχόμενα. Πρέπει επίσης οι μαθητές να κατανοήσουν την αντιστοιχία ανάμεσα στις διάφορες σχέσεις των ενδεχομένων που είναι διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα και στη διατύπωση των ίδιων σχέσεων στη γλώσσα των συνόλων. Για το ξεπέρασμα των δυσκολιών που παρουσιάζονται στον προσδιορισμό του δειγματικού χώρου και των ενδεχομένων πρέπει οι διδάσκοντες για την εποπτική παρουσίασή τους να χρησιμοποιούν τα δεντροδιαγράμματα, τους πίνακες διπλής εισόδου, τα διαγράμματα Venn κτλ., ώστε να οδηγούν τους μαθητές στο να οργανώνουν τη σκέψη τους με συστηματικό και παραστατικό τρόπο.

Για να κατανοήσουν οι μαθητές ότι στη ρίψη δύο νομισμάτων τα αποτελέσματα *ΚΓ* και *ΓΚ* είναι διαφορετικά, να εξεταστεί για παράδειγμα το πείραμα στην περίπτωση της ρίψης ενός δεκάρικου και ενός εικοσάρικου.

Τέλος, επειδή σημαντικό ρόλο στον υπολογισμό των πιθανοτήτων παίζει ο διαμερισμός ενός συνόλου σε ανά δύο ξένα μεταξύ τους ενδεχόμενα, πρέπει να κατανοήσουν οι μαθητές τις σχέσεις:

$$A=(A-B)\cup(A\cap B)=(A\cap B')\cup(A\cap B),$$

$$B=(B-A)\cup(B\cap A)=(B\cap A')\cup(B\cap A) \text{ και}$$

$$A\cup B=(A\cap B')\cup(A\cap B)\cup(B\cap A').$$

Στην **§3.2** εισάγεται η έννοια της πιθανότητας, η οποία είναι και η βασικότερη έννοια του κεφαλαίου. Επειδή η έννοια αυτή διαμορφώνεται με βάση την έννοια της σχετικής συχνότητας, κρίνεται σκόπιμο να γίνει αναφορά και στην αντίστοιχη έννοια στο κεφάλαιο της Στατιστικής (σελ. 65 του βιβλίου).

Ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά του πειράματος τύχης είναι η αβεβαιότητα για το ποιο αποτέλεσμα του πειράματος θα εμφανιστεί σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του. Επομένως, αν A είναι ένα ενδεχόμενο, δεν μπορούμε με βεβαιότητα να προβλέψουμε αν το A θα πραγματοποιηθεί ή όχι. Γι' αυτό είναι χρήσιμο να συνδυάσουμε με κάθε ενδεχόμενο A έναν αριθμό, που θα είναι ένα μέτρο της "προσδοκίας" με την οποία αναμένουμε την πραγματοποίηση του A. Τον αριθμό αυτό τον ονομάζουμε πιθανότητα του A. Πώς θα γίνει όμως η "εκχώρηση" των πιθανοτήτων στα διάφορα ενδεχόμενα του πειράματος τύχης; Πώς δηλαδή θα κατασκευάσουμε μια κλίμακα πιθανότητας, με τη βοήθεια της οποίας σε κάθε ενδεχόμενο θα εκχωρούμε την αντίστοιχη πιθανότητα, όπως ακριβώς κάνουμε για τη μέτρηση της θερμοκρασίας κατασκευάζοντας, για παράδειγμα, τη θερμομετρική κλίμακα Κελσίου;

Συμφωνούμε ότι στην κλίμακα της πιθανότητας στο αδύνατο ενδεχόμενο θα αντιστοιχεί ο αριθμός 0, ενώ στο βέβαιο ενδεχόμενο ο αριθμός 1 (όπως και στην κοινή γλώσσα λέμε για το αδύνατο ενδεχόμενο ότι έχει πιθανότητα 0%, ενώ το βέβαιο 100%). Είναι λογικό να δεχτούμε ότι η πιθανότητα κάθε άλλου ενδεχομένου θα βρίσκεται ανάμεσα στο 0 και στο 1. Πώς θα γίνει όμως η εκχώρηση της πιθανότητας σε ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο; Σε ένα πείραμα που υπάρχει το στοιχείο της "συμμετρίας" είναι λογικό να υποθέσουμε ότι τα απλά ενδεχόμενα του πειράματος είναι ισοπίθανα, οπότε η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου A με κ στοιχεία θα τείνει στον αριθμό $\frac{\kappa}{\nu}$ και το όριο αυτό το ορίζουμε και ως πιθανότητα του A, δηλαδή $P(A)=\frac{\kappa}{\nu}$, που αποτελεί και τον **κλασικό ορισμό** της πιθανότητας. Η $P(A)$ που ορίζεται με αυτό τον τρόπο ικανοποιεί τις απαιτήσεις μιας κλίμακας πιθανότητας, αφού ισχύουν:

- $0 \le P(A) \le 1$
- $P(\Omega)=1$
- $P(\varnothing)=0$.

Πώς όμως γίνεται η εκχώρηση των πιθανοτήτων, όταν ο δειγματικός χώρος αποτελείται από μη ισοπίθανα αποτελέσματα ή έχει άπειρο πλήθος στοιχείων. Στις περιπτώσεις αυτές η Θεωρία των Πιθανοτήτων χρησιμοποιεί τον ορισμό που αναφέρεται στην αξιωματική θεμελίωση της Θεωρίας των Πιθανοτήτων, η οποία έγινε από τον A.N. Kolmogoroff. Σύμφωνα με τη θεμελίωση αυτή, αν Ω είναι ένας δειγματικός χώρος και $\mathcal{D}$ η αντίστοιχη κλάση των ενδεχομένων, τότε μέτρο πιθανότητας ονομάζεται κάθε συνάρτηση

$$P : \boldsymbol{\mathcal{D}} \to R$$

για την οποία ισχύουν οι ιδιότητες:

- $0 \le P(A) \le 1$, για κάθε $A \in \boldsymbol{\mathcal{D}}$
- $P(\Omega)=1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, αν $A \cap B = \varnothing$.

Η θεωρία του Kolmogoroff έχει το πλεονέκτημα να είναι φυσική, απλή και να ικανοποιεί τις σύγχρονες απαιτήσεις της αυστηρότητας. Συνδέει τη Θεωρία των Πιθανοτήτων με τη Θεωρία του Μέτρου και της Ολοκλήρωσης και έτσι εφοδιάζεται με ισχυρά εργαλεία και τεχνικές από άλλους αναπτυγμένους κλάδους των Μαθηματικών. Πέραν τούτου η αυστηρή θεμελίωση ήταν αυτή που επέτρεψε την αλματώδη ανάπτυξη της Θεωρίας των Πιθανοτήτων.

Όμως, στο διδακτικό βιβλίο υιοθετήθηκε για διδακτικούς λόγους ο απλούστερος αξιωματικός ορισμός που αναφέρεται στη σελίδα 149, άμεση συνέπεια του οποίου είναι και οι παραπάνω ιδιότητες, οι οποίες αναφέρονται στον ορισμό κατά Kolmogoroff.

Η παράγραφος 3.2 ολοκληρώνεται με τους κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων, οι οποίοι αποδεικνύονται για δειγματικούς χώρους με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Είναι σκόπιμο να δοθεί έμφαση στην εποπτική ερμηνεία των κανόνων αυτών.

ΕΣΠΕΡΙΝΟ ΕΠΑ.Λ.
Β΄ Τάξη Εσπερινού ΕΠΑ.Λ.
Άλγεβρα
[1 ώρα την εβδομάδα καθ΄ όλη τη διάρκεια του έτους]

Ι. Διδακτέα ύλη

- Από το βιβλίο «Αλγεβρα Α΄ Γενικού Λυκείου» των Σ. Ανδρεαδάκη, Β. Κατσαργύρη, Σ. Παπασταυρίδη, Γ. Πολύζου και Α. Σβέρκου, έκδοση Ο.Ε.Δ.Β..

Κεφ. 7ο: Τριγωνομετρια (Διδακτέα ύλη αλλά όχι εξεταστέα)
7.1 Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας
7.2 Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες
7.3 Αναγωγή στο 1ο Τεταρτημόριο

- Από το βιβλίο «Άλγεβρα Β΄ Γενικού Λυκείου» των Σ. Ανδρεαδάκη, Β. Κατσαργύρη, Σ. Παπασταυρίδη, Γ. Πολύζου και Α. Σβέρκου, έκδοση Ο.Ε.Δ.Β..

Κεφ. 1ο: Τριγωνομετρία
1.1 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις
1.2 Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις
1.3 Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών (χωρίς την υποπαράγραφο «Εφαπτομένη αθροίσματος και διαφοράς γωνιών»)
1.4 Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 2α (χωρίς τον τύπο της εφ2α και τις εφαρμογές 1, 2, 3, 4, 6)

Κεφ. 2ο: Πολυώνυμα - Πολυωνυμικές εξισώσεις
2.1 Πολυώνυμα
2.2 Διαίρεση πολυωνύμων
2.3 Πολυωνυμικές εξισώσεις
2.4 Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές.

ΙΙ. Διαχείριση διδακτέας ύλης
Η διαχείριση της διδακτέας ύλης θα γίνει σύμφωνα με αυτήν που προτείνεται για την Άλγεβρα της Β΄Τάξης του Ημερησίου ΕΠΑ.Λ.

Γεωμετρία
Ι. Διδακτέα ύλη

Από το βιβλίο «Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Γενικού Λυκείου» των Αργυρόπουλου Η., Βλάμου Π., Κατσούλη Γ., Μαρκάκη Σ. και Σιδέρη Π., έκδοση Ο.Ε.Δ.Β..

Κεφ. 9ο: Μετρικές σχέσεις
9.1 Ορθές προβολές
9.2 Το Πυθαγόρειο θεώρημα
9.3 Γεωμετρικές κατασκευές
9.4 Γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος (χωρίς την απόδειξη του θεωρήματος ΙΙ)
9.5 Θεωρήματα Διαμέσων

9.7 Τέμνουσες κύκλου

Κεφ. 10ο: <u>Εμβαδά</u>

10.1 Πολυγωνικά χωρία
10.2 Εμβαδόν ευθύγραμμου σχήματος - Ισοδύναμα ευθύγραμμα σχήματα
10.3 Εμβαδόν βασικών ευθύγραμμων σχημάτων
10.4 Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου (χωρίς την απόδειξη του τύπου ΙΙΙ)
10.5 Λόγος εμβαδών ομοίων τριγώνων – πολυγώνων
10.6 Μετασχηματισμός πολυγώνου σε ισοδύναμό του

Κεφ. 11ο: <u>Μέτρηση Κύκλου</u>

11.1 Ορισμός κανονικού πολυγώνου
11.2 Ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων (χωρίς τις αποδείξεις των θεωρημάτων)
11.3 Εγγραφή βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και στοιχεία τους (χωρίς τις εφαρμογές 2 και 3)
11.4 Προσέγγιση του μήκους του κύκλου με κανονικά πολύγωνα
11.5 Μήκος τόξου
11.6 Προσέγγιση του εμβαδού κύκλου με κανονικά πολύγωνα
11.7 Εμβαδόν κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος
11.8 Τετραγωνισμός κύκλου

<u>ΙΙ. Διαχείριση διδακτέας ύλης</u>

Η διαχείριση της διδακτέας ύλης θα γίνει σύμφωνα με αυτήν που προτείνεται για τη Γεωμετρία της Β΄Τάξης του Ημερησίου ΕΠΑ.Λ.

Γ΄ Τάξη Εσπερινού ΕΠΑ.Λ.
Μαθήματα Γενικής Παιδείας
Άλγεβρα

Ι.Διδακτέα ύλη

Από το βιβλίο «Άλγεβρα Β΄ Γενικού Λυκείου» των Σ. Ανδρεαδάκη, Β. Κατσαργύρη, Σ. Παπασταυρίδη, Γ. Πολύζου και Α. Σβέρκου, έκδοση Ο.Ε.Δ.Β..

Κεφ. 3ο: Πρόοδοι

3.1 Ακολουθίες
3.2 Αριθμητική πρόοδος
3.3 Γεωμετρική πρόοδος
3.4 Ανατοκισμός – Ίσες καταθέσεις – Χρεωλυσία
3.5 Άθροισμα άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου

Κεφ. 4ο: Εκθετική και Λογαριθμική συνάρτηση

4.1 Εκθετική συνάρτηση
4.2 Λογάριθμοι (χωρίς την απόδειξη της αλλαγής βάσης)
4.3 Λογαριθμική συνάρτηση (να διδαχθούν μόνο οι λογαριθμικές συναρτήσεις με βάση το 10 και το e.)

ΙΙ. Διαχείριση διδακτέας ύλης

Η διαχείριση της διδακτέας ύλης θα γίνει σύμφωνα με αυτήν που προτείνεται για την Άλγεβρα της Β΄Τάξης του Ημερησίου ΕΠΑ.Λ.

Μαθήματα Κατεύθυνσης
Μαθηματικά Θετικής-Τεχνολογικής Κατεύθυνσης

Ι.Διδακτέα ύλη

Από το βιβλίο «Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης - Β΄ Τάξη Γενικού Λυκείου» των Αδαμόπουλου Λ., Βισκαδουράκη Β., Γαβαλά Δ., Πολύζου Γ. και Σβέρκου Α., έκδοση Ο.Ε.Δ.Β..

Κεφ. 1ο: Διανύσματα

1.1 Η Έννοια του Διανύσματος
1.2 Πρόσθεση και Αφαίρεση Διανυσμάτων
1.3 Πολλαπλασιασμός Αριθμού με Διάνυσμα (χωρίς τις Εφαρμογές 1 και 2 στις σελ. 25-26)
1.4 Συντεταγμένες στο Επίπεδο (χωρίς την Εφαρμογή 2 στη σελ. 35)
1.5 Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

Κεφ. 2ο: Η Ευθεία στο Επίπεδο

2.1 Εξίσωση Ευθείας
2.2 Γενική Μορφή Εξίσωσης Ευθείας
2.3 Εμβαδόν Τριγώνου (χωρίς τις αποδείξεις των τύπων της απόστασης σημείου από ευθεία, του εμβαδού τριγώνου και της Εφαρμογής 1 στη σελ. 73)

Κεφ. 3ο: Κωνικές Τομές

3.1 Ο Κύκλος (χωρίς τις παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου)

3.2 Η Παραβολή (χωρίς την απόδειξη της εξίσωσης της παραβολής, την απόδειξη του τύπου της εφαπτομένης και την Εφαρμογή 1 στη σελ. 96)
3.3 Η Έλλειψη (χωρίς την απόδειξη της εξίσωσης της έλλειψης, τις παραμετρικές εξισώσεις της έλλειψης, την Εφαρμογή στη σελ. 107, την Εφαρμογή 1 στη σελ. 109 και την Εφαρμογή 2 στη σελ. 110)
3.4 Η Υπερβολή (χωρίς την απόδειξη της εξίσωσης της υπερβολής και την απόδειξη του τύπου των ασυμπτώτων)
3.5 Μόνο η υποπαράγραφος «σχετική θέση ευθείας και κωνικής» και σύμφωνα με την προτεινόμενη διαχείριση.

Κεφ. 4ο: <u>Θεωρία Αριθμών</u>
4.1 Η Μαθηματική Επαγωγή

ΙΙ. Διαχείριση διδακτέας ύλης

Η διαχείριση της διδακτέας ύλης θα γίνει σύμφωνα με αυτήν που προτείνεται για τα Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Β΄Τάξης του Ημερησίου ΕΠΑ.Λ.

Δ΄ Τάξη Εσπερινού ΕΠΑ.Λ.
Μαθηματικά Ι
Διδακτέα ύλη (είναι ίδια με τα Ημερήσια ΕΠΑ.Λ.)

Από το βιβλίο "Μαθηματικά", Α΄ τάξης του 2ου Κύκλου των Τ.Ε.Ε. (Π. Βλάμος, Α. Δούναβης, Δ. Ζέρβας), έκδοση Ο.Ε.Δ.Β..

Α/Α	Κεφάλαιο / Περιεχόμενο	Σελίδες (από … έως)
1	Κεφ. 2: Περιγραφική Στατιστική	
	Παράγρ. 2.1, 2.2, 2.3 (χωρίς την κατανομή συχνοτήτων σε κλάσεις άνισου πλάτους στις σελ. 75-76) Παράγρ. 2.4 και 2.5 (εκτός της μέσης απόλυτης απόκλισης στις σελίδες 84 – 86) Παράγρ. 2.6 Εξαιρούνται οι Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου στη σελ.102.	59- 102
2	Κεφ. 3: Όριο - Συνέχεια Συνάρτησης	
	Α. Παράγρ. 3.1, 3.2, 3.3 Παράγρ. 3.4 (μόνο μελέτη απροσδιόριστης μορφής 0/0 για ρητές συναρτήσεις καθώς και για τα ριζικά μόνο την πρώτη περίπτωση του πίνακα συζυγών παραστάσεων της σελ. 115). Εξαιρούνται οι εφαρμογές: 1β και 1γ στις σελίδες 118 και 119, 4δ στις σελίδες 122 και 123, 5 στις σελ. 123 και 124, 6 στις σελίδες 124 και 125, και 7 στις σελίδες 125 και 126.	107-132
	Β. Παράγρ. 3.6, 3.7, 3.8 και 3.9. Εξαιρούνται οι εφαρμογές : 2 στις σελίδες 142 και 143, 5 στη σελ.145, και 7 στις σελίδες 147 και 148.	133-151
3	Κεφ. 4: Στοιχεία Διαφορικού Λογισμού	
	Α. Παράγρ. 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 και 4.6.	173 - 200
	Β. Παράγρ. 4.8 και 4.9.	210 - 222
4	Κεφ. 5: Στοιχεία Ολοκληρωτικού Λογισμού	
	Παράγρ. 5.1, 5.2, 5.3 και 5.4. Εξαιρούνται οι εφαρμογές: 7 και 8 στις σελίδες 238 και 239, 9 και 10 στις σελίδες 246 και 247, οι ασκήσεις 1, 2, 3, 4 στις σελίδες 249 και 250, η απόδειξη του τύπου της παραγοντικής ολοκλήρωσης στη σελ. 242 και οι Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου στις σελ.258-261.	231 -258

Γενική Παρατήρηση :
Α) Οι εφαρμογές και τα παραδείγματα του βιβλίου μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως προτάσεις για τη λύση ασκήσεων ή την απόδειξη άλλων προτάσεων.

Β) Εφαρμογές και ασκήσεις που αναφέρονται σε όρια στο άπειρο καθώς και σε παραγράφους ή τμήματα παραγράφων που έχουν εξαιρεθεί δεν αποτελούν μέρος της εξεταστέας ύλης.

Μαθηματικά ΙΙ

Διδακτέα ύλη

Από το βιβλίο «Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης» της Γ' τάξης Γενικού Λυκείου των Ανδρεαδάκη Στ., κ.ά., έκδοση Ο.Ε.Δ.Β..

ΜΕΡΟΣ Α

Κεφ. 2ο : Μιγαδικοί αριθμοί

Παρ. 2.1 Η έννοια του Μιγαδικού Αριθμού

Παρ. 2.2 Πράξεις στο σύνολο C των Μιγαδικών

Παρ. 2.3 Μέτρο Μιγαδικού Αριθμού

ΜΕΡΟΣ Β

Κεφ. 1ο : Όριο - Συνέχεια συνάρτησης

Παρ. 1.1 Πραγματικοί αριθμοί.

Παρ. 1.2 Συναρτήσεις

Παρ. 1.3 Μονότονες συναρτήσεις - Αντίστροφη συνάρτηση

Παρ. 1.4 Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in R$

Παρ. 1.5 Ιδιότητες των ορίων, χωρίς τις αποδείξεις της υποπαραγράφου: «Τριγωνομετρικά όρια»

Παρ. 1.6 Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in R$

Παρ. 1.7 Όριο συνάρτησης στο άπειρο

Παρ. 1.8 Συνέχεια συνάρτησης

Κεφ. 2ο: Διαφορικός Λογισμός

Παρ. 2.1 Η έννοια της παραγώγου, χωρίς την υποπαράγραφο: «Κατακόρυφη εφαπτομένη»

Παρ. 2.2 Παραγωγίσιμες συναρτήσεις - Παράγωγος συνάρτηση

Παρ. 2.3 Κανόνες παραγώγισης, χωρίς την απόδειξη του θεωρήματος που αναφέρεται στην παράγωγο γινομένου συναρτήσεων

Παρ. 2.4 Ρυθμός μεταβολής

Παρ. 2.5 Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού

Παρ. 2.6 Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής

Παρ. 2.7 Τοπικά ακρότατα συνάρτησης, χωρίς την απόδειξη του Θεωρήματος της σελίδας 262, και χωρίς το θεώρημα της σελίδας 264 (Κριτήριο της 2ης παραγώγου)

Παρ. 2.9 Ασύμπτωτες - Κανόνες De l' Hospital

Παρατηρήσεις:

1. Η προτεινόμενη ως διδακτέα - εξεταστέα ύλη θα διδαχτεί σύμφωνα με τις οδηγίες του Π.Ι.
2. Τα θεωρήματα, οι προτάσεις, οι αποδείξεις και οι ασκήσεις που φέρουν αστερίσκο δε διδάσκονται και δεν εξετάζονται.
3. Οι εφαρμογές και τα παραδείγματα των βιβλίων δεν εξετάζονται ούτε ως θεωρία ούτε ως ασκήσεις. Μπορούν, όμως, να χρησιμοποιηθούν ως προτάσεις για τη λύση ασκήσεων ή την απόδειξη άλλων προτάσεων.
4. Δεν αποτελούν διδακτέα – εξεταστέα ύλη όσα θέματα αναφέρονται στην εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση.

Μάθημα Επιλογής

Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής

Διδακτέα ύλη

Από το βιβλίο «**Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής**» της Γ΄ τάξης Γενικού Λυκείου των Λ. Αδαμόπουλου κ.ά., έκδοση Ο.Ε.Δ.Β..

Κεφ. 1ο: <u>Διαφορικός Λογισμός</u>
Παρ. 1.1 Συναρτήσεις
Παρ. 1.2 Η έννοια της παραγώγου
Παρ. 1.3 Παράγωγος συνάρτησης
Παρ. 1.4 Εφαρμογές των Παραγώγων, χωρίς το κριτήριο της 2ης παραγώγου

Κεφ. 2ο: <u>Στατιστική</u>
Παρ. 2.1 Βασικές έννοιες
Παρ. 2.2 Παρουσίαση Στατιστικών Δεδομένων, χωρίς την υποπαράγραφο «Κλάσεις άνισου πλάτους»
Παρ. 2.3 Μέτρα Θέσης και Διασποράς, χωρίς τις υποπαραγράφους: «Εκατοστημόρια», «Ενδοτεταρτημοριακό εύρος» και «Επικρατούσα τιμή»

<u>Παρατηρήσεις</u>:

1. Η προτεινόμενη ως διδακτέα - εξεταστέα ύλη θα διδαχτεί σύμφωνα με τις οδηγίες του Π.Ι.
2. Τα θεωρήματα, οι προτάσεις, οι αποδείξεις και οι ασκήσεις που φέρουν αστερίσκο δε διδάσκονται και δεν εξετάζονται.
3. Οι εφαρμογές και τα παραδείγματα των βιβλίων δεν εξετάζονται ούτε ως θεωρία ούτε ως ασκήσεις. Μπορούν, όμως, να χρησιμοποιηθούν ως προτάσεις για τη λύση ασκήσεων, ή την απόδειξη άλλων προτάσεων.
4. Δεν αποτελούν διδακτέα – εξεταστέα ύλη όσα θέματα αναφέρονται στην εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση.
5. Οι τύποι 2 και 4 των σελίδων 93 και 94 του βιβλίου «Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής» θα δίνονται στους μαθητές τόσο κατά τη διδασκαλία, όσο και κατά την εξέταση θεμάτων των οποίων η αντιμετώπιση απαιτεί τη χρήση τους.