



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ,  
ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ

-----  
ΕΝΙΑΙΟΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ  
Π/ΘΜΙΑΣ & Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ  
Δ/ΝΣΗ ΣΠΟΥΔΩΝ Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ  
ΤΜΗΜΑ Β΄

Ταχ. Δ/ση: Ανδρέα Παπανδρέου 37

Τ.Κ. – Πόλη: 15180 Μαρούσι

Ιστοσελίδα: [www.minedu.gov.gr](http://www.minedu.gov.gr)

Πληροφορίες: Βιολέτης Α.

Τηλέφωνο: 210-344 3276

Μαρούσι, 6-11-2012  
Αρ. πρωτ. : 138370/Γ2

Βαθμός Ασφαλείας:  
Να διατηρηθεί μέχρι:  
Βαθ. Προτεραιότητας:

ΠΡΟΣ:

- Δ/νσεις Δ/θμιας Εκπ/σης
- Γραφεία Σχολικών Συμβούλων
- Επαγγελματικά Λύκεια (μέσω των Δ/σεων Δ.Ε.)

ΚΟΙΝ:

Περιφερειακές Δ/νσεις Εκπ/σης

**ΘΕΜΑ: Καθορισμός και διαχείριση διδακτέας ύλης των Μαθηματικών των Επαγγελματικών Λυκείων, για το σχολικό έτος 2012-13**

Σας αποστέλλουμε τις παρακάτω οδηγίες για τη διδακτέα ύλη των **Μαθηματικών των Επαγγελματικών Λυκείων**. Συγκεκριμένα:

## 1. Άλγεβρα

### Α΄ τάξης Ημερησίου Επαγγελματικού Λυκείου

Η προτεινόμενη διαχείριση της ύλης των Μαθηματικών της Α΄ Επαγγελματικού Λυκείου έχει σκοπό να υποστηρίξει τον εκπαιδευτικό στην προσπάθεια υλοποίησης των στόχων του ΑΠΣ, αναδεικνύοντας μέσα από συγκεκριμένες αναφορές και παραδείγματα, το πνεύμα της διδασκαλίας που το διέπει. Στόχος είναι ο εκπαιδευτικός να βοηθηθεί να σχεδιάσει ο ίδιος κατάλληλες για την τάξη του διδακτικές παρεμβάσεις συμβατές με το ΑΠΣ. Ο προτεινόμενος διδακτικός χρόνος για το κάθε κεφάλαιο είναι ενδεικτικός για να βοηθήσει τον εκπαιδευτικό στο διδακτικό του σχεδιασμό, ώστε να ολοκληρωθεί η ύλη μέσα στη σχολική χρονιά. Η διδακτική διαχείριση που προτείνεται δίνει τη δυνατότητα ορισμένα τμήματα της διδακτέας ύλης να μπορούν να ολοκληρωθούν και οι αντίστοιχοι διδακτικοί στόχοι να επιτευχθούν, σε χρόνο μικρότερο από τον χρόνο που θα απαιτείτο με μια παραδοσιακή διδακτική προσέγγιση. Για παράδειγμα, η παράγραφος που αφορά στη μελέτη της συνάρτησης  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$  μπορεί, με μια καλά σχεδιασμένη δραστηριότητα και κατάλληλη διδακτική διαχείριση, να ολοκληρωθεί πλήρως μέσα στον προβλεπόμενο χρόνο με τρόπο συμβατό με το ΑΠΣ. Αντίθετα, σε άλλες περιπτώσεις είναι σαφές ότι ο διατιθέμενος χρόνος δεν είναι επαρκής για να γίνει η διδακτική διαχείριση ολόκληρης της διδακτέας ύλης μιας ενότητας σύμφωνα με το πνεύμα διδασκαλίας που διέπει το ΑΠΣ. Σε αυτές τις περιπτώσεις ο εκπαιδευτικός, λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιαιτερότητες της τάξης του και τον διατιθέμενο χρόνο, θα πρέπει να οργανώσει με τέτοιο τρόπο τη διδασκαλία ώστε να αναδείξει στον καλύτερο δυνατό βαθμό τα στοιχεία που αναφέρονται στο ΑΠΣ. Για παράδειγμα, κατά τη διδασκαλία των κριτηρίων ισότητας τριγώνων ένας εκπαιδευτικός μπορεί να επιλέξει να εμπλέξει τους μαθητές της τάξης του σε μια δραστηριότητα που οδηγεί στην εικασία και στην απόδειξη του 2<sup>ου</sup> κριτηρίου ισότητας τριγώνων, ενώ αντίθετα να παραλείψει την απόδειξη του 3<sup>ου</sup> κριτηρίου ισότητας, η οποία, αν και παρουσιάζει μαθηματικό ενδιαφέρον, κρίνει ότι δεν θα

προσφέρει ιδιαίτερα στην τάξη του γιατί θα προκαλέσει σημαντική δυσκολία. Άλλος εκπαιδευτικός μπορεί να κρίνει διαφορετικά γιατί θεωρεί ότι η τάξη του έχει άλλες δυνατότητες. Το σημαντικό σε κάθε περίπτωση είναι να επιδιωχθεί η εννοιολογική κατανόηση μέσα από την ανάπτυξη ουσιαστικής μαθηματικής δραστηριότητας των ίδιων των μαθητών στην τάξη και όχι απλά η εξάσκηση σε τεχνικές.

## **Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων**

### **I. Εισαγωγή**

Το μάθημα «Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων» περιέχει σημαντικές μαθηματικές έννοιες, όπως της πιθανότητας, της απόλυτης τιμής, των προόδων, της συνάρτησης κ.α., οι οποίες είναι απαραίτητες για την μετέπειτα μαθηματική εξέλιξη των μαθητών. Οι μαθητές έχουν έρθει σε μια πρώτη επαφή με αυτές τις έννοιες σε προηγούμενες τάξεις. Στην Α΄ Επαγγελματικού Λυκείου θα τις αντιμετωπίσουν σε ένα υψηλότερο επίπεδο αφαίρεσης, το οποίο δημιουργεί ιδιαίτερες δυσκολίες στους μαθητές. Για την αντιμετώπιση αυτών των δυσκολιών προτείνεται να αφιερωθεί ικανός χρόνος στην εμπέδωση των νέων εννοιών, μέσω της ανάπτυξης και σύνδεσης πολλαπλών αναπαραστάσεων τους και στη χρήση τους στην επίλυση προβλημάτων. Επίσης, να αφιερωθεί χρόνος ώστε οι μαθητές να εμπλακούν στην αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ ιδιοτήτων και διαδικασιών καθώς και σε διαδικασίες γενίκευσης. Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις και η σύνδεση τους μπορούν υποστηριχθούν από ψηφιακά περιβάλλοντα, με τη βοήθεια των οποίων οι μαθητές μπορούν να εμπλακούν σε ουσιαστικές μαθηματικές δραστηριότητες. Μέσα από τη διερεύνηση ομοιοτήτων και διαφορών - για παράδειγμα η συσχέτιση των διαδικασιών επίλυσης ή της μορφής των λύσεων εξισώσεων και ανισώσεων, η συσχέτιση ορισμένων ιδιοτήτων των ριζών και των αποδείξεών τους με αντίστοιχες των απολύτων τιμών - οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν καλύτερα τις σχετικές έννοιες και διαδικασίες.

### **II. Διδακτέα ύλη**

Από το βιβλίο «Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων Α΄ Γενικού Λυκείου» (έκδοση 2012)

#### **Εισαγωγικό κεφάλαιο**

E.2. Σύνολα

#### **Κεφ.1<sup>ο</sup>: Πιθανότητες**

1.1 Δειγματικός Χώρος-Ενδεχόμενα

1.2 Έννοια της Πιθανότητας (εκτός της υποπαραγράφου «Αξιωματικός Ορισμός Πιθανότητας»)

#### **Κεφ.2<sup>ο</sup>: Οι Πραγματικοί Αριθμοί**

2.1 Οι Πράξεις και οι Ιδιότητες τους

2.2 Διάταξη Πραγματικών Αριθμών (εκτός της απόδειξης της ιδιότητας 4)

2.3 Απόλυτη Τιμή Πραγματικού Αριθμού

2.4 Ρίζες Πραγματικών Αριθμών (εκτός των αποδείξεων των ιδιοτήτων 3 και 4)

#### **Κεφ.3<sup>ο</sup>: Εξισώσεις**

3.1 Εξισώσεις 1<sup>ου</sup> Βαθμού

3.2 Η Εξίσωση  $x^y = a$

3.3 Εξισώσεις 2<sup>ου</sup> Βαθμού

#### **Κεφ.4<sup>ο</sup>: Ανισώσεις**

4.1 Ανισώσεις 1<sup>ου</sup> Βαθμού

4.2 Ανισώσεις 2<sup>ου</sup> Βαθμού

#### **Κεφ.5<sup>ο</sup>: Πρόοδοι**

5.1 Ακολουθίες

5.2 Αριθμητική πρόοδος (εκτός της απόδειξης για το  $S_n$ )

5.3 Γεωμετρική πρόοδος (εκτός της απόδειξης για το  $S_n$ )

### **Κεφ.6°: Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων**

- 6.1 Η Έννοια της Συνάρτησης
- 6.2 Γραφική Παράσταση Συνάρτησης (εκτός της υποπαραγράφου «Απόσταση σημείων»)
- 6.3 Η Συνάρτηση  $f(x)=ax+\beta$  (εκτός της κλίσης ευθείας ως λόγος μεταβολής)

### **Κεφ.7°: Μελέτη Βασικών Συναρτήσεων**

- 7.1 Μελέτη της Συνάρτησης :  $f(x)=ax^2$
- 7.3 Μελέτη της Συνάρτησης :  $f(x)=ax^2+\beta x+\gamma$

## **III. Διαχείριση διδακτέας ύλης**

### **Εισαγωγικό Κεφάλαιο (Να διατεθούν 2 δ.ω.)**

Ε.1 Να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στους συνδέσμους «ή» και «και».

Ε.2 Οι μαθητές αντιμετωπίζουν για πρώτη φορά την έννοια του συνόλου, των σχέσεων και των πράξεων μεταξύ συνόλων. Να δοθεί έμφαση στη μετάβαση από τη μία μορφή αναπαράστασης στην άλλη.

### **Κεφάλαιο 1° :Πιθανότητες (Να διατεθούν 6 δ.ω.)**

Η Θεωρία των Πιθανοτήτων προσφέρει ένα μέτρο βεβαιότητας, με την οποία αναμένεται να πραγματοποιηθεί ή να μην πραγματοποιηθεί ένα ενδεχόμενο.

§1.1 Εξηγούνται οι έννοιες του πειράματος τύχης, του δειγματικού χώρου και του ενδεχομένου. Οι μαθητές πρέπει να εξοικειωθούν με τις πράξεις μεταξύ των συνόλων, τις οποίες και να ερμηνεύουν ως αντίστοιχες πράξεις με ενδεχόμενα.

Επίσης θα πρέπει να κατανοήσουν την αντιστοιχία ανάμεσα στις διάφορες σχέσεις των ενδεχομένων που είναι διατυπωμένες στην ομιλούμενη γλώσσα και στη διατύπωση των ίδιων σχέσεων στη γλώσσα των συνόλων. Για το ξεπέραςμα των δυσκολιών οι διδάσκοντες προτείνεται να κάνουν εποπτική παρουσίαση χρησιμοποιώντας τα δεντροδιαγράμματα, τους πίνακες διπλής εισόδου, τα διαγράμματα Venn κτλ., ώστε να οδηγούν τους μαθητές στο να οργανώνουν τη σκέψη τους με συστηματικό και παραστατικό τρόπο.

§1.2 Εισάγεται η έννοια της πιθανότητας-η οποία είναι και η βασικότερη του κεφαλαίου- και διαμορφώνεται με βάση την έννοια της σχετικής συχνότητας. Η παράγραφος αυτή ολοκληρώνεται με τους κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων, οι οποίοι αποδεικνύονται για δειγματικούς χώρους με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Είναι σκόπιμο να δοθεί έμφαση στην εποπτική ερμηνεία των κανόνων αυτών.

Προτείνεται να μη λυθούν οι ασκήσεις 2 έως 6 από τη Β' ομάδα.

### **Κεφάλαιο 2° :Οι Πραγματικοί αριθμοί (Να διατεθούν14 δ.ω.)**

§2.1, §2.2 Οι μαθητές επαναλαμβάνουν και εμβαθύνουν τις πράξεις και ιδιότητές τους καθώς και τη διάταξη των πραγματικών αριθμών. Να μη διδαχθεί η απόδειξη της ιδιότητας 4 της παραγράφου §2.2.

§2.3 Να δοθεί έμφαση στη γεωμετρική ερμηνεία της απόλυτης τιμής ενός αριθμού καθώς και της απόλυτης τιμής της διαφοράς δυο αριθμών. Προτείνεται η διαπραγμάτευση απλών ασκήσεων.

§2.4 Οι μαθητές από το Γυμνάσιο γνωρίζουν την τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού και τις ιδιότητές τους. Σ' αυτή τη παράγραφο γίνεται επέκταση στη ν-οστή ρίζα. Να επισημανθεί η διατήρηση των ιδιοτήτων των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη και στην περίπτωση του ρητού εκθέτη. Να μη διδαχθεί η απόδειξη των ιδιοτήτων 3,4 της παραγράφου §2.4.

Προτείνεται η διαπραγμάτευση απλών ασκήσεων.

### **Κεφάλαιο 3° : Εξισώσεις (Να διατεθούν 7 δ.ω.)**

§3.1 Οι μαθητές έχουν διαπραγματευτεί την επίλυση των εξισώσεων της μορφής  $ax+\beta=0$ . Έτσι, δυσκολεύονται να διαχωρίσουν την παράμετρο από τη μεταβλητή καθώς και το ρόλο του καθενός. Να δοθεί προτεραιότητα του ρόλου αυτού. Να ζητηθεί για επίλυση απλή μορφή παραμετρικών εξισώσεων.

§3.2 Να ζητηθούν απλές εξισώσεις της μορφής  $x^v = a$ .

§3.3 Οι μαθητές γνωρίζουν από την προηγούμενη τάξη επίλυση 2<sup>ου</sup> βαθμού εξισώσεων. Να επισημανθεί η σχέση του πρόσημου της διακρίνουσας και του πλήθους των ριζών της δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

Επιπλέον οι μαθητές να μπορούν να χρησιμοποιούν αλλά και να αποδεικνύουν τους τύπους του Vieta. Τέλος να μπορούν να επιλύουν απλές εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2<sup>ου</sup> βαθμού.

#### **Κεφάλαιο 4<sup>ο</sup> : Ανισώσεις (Να διατεθούν 6 δ.ω.)**

§4.1 Οι μαθητές έχουν διαπραγματευτεί ανισώσεις 1<sup>ου</sup> βαθμού. Συστήνεται η απεικόνιση της λύσης να δίνεται εκτός από τη χρήση αριθμογραμμής και σε μορφή διαστήματος. Προτείνεται να γίνουν κάποιες από τις ασκήσεις 1 έως 8 της Α΄ ομάδας.

§4.2 Οι μαθητές διαπραγματεύονται πρώτη φορά ανισώσεις 2<sup>ου</sup> βαθμού. Να δοθεί έμφαση στη γεωμετρική ερμηνεία του πρόσημου. Επίσης παρατηρείται συχνά, οι μαθητές να συγχέουν το πρόσημο της διακρίνουσας με το πρόσημο του τριωνύμου.

Προτείνεται να μη λυθούν οι ασκήσεις της Β΄ Ομάδας.

#### **Κεφάλαιο 5<sup>ο</sup> : Πρόοδοι (Να διατεθούν 7 δ.ω.)**

§5.1 - §5.3 Οι μαθητές να μπορούν να διακρίνουν, με βάση τον ορισμό, αν μια ακολουθία είναι αριθμητική ή γεωμετρική πρόοδος. Να βρίσκουν το  $n$ -οστό όρο όταν δίνονται επαρκή στοιχεία. Να καταλάβουν τις έννοιες αριθμητικός μέσος –γεωμετρικός μέσος και να επιλύουν σχετικές ασκήσεις.

Να μη διδαχθούν οι αποδείξεις για το  $S_n$  και της Αριθμητικής και της Γεωμετρικής προόδου.

Προτείνεται να μη λυθούν ασκήσεις από τη Β΄ Ομάδα.

#### **Κεφάλαιο 6<sup>ο</sup> : Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων (Να διατεθούν 3 δ.ω.)**

§6.1 Να διαπραγματευτούν οι μαθητές με την έννοια της συνάρτησης και να εμπλακούν στη διαδικασία εύρεσης πεδίου ορισμού απλών συναρτήσεων.

§6.2 Να μπορούν οι μαθητές να επαληθεύουν τον τύπο απόστασης δύο σημείων. Να δοθεί έμφαση στις ασκήσεις 4, 5, 7, 8, 9 και 10.

§6.3 Θα ήταν σκόπιμο να γίνουν πολλά παραδείγματα κατασκευής γραφικής παράστασης με διάφορες τιμές του  $\alpha$  και  $\beta$ , αν είναι δυνατόν και σε συνδυασμό με χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Προτείνεται να λυθούν οι ασκήσεις 1 έως 4 από την Α΄ Ομάδα.

#### **Κεφάλαιο 7<sup>ο</sup> : Μελέτη Βασικών Συναρτήσεων (Να διατεθούν 4 δ.ω.)**

§7.1 Οι μαθητές έχουν μελετήσει τη συνάρτηση  $\psi = ax^2$  στο γυμνάσιο. Να δώσετε έμφαση στη μονοτονία και τα ακρότατα αυτής. Προτείνεται να γίνουν μόνο η 2 και 3 άσκηση από την Α΄ Ομάδα.

§7.3 Οι μαθητές έχουν μελετήσει τη συνάρτηση  $\psi = ax^2 + bx + c$  στο γυμνάσιο. Να δώσετε έμφαση στη μονοτονία και τα ακρότατα αυτής. Προτείνεται να γίνουν μόνο η 2 και 3 άσκηση από την Α΄ Ομάδα.

Θα ήταν σκόπιμο να γίνουν πολλά παραδείγματα κατασκευής γραφικής παράστασης με διάφορες τιμές του  $\alpha$  και  $\beta$ , αν είναι δυνατόν και σε συνδυασμό με χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή.

### **Α΄ Τάξη Εσπερινού Επαγγελματικού Λυκείου**

Από το βιβλίο «Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων Α΄ Γενικού Λυκείου» (έκδοση 2012)

Να ακολουθηθούν οι οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών της Α΄ Τάξης Ημερήσιου ΕΠΑ.Λ με την επισήμανση ότι οι διδάσκοντες θα πρέπει να κάνουν τις κατάλληλες τροποποιήσεις, σύμφωνα με το ωρολόγιο πρόγραμμα των Μαθηματικών της Α΄ Τάξης Εσπερινού ΕΠΑ.Λ. και ανάλογα με το επίπεδο της τάξης

## Β΄ Τάξη Ημερησίου Επαγγελματικού Λυκείου

### I. Διδακτέα ύλη

Από το βιβλίο «Άλγεβρα Β΄ Γενικού Λυκείου» (έκδοση 2012)

#### Κεφ. 1ο: Γραμμικά Συστήματα

- 1.1 Γραμμικά Συστήματα
- 1.2 Μη Γραμμικά Συστήματα

#### Κεφ.2ο: Ιδιότητες Συναρτήσεων

- 2.1 Μονοτονία-Ακρότατα-Συμμετρίες Συνάρτησης
- 2.2 Κατακόρυφη-Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης

#### Κεφ. 3ο: Τριγωνομετρία

- 3.1. Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας
- 3.2. Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες
- 3.3. Αναγωγή στο 1ο Τεταρτημόριο
- 3.4. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις
- 3.5. Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

#### Κεφ. 4ο: Πολυώνυμα - Πολυωνυμικές εξισώσεις

- 4.1. Πολυώνυμα
- 4.2. Διαίρεση πολυωνύμων
- 4.3. Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις
- 4.4. Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές.

#### Κεφ. 5ο: Εκθετική και Λογαριθμική συνάρτηση

- 5.1. Εκθετική συνάρτηση
- 5.2. Λογάριθμοι (χωρίς την απόδειξη της αλλαγής βάσης)
- 5.3. Λογαριθμική συνάρτηση (να διδαχθούν μόνο οι λογαριθμικές συναρτήσεις με βάση το 10 και το  $e$ ).

### II. Διαχείριση διδακτέας ύλης

#### Κεφάλαιο 1ο (Προτείνεται να διατεθούν 6 διδακτικές ώρες)

§1.1 Γίνεται επανάληψη των γνωστών από το Γυμνάσιο μεθόδων επίλυσης γραμμικών συστημάτων  $2 \times 2$ . Εισάγεται η έννοια της ορίζουσας, η επίλυση συστημάτων με χρήση ορίζουσών και η διερεύνηση παραμετρικών συστημάτων με μια παράμετρο. Γίνεται επίλυση απλών συστημάτων  $3 \times 3$ .

§1.2 Προτείνεται η επίλυση απλών μη γραμμικών συστημάτων με 2 αγνώστους. Να μη διδαχθούν οι ασκήσεις 4,5 της Β΄ Ομάδας.

#### Κεφάλαιο 2ο (Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες)

Στην Α΄ Λυκείου οι μαθητές μελέτησαν την  $f(x)=ax^2+bx+c$ , μέσω μετατοπίσεων της  $g(x)=ax^2$  και εξέτασαν τη μονοτονία και τα ακρότατα αυτής. Στο κεφάλαιο αυτό διατυπώνονται οι γενικοί ορισμοί των παραπάνω εννοιών και εξετάζονται αυτές και για άλλες συναρτήσεις μέσω των γραφικών παραστάσεών τους.

#### Κεφάλαιο 3ο (Προτείνεται να διατεθούν 16 διδακτικές ώρες)

§3.1 Να δοθεί έμφαση στην έννοια του ακτινίου, στη σύνδεσή του με τις μοίρες και την αναπαράστασή του στον τριγωνομετρικό κύκλο.

§3.2Α) Προτείνεται να μη διδαχθούν οι ταυτότητες 4.

Β) Να γίνει επιλογή από τις ασκήσεις 1-6 και από τις 10-13 της Α΄ Ομάδας.

§3.3 Προτείνεται να μη δοθούν προς λύση οι ασκήσεις της Β΄ Ομάδας.

- §3.4 Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα οι ασκήσεις:  
 1, 3, 4, 5, 6 και 7(i, ii) της Α΄ Ομάδας Β) 1, 2 και 3 της Β΄ Ομάδας.  
 §3.5 Προτείνεται να μη γίνουν: Α) Η άσκηση 11(ii) της Α΄ Ομάδας.  
 Β) Όλες οι ασκήσεις της Β΄ Ομάδας.

#### Κεφάλαιο 4ο (Προτείνεται να διατεθούν 15 διδακτικές ώρες)

§4.1 Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα οι ασκήσεις:

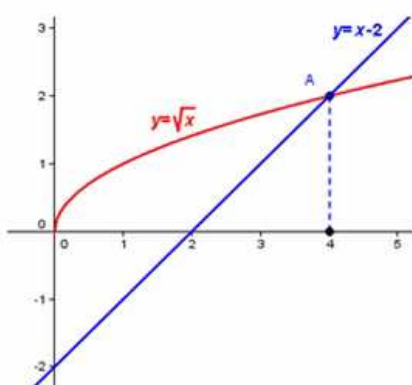
- Α) 1 και 2 (i, ii, iii) της Α΄ Ομάδας  
 Β) 2 και 3 της Β΄ Ομάδας.

§4.2 Προτείνεται:

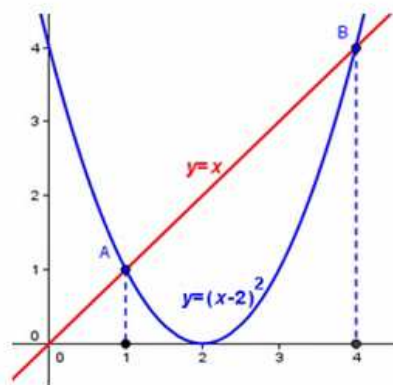
- Α) Να γίνουν κατά προτεραιότητα οι ασκήσεις 1 (i, iv), 2, 3 και 10 της Α΄ Ομάδας.  
 Β) Να μη γίνουν οι ασκήσεις της Β΄ Ομάδας.

§4.3 Στην ενότητα αυτή εισάγονται νέα εργαλεία για την παραγοντοποίηση πολυωνύμων μέσω της οποίας επιλύονται στη συνέχεια πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις βαθμού μεγαλύτερου από 2

Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα: Οι ασκήσεις 1, 4, 5, 6 και 8 της Α΄ Ομάδας και προβλήματα της Β΄ Ομάδας, τα οποία οδηγούν στην επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων.



Γραφική λύση της  $\sqrt{x} = x - 2$



Γραφική λύση της  $x = (x - 2)^2$

§4.4 Στην ενότητα αυτή επιλύονται εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές, όπως άρρητες και κλασματικές εξισώσεις και ανισώσεις.

Α) Να δοθεί έμφαση στο γεγονός ότι η ύψωση των μελών μιας εξίσωσης στο τετράγωνο δεν οδηγεί πάντα σε ισοδύναμη εξίσωση. Αυτό μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια των παρακάτω γραφικών παραστάσεων

Β) Προτείνεται να μη γίνουν οι ασκήσεις 3 και 4 της Β΄ Ομάδας.

#### Κεφάλαιο 5ο (Προτείνεται να διατεθούν 10 διδακτικές ώρες)

§5.1 Προτείνεται να δοθεί έμφαση στα προβλήματα της Β΄ Ομάδας, με προτεραιότητα στις 6, 7 και 8.

§5.2 Α) Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα:

Οι ασκήσεις της Α΄ Ομάδας με έμφαση στα προβλήματα.

Οι ασκήσεις 2, 3, 5 της Β΄ Ομάδας.

Β) Προτείνεται να μη γίνουν οι ασκήσεις 6, 7 και 8 της Β΄ Ομάδας.

§5.3 Α) Προτείνεται να διδαχθούν μόνο οι συναρτήσεις  $f(x) = \log x$  και  $f(x) = \ln x$ .

Β) Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα οι ασκήσεις: 2, 5, 6, 7 και 8 της Α΄ Ομάδας και 1(i, iii), 3, 5, 7 και 8 της Β΄ Ομάδας.

Ασκήσεις Γ΄ Ομάδας: Να μη διδάσκονται ασκήσεις Γ΄ Ομάδας.

## Β΄ Τάξη Εσπερινού Επαγγελματικού Λυκείου

### I. Διδακτέα ύλη

Από το βιβλίο «Άλγεβρα Β΄ Γενικού Λυκείου» (έκδοση 2012)

#### Κεφ. 1ο: Γραμμικά Συστήματα

- 1.1 Γραμμικά Συστήματα
- 1.2 Μη Γραμμικά Συστήματα

#### Κεφ.2ο: Ιδιότητες Συναρτήσεων

- 2.1 Μονοτονία-Ακρότατα-Συμμετρίες Συνάρτησης
- 2.2 Κατακόρυφη-Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης

#### Κεφ. 3ο: Τριγωνομετρία

- 3.1. Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας
- 3.2. Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες
- 3.3. Αναγωγή στο 1ο Τεταρτημόριο
- 3.4 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις
- 3.5 Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

### II. Διαχείριση διδακτέας ύλης

#### Κεφάλαιο 1ο (Προτείνεται να διατεθούν 6 διδακτικές ώρες)

§1.1 Γίνεται επανάληψη των γνωστών από το Γυμνάσιο μεθόδων επίλυσης γραμμικών συστημάτων  $2 \times 2$ . Εισάγεται η έννοια της ορίζουσας, η επίλυση συστημάτων με χρήση οριζουσών και η διερεύνηση παραμετρικών συστημάτων με μια παράμετρο. Γίνεται επίλυση απλών συστημάτων  $3 \times 3$ .

§1.2 Προτείνεται η επίλυση απλών μη γραμμικών συστημάτων με 2 αγνώστους. Να μη διδαχθούν οι ασκήσεις 4, 5 της Β΄ Ομάδας.

#### Κεφάλαιο 2ο (Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες)

Στην Α΄ Λυκείου οι μαθητές μελέτησαν την  $f(x)=ax^2+bx+c$ , μέσω μετατοπίσεων της  $g(x)=ax^2$  και εξέτασαν τη μονοτονία και τα ακρότατα αυτής. Στο κεφάλαιο αυτό διατυπώνονται οι γενικοί ορισμοί των παραπάνω εννοιών και εξετάζονται αυτές και για άλλες συναρτήσεις μέσω των γραφικών παραστάσεών τους.

#### Κεφάλαιο 3ο (Προτείνεται να διατεθούν 16 διδακτικές ώρες)

§3.1 Να δοθεί έμφαση στην έννοια του ακτινίου, στη σύνδεσή του με τις μοίρες και την αναπαράστασή του στον τριγωνομετρικό κύκλο.

§3.2 Α) Προτείνεται να μη διδαχθούν οι ταυτότητες 4.

Β) Να γίνει επιλογή από τις ασκήσεις 1-6 και από τις 10-13 της Α΄ Ομάδας.

§3.3 Προτείνεται να μη δοθούν προς λύση οι ασκήσεις της Β΄ Ομάδας.

§3.4 Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα οι ασκήσεις:

Α) 1, 3, 4, 5, 6 και 7(i, ii) της Α΄ Ομάδας

Β) 1, 2 και 3 της Β΄ Ομάδας.

§3.5 Προτείνεται να μη γίνουν:

Α) Η άσκηση 11(ii) της Α΄ Ομάδας.

Β) Όλες οι ασκήσεις της Β΄ Ομάδας.

**Γ΄ Εσπερινού Επαγγελματικού Λυκείου**  
**(μόνο για το τρέχον σχολικό έτος)**

**I. Διδακτέα ύλη**

**α) Από το βιβλίο «Άλγεβρα Β΄ Γενικού Λυκείου» των Σ. Ανδρεαδάκη, Β. Κατσαργύρη, Σ. Παπασταυρίδη, Γ. Πολύζου και Α. Σβέρκου, έκδοση Ο.Ε.Δ.Β., 2011.**

**Κεφ. 3<sup>ο</sup>: Πρόοδοι**

- 3.1 Ακολουθίες
- 3.2 Αριθμητική πρόοδος
- 3.3 Γεωμετρική πρόοδος
- 3.4 Ανατοκισμός – Ίσες καταθέσεις – Χρεωλυσία
- 3.5 Άθροισμα άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου

**Κεφ. 4<sup>ο</sup>: Εκθετική και Λογαριθμική συνάρτηση**

- 4.1 Εκθετική συνάρτηση
- 4.2 Λογάριθμοι (χωρίς την απόδειξη της αλλαγής βάσης)
- 4.3 Λογαριθμική συνάρτηση (να διδαχθούν μόνο οι λογαριθμικές συναρτήσεις με βάση το 10 και το e.)

**β) Από το νέο βιβλίο «Άλγεβρα Β΄ Γενικού Λυκείου» (έκδοση 2012)**

**Κεφ. 1ο: Γραμμικά Συστήματα**

- 1.1 Γραμμικά Συστήματα
- 1.2 Μη Γραμμικά Συστήματα

**Κεφ.2ο: Ιδιότητες Συναρτήσεων**

- 2.1 Μονοτονία-Ακρότατα-Συμμετρίες Συναρτήσεων
- 2.2 Κατακόρυφη-Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης

**II. Διαχείριση διδακτέας ύλης**

**α) Από το βιβλίο «Άλγεβρα Β΄ Γενικού Λυκείου» (έκδοση Ο.Ε.Δ.Β., 2011).**

**Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup> : (Να διατεθούν 7 δ.ω.)**

**§3.1 - §3.3** Οι μαθητές να μπορούν να διακρίνουν, με βάση τον ορισμό, αν μια ακολουθία είναι αριθμητική ή γεωμετρική πρόοδος. Να βρίσκουν το  $n$ -οστό όρο όταν δίνονται επαρκή στοιχεία. Να καταλάβουν τις έννοιες αριθμητικός μέσος –γεωμετρικός μέσος και να επιλύουν σχετικές ασκήσεις.

Να μη διδαχθούν οι αποδείξεις για το  $S_n$  και της Αριθμητικής και της Γεωμετρικής προόδου.

Προτείνεται να μη λυθούν ασκήσεις από τη Β΄ Ομάδα.

**§3.4** Α) Προτείνεται οι τύποι να δίνονται στους μαθητές για την επίλυση ασκήσεων, ώστε να μην αποτελέσουν αντικείμενο απομνημόνευσης.

Β) Προτείνεται, επίσης, να χρησιμοποιούνται υπολογιστές τσέπης.

Γ) Προτείνεται να μη γίνουν οι ασκήσεις Β΄ Ομάδας.

**§3.5** Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα:

Α) Οι ασκήσεις της Α΄ Ομάδας

Β) Μόνο η άσκηση 3 της Β΄ Ομάδας

**Κεφάλαιο 4ο: (Προτείνεται να διατεθούν 10 διδακτικές ώρες)**

**§4.1** Προτείνεται να δοθεί έμφαση στα προβλήματα της Β΄ Ομάδας, με προτεραιότητα στις 6, 7 και 8.



**§4.2** Α) Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα:

Οι ασκήσεις της Α΄ Ομάδας με έμφαση στα προβλήματα.

Οι ασκήσεις 2, 3, 5 της Β΄ Ομάδας.

Β) Προτείνεται να μη γίνουν οι ασκήσεις 6, 7 και 8 της Β΄ Ομάδας.

**§4.3** Α) Προτείνεται να διδαχθούν μόνο οι συναρτήσεις  $f(x)=\log x$  και  $f(x)=\ln x$ .

Β) Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα οι ασκήσεις: 2, 5, 6, 7 και 8 της

Α΄ Ομάδας και 1(i, iii), 3, 5, 7 και 8 της Β΄ Ομάδας.

Ασκήσεις Γ΄ Ομάδας: Να μη διδάσκονται ασκήσεις Γ΄ Ομάδας.

**β) Από το νέο βιβλίο «Άλγεβρα Β΄ Γενικού Λυκείου» (έκδοση 2012)**

**Κεφάλαιο 1ο (Προτείνεται να διατεθούν 6 διδακτικές ώρες)**

**§1.1** Γίνεται επανάληψη των γνωστών από το Γυμνάσιο μεθόδων επίλυσης γραμμικών συστημάτων  $2 \times 2$ . Εισάγεται η έννοια της ορίζουσας, η επίλυση συστημάτων με χρήση οριζουσών και η διερεύνηση παραμετρικών συστημάτων με μια παράμετρο. Γίνεται επίλυση απλών συστημάτων  $3 \times 3$ .

**§1.2** Προτείνεται η επίλυση απλών μη γραμμικών συστημάτων με 2 αγνώστους. Να μη διδαχθούν οι ασκήσεις 4,5 της Β΄ Ομάδας.

**Κεφάλαιο 2ο (Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες)**

Στην Α΄ Επαγγελματικού Λυκείου οι μαθητές μελέτησαν την  $f(x)=ax^2+bx+\gamma$ , μέσω μετατοπίσεων της  $g(x)=ax^2$  και εξέτασαν τη μονοτονία και τα ακρότατα αυτής. Στο κεφάλαιο αυτό διατυπώνονται οι γενικοί ορισμοί των παραπάνω εννοιών και εξετάζονται αυτές και για άλλες συναρτήσεις μέσω των γραφικών παραστάσεών τους.

## 3 Γεωμετρία

### Α΄ Ημερησίου Επαγγελματικού Λυκείου

#### I. Εισαγωγή

Η διδασκαλία της Γεωμετρίας στην Α΄ Επαγγελματικού Λυκείου εστιάζει στο πέρασμα από τον εμπειρικό στο θεωρητικό τρόπο σκέψης, με ιδιαίτερη έμφαση στη μαθηματική απόδειξη. Οι μαθητές έχουν έρθει σε επαφή με στοιχεία θεωρητικής γεωμετρικής σκέψης και στο Γυμνάσιο, όπου έχουν αντιμετωπίσει ασκήσεις που απαιτούν θεωρητική απόδειξη. Στην Α΄ Επαγγελματικού Λυκείου, πρέπει αυτή η εμπειρία των μαθητών να αξιοποιηθεί με στόχο την περαιτέρω ανάπτυξη της θεωρητικής τους σκέψης. Η διατύπωση ορισμών γεωμετρικών εννοιών είναι κάτι δύσκολο για τους μαθητές, ακόμα και αυτής της τάξης, καθώς απαιτεί τη συνειδητοποίηση των κρίσιμων και ελάχιστων ιδιοτήτων που απαιτούνται για τον καθορισμό μιας έννοιας. Επίσης οι μαθητές χρειάζεται να διερευνούν ιδιότητες και σχέσεις των γεωμετρικών εννοιών και να δημιουργούν εικασίες τις οποίες να προσπαθούν να τεκμηριώσουν. Η αντιμετώπιση της μαθηματικής απόδειξης απλά ως περιγραφή μιας σειράς λογικών βημάτων που παρουσιάζονται από τον εκπαιδευτικό, δεν είναι κατάλληλη ώστε να μνηθούν οι μαθητές στη σημασία και την κατασκευή μιας απόδειξης. Αντίθετα, είναι σημαντικό να εμπλακούν οι μαθητές σε αποδεικτικές διαδικασίες, να προσπαθούν να εντοπίζουν τη βασική αποδεικτική ιδέα, μέσω πειραματισμού και διερεύνησης, και να χρησιμοποιούν μετασχηματισμούς και αναπαραστάσεις, που υποστηρίζουν την ανάπτυξη γεωμετρικών συλλογισμών. Η κατασκευή από τους μαθητές αντιπαραδειγμάτων και η συζήτηση για το ρόλο τους είναι μια σημαντική διαδικασία, ώστε να αρχίσουν να αποκτούν μια πρώτη αίσθηση της σημασίας του αντιπαραδείγματος στα Μαθηματικά. Η απαγωγή σε άτοπο είναι επίσης μια μέθοδος που συχνά συναντούν οι μαθητές στην απόδειξη αρκετών θεωρημάτων. Ο ρόλος του «άτοπου» στην τεκμηρίωση του αρχικού ισχυρισμού αλλά και το κατά πόσο η άρνηση του συμπεράσματος οδηγεί τελικά στην τεκμηρίωσή του, δημιουργούν ιδιαίτερη δυσκολία στους μαθητές. Σε όλα τα παραπάνω ουσιαστικό ρόλο μπορεί να παίξει η αξιοποίηση λογισμικών Δυναμικής Γεωμετρίας.

#### II. Διδακτέα Ύλη

Από το βιβλίο «Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου» των Αργυρόπουλου Η., Βλάμου Π., Κατσούλη Γ., Μαρκάτη Σ., Σίδερη Π. (έκδοση 2012)

##### Κεφ.1<sup>ο</sup>: Εισαγωγή στην Ευκλείδεια Γεωμετρία

- 1.1 Το αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας
- 1.2 Ιστορική αναδρομή στη γένεση και ανάπτυξη της Γεωμετρίας

##### Κεφ.2<sup>ο</sup>: Τα βασικά γεωμετρικά σχήματα

- 2.1 Σημεία, γραμμές και επιφάνειες
- 2.2 Το επίπεδο
- 2.3 Η ευθεία
- 2.4 Η ημιευθεία
- 2.5 Το ευθύγραμμο τμήμα
- 2.6 Μετατοπίσεις στο επίπεδο
- 2.7 Σύγκριση ευθυγράμμων τμημάτων
- 2.8 Πράξεις μεταξύ ευθυγράμμων τμημάτων
- 2.9 Μήκος ευθύγραμμου τμήματος
- 2.10 Σημεία συμμετρικά ως προς κέντρο
- 2.11 Ημιεπίπεδα
- 2.12 Η γωνία
- 2.13 Σύγκριση γωνιών
- 2.14 Ευθεία κάθετη από σημείο σε ευθεία
- 2.15 Πράξεις μεταξύ γωνιών

- 2.16 Είδη και απλές σχέσεις γωνιών
- 2.17 Έννοια και στοιχεία του κύκλου
- 2.18 Επίκεντρη γωνία – Σχέση επίκεντρης γωνίας και τόξου
- 2.19 Μέτρο τόξου και γωνίας
- 2.20 Τεθλασμένη γραμμή – Πολύγωνο – στοιχεία πολυγώνων

### **Κεφ.3°: Τρίγωνα**

- 3.1 Είδη και στοιχεία τριγώνων
- 3.2 1° Κριτήριο ισότητας τριγώνων (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)
- 3.3 2° Κριτήριο ισότητας τριγώνων
- 3.4 3° Κριτήριο ισότητας τριγώνων
- 3.5 Ύπαρξη και μοναδικότητα καθέτου (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)
- 3.6 Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων
- 3.7 Κύκλος - Μεσοκάθετος – Διχοτόμος
- 3.8 Κεντρική συμμετρία
- 3.9 Αξονική συμμετρία
- 3.10 Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)
- 3.11 Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών
- 3.12 Τριγωνική ανισότητα
- 3.13 Κάθετες και πλάγιες
- 3.14 Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου
- 3.15 Εφαπτόμενα τμήματα
- 3.16 Σχετικές θέσεις δύο κύκλων
- 3.17 Απλές γεωμετρικές κατασκευές
- 3.18 Βασικές κατασκευές τριγώνων

### **Κεφ.4°: Παράλληλες ευθείες**

- 4.1. Εισαγωγή
- 4.2. Τέμνουσα δύο ευθειών - Ευκλείδειο αίτημα
- 4.3. Κατασκευή παράλληλης ευθείας
- 4.4. Γωνίες με πλευρές παράλληλες
- 4.5. Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου
- 4.6. Άθροισμα γωνιών τριγώνου
- 4.7. Γωνίες με πλευρές κάθετες
- 4.8. Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου

### **Κεφ.5°: Παραλληλόγραμμα - Τραπέζιο**

- 5.1. Εισαγωγή
- 5.2. Παραλληλόγραμμα
- 5.3. Ορθογώνιο
- 5.4. Ρόμβος
- 5.5. Τετράγωνο
- 5.6. Εφαρμογές στα τρίγωνα
- 5.7. Βαρύκεντρο τριγώνου (εκτός της απόδειξης τους θεωρήματος)
- 5.8. Το ορθόκεντρο τριγώνου
- 5.9. Μια ιδιότητα του ορθογώνιου τριγώνου
- 5.10. Τραπέζιο
- 5.11. Ισοσκελές τραπέζιο
- 5.12. Αξιοσημείωτες ευθείες και κύκλοι τριγώνου

### **Κεφ.6°: Εγγεγραμμένα σχήματα**

- 6.1. Εισαγωγικά – Ορισμοί
- 6.2. Σχέση εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης
- 6.3. Γωνία χορδής και εφαπτομένης
- 6.5 Το εγγεγραμμένο τετράπλευρο
- 6.6 Το εγγράψιμο τετράπλευρο (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)

### **III. Διαχείριση διδακτέας ύλης**

#### **Κεφ.1ο : Εισαγωγή στην Ευκλείδεια Γεωμετρία. (Να διατεθεί 1 δ.ω.)**

Οι μαθητές εισάγονται στην έννοια του αξιωματικού συστήματος και στη διαφορά της Θεωρητικής από την Πρακτική Γεωμετρία. Προτείνεται να διδαχθεί περιληπτικά.

#### **Κεφ.2ο : Βασικά Γεωμετρικά σχήματα. (Να διατεθούν 2 δ.ω.)**

Προτείνεται να δοθεί έμφαση μόνο στις παραγράφους §2.15, §2.16, §2.17 και 2.18 και τις αντίστοιχες ασκήσεις.

#### **Κεφ.3ο : Τρίγωνα. (Να διατεθούν 15 δ.ω.)**

Οι μαθητές έχουν διαπραγματευτεί το μεγαλύτερο μέρος του περιεχομένου των παραγράφων αυτών στο Γυμνάσιο. Να δοθεί έμφαση λοιπόν στο σχεδιασμό σχημάτων με βάση τις λεκτικές διατυπώσεις των γεωμετρικών προτάσεων και αντίστροφα, στη διατύπωση των γεωμετρικών συλλογισμών των μαθητών και στην ισότητα τριγώνων ως στρατηγική απόδειξης ισότητας ευθύγραμμων τμημάτων ή γωνιών.

Οι παράγραφοι §3.5, §3.8, §3.9, §3.10, §3.11, §3.13, §3.14, §3.16 προτείνεται να διδαχθούν περιληπτικά.

Να μη ζητηθούν οι αποδείξεις των παραγράφων: §3.2, §3.3, §3.4, §3.5, από §3.6 θεώρημα 1 και 2, §3.10, §3.11, §3.12, §3.13 και §3.14.

Προτείνεται να μη ζητηθούν ασκήσεις από τα σύνθετα θέματα.

#### **Κεφ. 4ο : Παράλληλες ευθείες. (Να διατεθούν 8 δ.ω.)**

Οι μαθητές έχουν διαπραγματευθεί την έννοια της παραλληλίας ευθειών σε προηγούμενες τάξεις.

Προτείνεται να μη ζητηθούν οι αποδείξεις των θεωρημάτων, παρά μόνο της §4.2, §4.6 και §4.8. Επίσης προτείνεται να μη ζητηθούν ασκήσεις από τα σύνθετα.

#### **Κεφ. 5ο : Παραλληλόγραμμα – Τραπεζία. (Να διατεθούν 17 δ.ω.)**

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές διαπραγματεύονται τα διάφορα είδη παραλληλογράμμων και τραπεζίων και μελετούν τις χαρακτηριστικές τους ιδιότητες. Να επισημανθεί η διαφορά μεταξύ ιδιοτήτων και κριτηρίων των τετραπλεύρων και την εφαρμογή τους στις ασκήσεις.

Να μη ζητηθούν οι αποδείξεις των θεωρημάτων από τις παραγράφους §5.6 τα θεωρήματα II και III, §5.7, §5.8. Προτείνεται να μη ζητηθούν ασκήσεις από τα σύνθετα θέματα.

#### **Κεφ.6ο : Εγγεγραμμένα σχήματα. (Να διατεθούν 5 δ.ω.)**

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές μελετούν τις ιδιότητες των τετραπλεύρων που είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο και διερευνούν τις ικανές ιδιότητες που επιτρέπουν ένα τετράπλευρο να εγγραφεί σε κύκλο. Να μη ζητηθούν οι αποδείξεις των Θεωρημάτων. Προτείνεται να μη ζητηθούν οι «αποδεικτικές ασκήσεις» και τα «σύνθετα θέματα».

### **Α΄ Εσπερινού Επαγγελματικού Λυκείου**

Να ακολουθηθούν οι οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών της Α΄ Τάξης Ημερήσιου ΕΠΑ.Λ με την επισήμανση ότι οι διδάσκοντες θα πρέπει να κάνουν τις κατάλληλες τροποποιήσεις, σύμφωνα με το ωρολόγιο πρόγραμμα των Μαθηματικών της Α΄ Τάξης Εσπερινού ΕΠΑ.Λ. και ανάλογα με το επίπεδο της τάξης

## Β΄ Ημερησίου και Β΄ Εσπερινού Επαγγελματικού Λυκείου

### I. Διδακτέα ύλη

Από το βιβλίο «Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου» των. Αργυρόπουλου Η, Βλάμου Π., Κατσούλη Γ., Μαρκάκη Σ. και Σιδέρη Π.

#### Κεφ. 7<sup>ο</sup>: Αναλογίες (Δεν αποτελεί εξεταστέα ύλη)

- 7.1. Εισαγωγή
- 7.2. Διάρθρωση ευθύγραμμου τμήματος σε  $n$  ίσα μέρη
- 7.3. Γινόμενο ευθύγραμμου τμήματος με αριθμό – Λόγος ευθύγραμμων τμημάτων
- 7.4. Ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα – Αναλογίες
- 7.5. Μήκος ευθύγραμμου τμήματος
- 7.6. Διάρθρωση τμημάτων εσωτερικά και εξωτερικά ως προς δοσμένο λόγο
- 7.7. Θεώρημα του Θαλή (χωρίς την απόδειξη του θεωρήματος)
- 7.8. Θεωρήματα των διχοτόμων τριγώνου

#### Κεφ. 8<sup>ο</sup>: Ομοιότητα (Δεν αποτελεί εξεταστέα ύλη)

- 8.1. Όμοια ευθύγραμμα σχήματα
- 8.2. Κριτήρια ομοιότητας (χωρίς τις αποδείξεις των θεωρημάτων II και III και τις εφαρμογές 1 και 2)

#### Κεφ. 9<sup>ο</sup>: Μετρικές σχέσεις

- 9.1. Ορθές προβολές
- 9.2. Το Πυθαγόρειο θεώρημα
- 9.3. Γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος (χωρίς την απόδειξη του θεωρήματος II )
- 9.4. Θεωρήματα Διαμέσων
- 9.7. Τέμνουσες κύκλου

#### Κεφ. 10<sup>ο</sup>: Εμβαδά

- 10.1. Πολυγωνικά χωρία
- 10.2. Εμβαδόν ευθύγραμμου σχήματος - Ισοδύναμα ευθύγραμμα σχήματα
- 10.3. Εμβαδόν βασικών ευθύγραμμων σχημάτων
- 10.4. Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου (χωρίς την απόδειξη του τύπου III)
- 10.5. Λόγος εμβαδών όμοιων τριγώνων – πολυγώνων

#### Κεφ. 11<sup>ο</sup>: Μέτρηση Κύκλου

- 11.1. Ορισμός κανονικού πολυγώνου
- 11.2. Ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων (χωρίς τις αποδείξεις των θεωρημάτων)
- 11.3. Εγγραφή βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και στοιχεία τους (χωρίς τις εφαρμογές 2,3)
- 11.4. Προσέγγιση του μήκους του κύκλου με κανονικά πολύγωνα
- 11.5. Μήκος τόξου
- 11.6. Προσέγγιση του εμβαδού κύκλου με κανονικά πολύγωνα
- 11.7. Εμβαδόν κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος

### II. Διαχείριση διδακτέας ύλης

#### Κεφάλαιο 7<sup>ο</sup>

(Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες).

#### §7.1-7.6

Στις παραγράφους αυτές γίνεται πρώτη φορά λόγος για σύμμετρα και ασύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα. Η έννοια της ασυμμετρίας μπορεί να βοηθήσει σημαντικά τους μαθητές

να ξεκαθαρίσουν την έννοια του αρρήτου αριθμού. Η ανάπτυξη της ύλης στο σχολικό βιβλίο (θεωρία, παρατηρήσεις, σημειώσεις) είναι πλήρης και αν διδαχθεί προσεκτικά θα βοηθήσει τους μαθητές σε σημαντικές περιοχές της Γεωμετρίας που ακολουθεί (Θεώρημα Θαλή, όμοια τρίγωνα) και της Άλγεβρας (η έννοια του πραγματικού αριθμού). Προτείνεται να δοθεί έμφαση στις ερωτήσεις κατανόησης. Επίσης, οι τύποι της παραγράφου 7.6 να μην απομνημονευθούν.

### §7.7

Προτείνεται να γίνουν τα δύο προβλήματα της σελίδας 154 και να δοθεί έμφαση στις ερωτήσεις κατανόησης 1-3 και στις ασκήσεις εμπέδωσης 3-7. Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα, σελ. 157.

### §7.8

Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα, σελ. 163.

Να μη γίνουν οι γενικές ασκήσεις του κεφαλαίου.

## Κεφάλαιο 8°

(Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες).

### §8.1-8.2

A) Επειδή είναι το 1ο Κεφάλαιο της Β΄ Λυκείου ίσως χρειασθεί, κατά την κρίση του διδάσκοντος, να γίνει μία γρήγορη επανάληψη στις αναλογίες και το Θεώρημα του Θαλή που διδαχθήκαν στην Α΄ Λυκείου.

B) Η εφαρμογή 4 της παραγράφου 8.2 θα χρειασθεί στη συνέχεια για να αποδειχθεί τύπος για το εμβαδόν τριγώνου.

Γ) Το Κεφάλαιο προσφέρεται για τη συζήτηση εφαρμογών που ήδη θίγονται στο σχολικό βιβλίο (μέτρηση ύψους απρόσιτων σημείων, χρήση εξάντα).

Δ) Να μη γίνουν:

- Οι εφαρμογές 1 και 3
- Τα σύνθετα θέματα 1, 2 και 3, σελ. 178.
- Οι γενικές ασκήσεις του Κεφαλαίου.

## Κεφάλαιο 9°

(Προτείνεται να διατεθούν 8 διδακτικές ώρες).

§ 9.1-9.2 (Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες).

A) Στις παραγράφους αυτές η άσκοπη ασκησιολογία αλγεβρικού χαρακτήρα δε συνεισφέρει στην κατανόηση της Γεωμετρίας.

B) Προτείνεται να γίνει το σχόλιο της εφαρμογής ως σύνδεση με την επόμενη παράγραφο.

Γ) Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα 4, 6, σελ. 186.

§ 9.3 (προτείνεται να διατεθεί 1 ώρα):

Στην παράγραφο αυτή είναι σκόπιμο να διατεθεί χρόνος ώστε να σχολιαστεί το ιστορικό σημείωμα για την ανακάλυψη των ασύμμετρων μεγεθών και να γίνουν και οι 3 κατασκευές (υποτεινούσα και κάθετη πλευρά ορθογωνίου τριγώνου, μέση ανάλογος, άρρητα πολλαπλάσια ευθύγραμμου τμήματος που δίνουν και τον τρόπο κατασκευής ευθυγράμμων τμημάτων με μήκος τετραγωνική ρίζα φυσικού – αφορμή για μία σύντομη συζήτηση για τη δυνατότητα κατασκευής ή μη των αρρήτων).

§9.4-9.5 (Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες).

A) Στην παράγραφο 9.4 προτείνεται να μην αναλωθεί επιπλέον διδακτικός χρόνος για άσκοπη ασκησιολογία αλγεβρικού τύπου.

B) Τα θεωρήματα των διαμέσων (παράγραφος 9.5) μπορούν να διδαχθούν ως εφαρμογές των θεωρημάτων της οξείας και αμβλείας γωνίας (χωρίς τις ασκήσεις τους), αφού και η

παράγραφος 9.6 (γεωμετρικοί τόποι) που στηρίζονται στα θεωρήματα των διαμέσων είναι εκτός ύλης.

Γ) Εφαρμογές των θεωρημάτων των διαμέσων υπάρχουν σε ασκήσεις των επόμενων παραγράφων.

Δ) Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα της σελίδας 194.

**§9.7** (Προτείνεται να διατεθούν  $\approx 2$  διδακτικές ώρες).

A) Προτείνεται να δοθεί έμφαση στην 3η εφαρμογή και στο σχόλιό της (κατασκευή χρυσής τομής, ο λόγος φ).

B) Από τις ασκήσεις μία επιλογή θα μπορούσε να είναι η εξής:

- Οι ερωτήσεις κατανόησης.
- Από τις ασκήσεις εμπέδωσης οι 1 και 4
- Από τις αποδεικτικές οι 1 και 3.

Γ) Τα σύνθετα θέματα θα μπορούσαν να εξαιρεθούν από την ύλη καθώς και οι γενικές ασκήσεις.

Δ) Η δραστηριότητα 2 σελ. 205 θα μπορούσε να συνεισφέρει στην κατανόηση της 1-1 αντιστοιχίας μεταξύ των σημείων της ευθείας και των πραγματικών αριθμών.

E) Να μη γίνουν:

- Τα σύνθετα θέματα 3, 4, σελ. 204
- Οι γενικές ασκήσεις του Κεφαλαίου.

## **Κεφάλαιο 10°**

(Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες).

**§10.1-10.3** (Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες).

A) Οι διαθέσιμες ώρες αυξάνονται προκειμένου να γίνουν:

- Οι 3 εφαρμογές (με την παρατήρηση της 2)
- Οι 2 δραστηριότητες των σελ. 215 και 217.

B) Θα μπορούσε να γίνει η απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος μέσω εμβαδών, όπως παρατίθεται στα στοιχεία του Ευκλείδη και αναφέρεται στο ιστορικό σημείωμα της σελ. 228.

Γ) Προτεινόμενες ασκήσεις:

- Οι ερωτήσεις κατανόησης
- Από τις ασκήσεις εμπέδωσης οι 3 και 6
- Από τις αποδεικτικές ασκήσεις οι 1, 4, 7 και 8.

Δ) Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα 1 και 5, σελ. 218.

**§10.4** (Προτείνεται να διατεθούν 1 διδακτική ώρα).

A) Να μη γίνει ο τύπος του Ήρωνα και οι αντίστοιχες ασκήσεις (αλλά να εξηγηθεί ο συμβολισμός της ημιπεριμέτρου).

B) Μία επιλογή ασκήσεων θα μπορούσε να είναι:

- Οι ερωτήσεις κατανόησης 1 και 2.
- Από τις ασκήσεις εμπέδωσης οι 3 και 4.
- Από τις αποδεικτικές οι 1, 3 και 5.

Γ) Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα 1, 2, σελ. 221.

**§10.5** (Προτείνεται να διατεθεί 1 διδακτική ώρα).

Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα της σελίδας 225.

## **Κεφάλαιο 11°**

(Προτείνεται να διατεθούν 8 διδακτικές ώρες).

**§11.1-11.2** (Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες).

A) Στην παράγραφο 11.1 μπορεί να γίνει μία υπενθύμιση της έννοιας του κυρτού πολυγώνου και των στοιχείων του, όπως αναφέρεται στην παράγραφο 2.20 που είναι εκτός της ύλης της Α΄ Λυκείου.

B) Προτείνεται να γίνει η παρατήρηση και το σχόλιο της σελ.236 (που χρειάζονται για την επόμενη παράγραφο).

Γ) Μπορεί να γίνει μία αναφορά στο ρόλο των κανονικών πολυγώνων στη φύση, την τέχνη και τις επιστήμες (βιβλίο καθηγητή για επέκταση της αποδεικτικής άσκησης 1 σελ. 237 και συσχέτιση με τη διακόσμηση με κανονικά πολύγωνα).

Δ) Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα των σελίδων 237 – 238.

**§11.3** (Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες).

A) Βάσει του σχολίου και της παρατήρησης της σελίδας 236 της προηγούμενης παραγράφου, οι μαθητές μπορούν μόνοι τους να οδηγηθούν στην εγγραφή των βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο, όπως προτείνεται και στο βιβλίο του καθηγητή.

B) Προτείνεται να δοθεί έμφαση στην εφαρμογή 1 και στη συνέχεια να γίνει η δραστηριότητα 1 σελ. 242.

Γ) Να μη γίνουν:

- Οι εφαρμογές 2, 3 της παραγράφου 11.3.
- Τα σύνθετα θέματα της σελίδας 242.

**§11.4-11.5** (Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες).

A) Οι παράγραφοι αυτοί μπορούν να προετοιμάσουν τους μαθητές που θα ακολουθήσουν τη θετική κατεύθυνση για την εισαγωγή στις άπειρες διαδικασίες με φυσιολογικό τρόπο.

B) Να μη γίνει το σύνθετο θέμα 2 της σελίδας 245.

**§11.6-11.7** (Προτείνεται να διατεθεί 1 διδακτική ώρα).

Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα της σελίδας 251.



### 3.Μαθηματικά Θετικής –Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Μάθημα επιλογής Β΄ Ημερησίου και Γ΄ Εσπερινού Επαγγελματικού Λυκείου

#### I. Διδακτέα ύλη

Από το βιβλίο «Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Β΄ Τάξης Γενικού Λυκείου» των Αδαμόπουλου Λ., Βισκαδουράκη Β., Γαβαλά Δ., Πολύζου Γ. και Σβέρκου Α., (έκδοση 2012).

##### **Κεφ. 1<sup>ο</sup>: Διανύσματα**

- 1.1. Η Έννοια του Διανύσματος
- 1.2. Πρόσθεση και Αφαίρεση Διανυσμάτων
- 1.3. Πολλαπλασιασμός Αριθμού με Διάνυσμα (χωρίς τις Εφαρμογές 1 και 2 στις σελ. 25-26)
- 1.4. Συντεταγμένες στο Επίπεδο (χωρίς την Εφαρμογή 2 στη σελ. 35)
- 1.5. Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

##### **Κεφ. 2<sup>ο</sup>: Η Ευθεία στο Επίπεδο**

- 2.1. Εξίσωση Ευθείας
- 2.2. Γενική Μορφή Εξίσωσης Ευθείας
- 2.3. Εμβαδόν Τριγώνου (χωρίς τις αποδείξεις των τύπων της απόστασης σημείου από ευθεία, του εμβαδού τριγώνου και της Εφαρμογής 1 στη σελ. 73)

##### **Κεφ. 3<sup>ο</sup>: Κωνικές Τομές**

- 3.1. Ο Κύκλος (χωρίς τις παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου)
- 3.2. Η Παραβολή (χωρίς την απόδειξη της εξίσωσης της παραβολής, την απόδειξη του τύπου της εφαπτομένης και την Εφαρμογή 1 στη σελ. 96)
- 3.3. Η Έλλειψη (χωρίς την απόδειξη της εξίσωσης της έλλειψης, τις παραμετρικές εξισώσεις της έλλειψης, την Εφαρμογή στη σελ. 107, την Εφαρμογή 1 στη σελ. 109 και την Εφαρμογή 2 στη σελ. 110)
- 3.4. Η Υπερβολή (χωρίς την απόδειξη της εξίσωσης της υπερβολής και την απόδειξη του τύπου των ασυμπτώτων)
- 3.5. Μόνο η υποπαράγραφος «σχετική θέση ευθείας και κωνικής» και σύμφωνα με την προτεινόμενη διαχείριση.

##### **Κεφ. 4<sup>ο</sup>: Θεωρία Αριθμών**

- 4.1. Η Μαθηματική Επαγωγή

#### II. Διαχείριση διδακτέας ύλης

**Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup>** (Προτείνεται να διατεθούν 17 διδακτικές ώρες).

Ειδικότερα για την §1.5 προτείνονται τα εξής:

A) Μετά τη διδασκαλία της υποπαραγράφου «Προβολή διανύσματος σε διάνυσμα» να δοθεί και να συζητηθεί η ερώτηση κατανόησης 13 της σελίδας 54, με σκοπό να κατανοήσουν οι μαθητές:

- ✓ Το ρόλο της προβολής διανύσματος σε διάνυσμα κατά τον υπολογισμό του εσωτερικού γινομένου αυτών.
- ✓ Ότι δεν ισχύει η ιδιότητα της διαγραφής στο εσωτερικό γινόμενο.

B) Προτείνεται να μη γίνουν οι ασκήσεις:

- 8, 9 και 10 της Α΄ Ομάδας (σελ. 47-48).
- Οι ασκήσεις 1, 3 και 10 της Β΄ Ομάδας (σελ. 48-50).
- Οι Γενικές Ασκήσεις (σελ. 50-51).

**Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup>** (Προτείνεται να διατεθούν 10 διδακτικές ώρες).

Ειδικότερα για την §2.3 προτείνονται τα εξής:

A) Πριν δοθούν οι τύποι της απόστασης σημείου από ευθεία και του εμβαδού τριγώνου, προτείνεται να δοθούν στους μαθητές να επεξεργαστούν δραστηριότητες, όπως οι παρακάτω δύο:

1<sup>η</sup>: Δίνονται η ευθεία  $\varepsilon: x - y + 1 = 0$  και το σημείο  $A(5, 2)$ . Να βρεθούν:

α) Η εξίσωση της ευθείας  $\zeta$  που διέρχεται από το  $A$  και είναι κάθετη στην  $\varepsilon$ .

β) Οι συντεταγμένες του σημείου τομής της  $\zeta$  με την  $\varepsilon$ .

γ) Η απόσταση του  $A$  από την  $\varepsilon$ .

Στη συνέχεια, να δηλωθεί στους μαθητές ότι με ανάλογο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ο τύπος απόστασης ενός σημείου από μία ευθεία, ο οποίος και να δοθεί.

2<sup>η</sup>: Δίνονται τα σημεία  $A(5, 2)$ ,  $B(2, 3)$  και  $B(3, 4)$ . Να βρεθούν:

α) Η εξίσωση της ευθείας  $B\Gamma$ .

β) Το ύψος  $AD$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  και

γ) Το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

Στη συνέχεια, να δηλωθεί στους μαθητές ότι με ανάλογο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ο τύπος του εμβαδού τριγώνου του οποίου είναι γνωστές οι συντεταγμένες των κορυφών.

B) Προτείνεται να μη γίνουν:

➤ Η άσκηση 7 της Β' Ομάδας (σελ. 76).

➤ Από τις Γενικές Ασκήσεις οι 3, 4, 5, 6 και 7 (σελ. 76-77).

**Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup>** (Προτείνεται να διατεθούν 20 διδακτικές ώρες).

Ειδικότερα για τις §3.2, 3.3 και 3.5 προτείνονται τα εξής:

**§3.2 A)** Πριν δοθεί ο τύπος της εξίσωσης της παραβολής, προτείνεται να λυθεί ένα πρόβλημα εύρεσης εξίσωσης παραβολής της οποίας δίνεται η εστία και η διευθετούσα. Για παράδειγμα της παραβολής με εστία το σημείο  $E(1,0)$  και διευθετούσα την ευθεία  $\delta: x = -1$ . Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τη βασική ιδέα της απόδειξης.

B) Προτείνονται οι ασκήσεις 4-8 να γίνουν για συγκεκριμένη τιμή του  $p$ , π.χ. για  $p = 2$

**§3.3 A)** Πριν δοθεί ο τύπος της εξίσωσης της έλλειψης, προτείνεται να λυθεί ένα πρόβλημα εύρεσης εξίσωσης έλλειψης της οποίας δίνονται οι εστίες και το σταθερό άθροισμα  $2a$ . Για παράδειγμα της έλλειψης με εστίες τα σημεία  $E'(-4,0)$ ,  $E(4,0)$  και  $2a = 10$ .

B) Προτείνεται να μη δοθεί έμφαση σε ασκήσεις που αναλώνονται σε πολλές πράξεις, όπως είναι, για παράδειγμα, οι ασκήσεις 3 και 5 της Β' Ομάδας (σελ. 112 – 113)

**§3.5** Από την παράγραφο αυτή θα διδαχθεί μόνο η υποπαράγραφος «Σχετική θέση ευθείας και κωνικής» και για κωνικές της μορφής των παραγράφων 3.1 – 3.4. Έτσι, οι μαθητές θα γνωρίσουν την αλγεβρική ερμηνεία του γεωμετρικού ορισμού της εφαπτομένης των κωνικών τομών και γενικότερα της σχετικής θέσης ευθείας και κωνικής τομής.

**Κεφάλαιο 4<sup>ο</sup>** (Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες).

**§4.1** Η Μαθηματική Επαγωγή αποτελεί βασική αποδεικτική μέθοδο την οποία πρέπει να γνωρίζουν οι μαθητές που στρέφονται προς τις θετικές σπουδές.

## 4. Μαθηματικά Ι

### Γ΄ Τάξη Ημερήσιου και Δ΄ τάξη εσπερινού ΕΠΑ.Λ.

#### Ι. Διδακτέα ύλη

Από το βιβλίο “Μαθηματικά”, Α΄ τάξης του 2ου Κύκλου των Τ.Ε.Ε. (Π. Βλάμος, Α. Δούναβης, Δ. Ζέρβας), έκδοση 2012

A/A	Κεφάλαιο / Περιεχόμενο	Σελίδες ( από ... έως)
1	Κεφ. 2: Περιγραφική Στατιστική	
	Παράγρ. 2.1, 2.2, 2.3 (χωρίς την κατανομή συχνοτήτων σε κλάσεις άνισου πλάτους στις σελ. 75-76) Παράγρ. 2.4 και 2.5 (εκτός της μέσης απόλυτης απόκλισης στις σελίδες 84 – 86) Παράγρ. 2.6 Εξαιρούνται οι Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου στη σελ.102.	59- 102
2	Κεφ. 3: Όριο - Συνέχεια Συνάρτησης	
	Α. Παράγρ. 3.1, 3.2, 3.3 Παράγρ. 3.4 (μόνο μελέτη απροσδιόριστης μορφής 0/0 για ρητές συναρτήσεις καθώς και για τα ριζικά μόνο την πρώτη περίπτωση του πίνακα συζυγών παραστάσεων της σελ. 115). Εξαιρούνται οι εφαρμογές: 1β και 1γ στις σελίδες 118 και 119, 4δ στις σελίδες 122 και 123, 5 στις σελ. 123 και 124, 6 στις σελίδες 124 και 125, και 7 στις σελίδες 125 και 126.	107-132
	Β. Παράγρ. 3.6, 3.7, 3.8 και 3.9. Εξαιρούνται οι εφαρμογές : 2 στις σελίδες 142 και 143, 5 στη σελ.145 και 7 στις σελίδες 147 και 148.	133-151
3	Κεφ. 4: Στοιχεία Διαφορικού Λογισμού	
	Α. Παράγρ. 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 και 4.6.	173 - 200
	Β. Παράγρ. 4.8 και 4.9.	210 - 222
4	Κεφ. 5: Στοιχεία Ολοκληρωτικού Λογισμού	
	Παράγρ. 5.1, 5.2, 5.3 και 5.4. Εξαιρούνται οι εφαρμογές: 7 και 8 στις σελίδες 238 και 239, 9 και 10 στις σελίδες 246 και 247, οι ασκήσεις 1, 2, 3, 4 στις σελίδες 249 και 250, η απόδειξη του τύπου της παραγοντικής ολοκλήρωσης στη σελ. 242 και οι Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου στις σελ.258-261.	231 -258

#### Γενική Παρατήρηση:

Α) Οι εφαρμογές και τα παραδείγματα του βιβλίου μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως προτάσεις για τη λύση ασκήσεων ή την απόδειξη άλλων προτάσεων.

Β) Εφαρμογές και ασκήσεις που αναφέρονται σε όρια στο άπειρο, καθώς και σε παραγράφους ή τμήματα παραγράφων που έχουν εξαιρεθεί, δεν αποτελούν μέρος της εξεταστέας ύλης.

#### II. Διδακτική διαχείριση

#### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΠΙΝΑΚΕΣ – ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Το κεφάλαιο αυτό δε θα διδαχθεί.

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ (Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 22 διδακτικές ώρες.)**

Με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται οι μαθητές:

- Να γνωρίζουν τις διαδοχικές φάσεις μίας στατιστικής έρευνας
- Να γνωρίζουν τις βασικές έννοιες της Περιγραφικής Στατιστικής και να χρησιμοποιούν σωστά τη σχετική ορολογία.
- Να μπορούν να διαβάσουν και να κατασκευάσουν πίνακες κατανομής συχνοτήτων.
- Να μπορούν να διαβάζουν τις διάφορες μορφές των γραφικών παραστάσεων κατανομών συχνοτήτων.
- Να μπορούν να παριστάνουν γραφικά μία κατανομή συχνοτήτων.
- Να γνωρίζουν και να μπορούν να υπολογίζουν:
  - ✓ τις παραμέτρους θέσης μίας κατανομής συχνοτήτων και
  - ✓ τις παραμέτρους διασποράς μίας κατανομής συχνοτήτων.

Μεγάλο μέρος του περιεχομένου της ενότητας της Περιγραφικής Στατιστικής έχει διδαχθεί στο Γυμνάσιο. Εδώ γίνεται συστηματικότερη παράσταση και συμπλήρωση των σχετικών εννοιών.

Για να μην καθυστερεί η διδασκαλία, οι στατιστικοί πίνακες και τα διαγράμματα κρίνεται σκόπιμο να ετοιμάζονται σε φωτοτυπίες ή διαφάνειες πριν από το μάθημα. Αν αυτό δεν είναι εφικτό, συνιστάται να γίνεται επεξεργασία τους μέσα από το βιβλίο.

Να καταβληθεί προσπάθεια με κατάλληλα παραδείγματα να κατανοήσουν οι μαθητές τις έννοιες πληθυσμός, μεταβλητή και δείγμα. Είναι σημαντικό να αναγνωρίζουν οι μαθητές τη χρησιμότητα του δείγματος από το οποίο μπορούν να προκύψουν αξιόπιστες πληροφορίες για ολόκληρο τον πληθυσμό.

### **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**

Κατά τη διδασκαλία του 2<sup>ου</sup> κεφαλαίου

- Από την παράγραφο 2.3 δε θα διδαχθεί η κατανομή συχνοτήτων σε κλάσεις άνισου πλάτους στις σελ. 75-76.
- Από την παράγραφο 2.5 δε θα διδαχθεί η μέση απόλυτη απόκλιση στις σελίδες 84 – 86.
- Δε θα διδαχθούν οι Γενικές Ασκήσεις του Κεφαλαίου.

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΟΡΙΟ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 28 διδακτικές ώρες.)**

Με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται οι μαθητές:

- Να μπορούν να βρίσκουν το όριο μίας συνάρτησης στο  $x_0$ , όταν δίνεται η γραφική της παράσταση.
- Να γνωρίζουν τις βασικές ιδιότητες του ορίου συνάρτησης και με τη βοήθειά του να υπολογίζουν το όριο πολλών συναρτήσεων.
- Να κατανοήσουν την έννοια της συνέχειας συνάρτησης σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της.

Η έννοια του ορίου συνάρτησης στο  $x_0$ , εισάγεται είτε εποπτικά με την βοήθεια της γραφικής παράστασης, είτε με παρατήρηση κατάλληλου πίνακα τιμών της συνάρτησης. Τόσο τα σχήματα όσο και οι πίνακες, για οικονομία χρόνου, να δίδονται στους μαθητές είτε με διαφάνειες, είτε με φωτοτυπίες ή ακόμα να γίνονται οι παρατηρήσεις μέσα από ανοικτά βιβλία.

Η διδασκαλία του ορίου **δεν αποτελεί αυτοσκοπό** αλλά στοχεύει στην προετοιμασία για την εισαγωγή στις έννοιες της παραγώγου και του ολοκληρώματος. Δεν θα γίνουν ασκήσεις που αναφέρονται στις περιπτώσεις 2 και 3 του πίνακα συζυγών παραστάσεων της σελίδας 115.

Η έννοια της συνέχειας συνάρτησης εισάγεται εποπτικά και ακολουθεί ο ορισμός με την βοήθεια του ορίου.

Διευκρινίζεται ότι στην αρχή του κεφαλαίου αυτού πρέπει να γίνει μία επανάληψη στην έννοια της συνάρτησης, με επιδίωξη οι μαθητές να μπορούν:

- να βρίσκουν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης
- να σχεδιάζουν τις γραφικές παραστάσεις των βασικών συναρτήσεων ( $ax$ ,  $ax^2$ ,  $a/x$ , ημ, συν, εφ,  $e^x$ ,  $\ln x$ )
- από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης να βρίσκουν την τιμή της  $s'$  ένα σημείο  $x_0$ , τη μονοτονία της κατά διαστήματα και τα ακρότατα.
- να βρίσκουν το άθροισμα, το γινόμενο και το πηλίκο απλών συναρτήσεων.

**Επειδή οι μαθητές δεν έχουν διδαχθεί την έννοια της σύνθετης συνάρτησης, θα πρέπει ο διδάσκων να αφιερώσει τον αναγκαίο χρόνο για την κατανόηση της έννοιας αυτής πριν τη διδασκαλία του θεωρήματος της συνέχειας σύνθετης συνάρτησης, σελ. 141.**

#### **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**

Κατά τη διδασκαλία του 3<sup>ου</sup> κεφαλαίου

- Από την παράγρ. 3.4 θα διδαχθεί **μόνο** η μελέτη απροσδιόριστης μορφής 0/0 για ρητές συναρτήσεις καθώς και για τα ριζικά μόνο η πρώτη περίπτωση του πίνακα συζυγών παραστάσεων της σελ. 115.
- Δε θα διδαχθούν οι παράγραφοι 3.5, 3.10 και 3.11.
- Δε θα διδαχθούν οι εφαρμογές: 1β και 1γ στις σελίδες 118 και 119, 4δ στις σελίδες 122 και 123, 5 στις σελ. 123 και 124, 6 στις σελίδες 124 και 125, 7 στις σελίδες 125 και 126, 2 στις σελίδες 142 και 143, 5 στη σελ.145, και 7 στις σελίδες 147 και 148.

#### **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ (Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 40 διδακτικές ώρες.)**

Με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται οι μαθητές:

- Να κατανοήσουν την έννοια της παραγώγου σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης και να την ερμηνεύουν ως ρυθμό μεταβολής.
- Να γνωρίζουν του κανόνες παραγωγίσις βασικών συναρτήσεων.
- Να μπορούν να προσδιορίζουν τα διαστήματα στα οποία μία συνάρτηση είναι σταθερή, γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.
- Να μπορούν να βρίσκουν τα ακρότατα (αν υπάρχουν) μίας συνάρτησης.

Για την εύρεση του ρυθμού μεταβολής να χρησιμοποιηθούν παραδείγματα από τη μέτρηση στερεών έτσι, ώστε οι μαθητές να επαναλάβουν τους αντίστοιχους τύπους. Να λυθούν προβλήματα στα οποία να ζητείται το μέγιστο ή το ελάχιστο μιας συνάρτησης.

Να γίνουν πολλές εφαρμογές του Διαφορικού Λογισμού τόσο στην Γεωμετρία, όσο και σε άλλες επιστήμες.

Διευκρινίζεται ότι:

α) Στην Παράγραφο **4.4**, η παράγωγος σύνθετης συνάρτησης αποτελεί μέρος της διδακτέας και εξεταστέας ύλης. Δηλαδή, **δεν εξαιρείται** ο κανόνας της αλυσίδας.

β) Η παράγραφος **4.6** της παράγουσας συνάρτησης να διδαχθεί μαζί με τα ολοκληρώματα (Αν μείνει στη θέση της, θα ξεχαστεί από τους μαθητές, αφενός γιατί ακολουθούν η μονοτονία και τα ακρότατα που είναι ιδιαίτερης βαρύτητας, αφετέρου επειδή δεν υπάρχουν ασκήσεις στο σχολικό βιβλίο που να υποστηρίζουν τη διδασκαλία της.)

β) Στην Παράγραφο **4.9**, το κριτήριο της 2ης παραγώγου αποτελεί μέρος της διδακτέας και εξεταστέας ύλης.

Με τη διδασκαλία του κριτηρίου της 2ης παραγώγου, προσφέρεται στους μαθητές η δυνατότητα να χρησιμοποιούν εναλλακτικούς τρόπους για την εύρεση των ακρότατων της συνάρτησης.

#### **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**

**Δε θα διδαχθεί η παράγραφος 4.7.**

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ (Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 35 διδακτικές ώρες.)**

Με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται οι μαθητές:

- Να κατανοήσουν την έννοια της παράγουσας ή αρχικής συνάρτησης.
- Να κατανοήσουν την έννοια και τις ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.
- Να υπολογίζουν ολοκληρώματα διαφόρων συναρτήσεων.
- Να μπορούν να υπολογίζουν το ολοκλήρωμα για την επίλυση διάφορων προβλημάτων και για τον υπολογισμό εμβαδών.

Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων θα γίνεται με την ανακάλυψη της παράγουσας ή με την παραγοντική ολοκλήρωση.

Να λυθούν προβλήματα στα οποία δίνεται ο ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους ως προς ένα άλλο και ζητείται η συνάρτηση που εκφράζει τη σχέση των δύο μεγεθών.

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**

Κατά τη διδασκαλία του 5<sup>ου</sup> κεφαλαίου

**Δε θα διδασχθούν:**

- Η απόδειξη του τύπου της παραγοντικής ολοκλήρωσης στη σελ. 242.
- Οι εφαρμογές: 7 και 8 στις σελίδες 238 και 239, 9 και 10 στις σελίδες 246 και 247.
- Οι ασκήσεις 1, 2, 3, 4 στις σελίδες 249 και 250.
- Οι Γενικές Ασκήσεις του Κεφαλαίου.

**Γενική Παρατήρηση:**

Εφαρμογές και ασκήσεις που αναφέρονται σε όρια στο άπειρο καθώς και σε παραγράφους ή τμήματα παραγράφων που έχουν εξαιρεθεί **δεν** αποτελούν μέρος της εξεταστέας ύλης.

## 5 . Μαθηματικά II – Γ΄ ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΠΑ.Λ. Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης

### I. Εισαγωγή

Η ύλη στα Μαθηματικά κατεύθυνσης Γ' Επαγγελματικού Λυκείου, στο μεγαλύτερο μέρος της, αποτελεί μια εισαγωγή των μαθητών στις βασικές έννοιες της Μαθηματικής Ανάλυσης. Όπως έχει προκύψει από διεθνείς έρευνες αλλά και από έρευνες που έχουν γίνει στη χώρα μας, οι μαθητές αντιμετωπίζουν σημαντικά προβλήματα στην κατανόηση των εννοιών της Ανάλυσης.

Ο σχηματισμός σωστών εικόνων για μια μαθηματική έννοια αποτελεί αναγκαία προϋπόθεση για την κατανόηση της. Οι προτάσεις που ακολουθούν έχουν ως στόχο τη σωστή διαισθητική κατανόηση των βασικών εννοιών και των βασικών θεωρημάτων, με την ανάπτυξη σωστών εικόνων και αντιλήψεων, καθώς και την ανάπτυξη δεξιοτήτων για τη λύση προβλημάτων.

### II. Διδακτέα ύλη

Από το βιβλίο «Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης» Γ΄ Τάξης Γενικού Λυκείου των Ανδρεαδάκη Στ., κ.α., έκδοση 2012

#### ΜΕΡΟΣ Α

##### Κεφ. 2<sup>ο</sup> : Μιγαδικοί αριθμοί

- 2.1. Η έννοια του Μιγαδικού Αριθμού
- 2.2. Πράξεις στο σύνολο  $C$  των Μιγαδικών
- 2.3. Μέτρο Μιγαδικού Αριθμού

#### ΜΕΡΟΣ Β

##### Κεφ. 1<sup>ο</sup> : Όριο - Συνέχεια συνάρτησης

- 1.1. Πραγματικοί αριθμοί
- 1.2. Συναρτήσεις.
- 1.3. Μονότονες συναρτήσεις - Αντίστροφη συνάρτηση.
- 1.4. Όριο συνάρτησης στο  $x_0 \in \mathbb{R}$
- 1.5. Ιδιότητες των ορίων (χωρίς τις αποδείξεις της υποπαραγράφου: «Τριγωνομετρικά όρια»)
- 1.6. Μη πεπερασμένο όριο στο  $x_0 \in \mathbb{R}$
- 1.7. Όριο συνάρτησης στο άπειρο
- 1.8. Συνέχεια συνάρτησης

##### Κεφ. 2<sup>ο</sup>: Διαφορικός Λογισμός

- 2.1. Η έννοια της παραγώγου (χωρίς την υποπαραγράφο: «Κατακόρυφη εφαπτομένη»).
- 2.2. Παραγωγίσιμες συναρτήσεις - Παράγωγος συνάρτησης.
- 2.3. Κανόνες παραγωγίσιμης, χωρίς την απόδειξη του θεωρήματος που αναφέρεται στην παράγωγο γινομένου συναρτήσεων.
- 2.4. Ρυθμός μεταβολής.
- 2.5. Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού.
- 2.6. Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.
- 2.7. Τοπικά ακρότατα συνάρτησης, χωρίς το θεώρημα της σελίδας 264 («Κριτήριο της 2ης παραγώγου»).
- 2.8. Κυρτότητα-Σημεία καμπής συνάρτησης (Θα μελετηθούν μόνο οι συναρτήσεις που είναι δύο, τουλάχιστον, φορές παραγωγίσιμες στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού τους).
- 2.9. Ασύμπτωτες - Κανόνες De l' Hospital.

2.10. Μελέτη και χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.

### **Κεφ. 3<sup>ο</sup>: Ολοκληρωτικός Λογισμός**

- 3.1. Αόριστο ολοκλήρωμα (Μόνο η υποπαράγραφος «Αρχική συνάρτηση», που θα συνοδεύεται από πίνακα παραγουσών συναρτήσεων ο οποίος περιλαμβάνεται στην προτεινόμενη διδακτική διαχείριση).
- 3.4. Ορισμένο ολοκλήρωμα.
- 3.5. Η συνάρτηση  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ .
- 3.7. Εμβαδόν επίπεδου χωρίου (χωρίς την εφαρμογή 3 της σελίδας 348).

#### **Παρατηρήσεις:**

1. Τα θεωρήματα, οι προτάσεις, οι αποδείξεις και οι ασκήσεις που φέρουν αστερίσκο δε διδάσκονται και δεν εξετάζονται.
2. Οι εφαρμογές και τα παραδείγματα των βιβλίων δεν εξετάζονται ούτε ως θεωρία ούτε ως ασκήσεις. Μπορούν, όμως, να χρησιμοποιηθούν ως προτάσεις για τη λύση ασκήσεων ή την απόδειξη άλλων προτάσεων.
3. Εξαιρούνται από την διδακτέα - εξεταστέα ύλη οι εφαρμογές και οι ασκήσεις που αναφέρονται σε λογαρίθμους με βάση διαφορετική του  $e$  και του 10.

## **II. Διαχείριση διδακτέας ύλης**

### **ΜΕΡΟΣ Α΄: Άλγεβρα**

**Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup>** (Προτείνεται να διατεθούν 12 διδακτικές ώρες)

Ειδικότερα:

**§2.1 - §2.2** (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)

**§2.3** (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες).

Κατά τη διδασκαλία των τριών παραπάνω παραγράφων προτείνεται να δοθεί έμφαση στη γεωμετρική ερμηνεία των μιγαδικών αριθμών και των ιδιοτήτων τους σε συνδυασμό με γνώσεις από τα μαθηματικά κατεύθυνσης της Β' Λυκείου και την Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Οι δύο (2) ώρες που απομένουν από τον συνολικό αριθμό των προτεινόμενων ωρών να διατεθούν για ασκήσεις από το σύνολο του κεφαλαίου.

### **ΜΕΡΟΣ Β΄: Ανάλυση**

**Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup>** (Προτείνεται να διατεθούν 33 διδακτικές ώρες).

Ειδικότερα:

**§1.1** (Προτείνεται να διατεθεί 1 διδακτική ώρα).

Το περιεχόμενο της παραγράφου αυτής είναι σημείο αναφοράς για τα επόμενα. Οι περισσότερες από τις έννοιες που περιέχονται είναι ήδη γνωστές στους μαθητές. Γι' αυτό η διδασκαλία δεν πρέπει να στοχεύει στην εξ' ύπαρξης αναλυτική παρουσίαση γνωστών εννοιών, αλλά στο να δίνει "αφορμές" στους μαθητές να ανατρέχουν στα βιβλία των προηγούμενων τάξεων και να επαναφέρουν στη μνήμη τους γνωστές έννοιες και προτάσεις που θα τις χρειαστούν στα επόμενα.

**§1.2** (Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες).

Να δοθεί έμφαση στις έννοιες της ισότητας και της σύνθεσης συναρτήσεων και στη χρήση και ερμηνεία των γραφικών παραστάσεων.

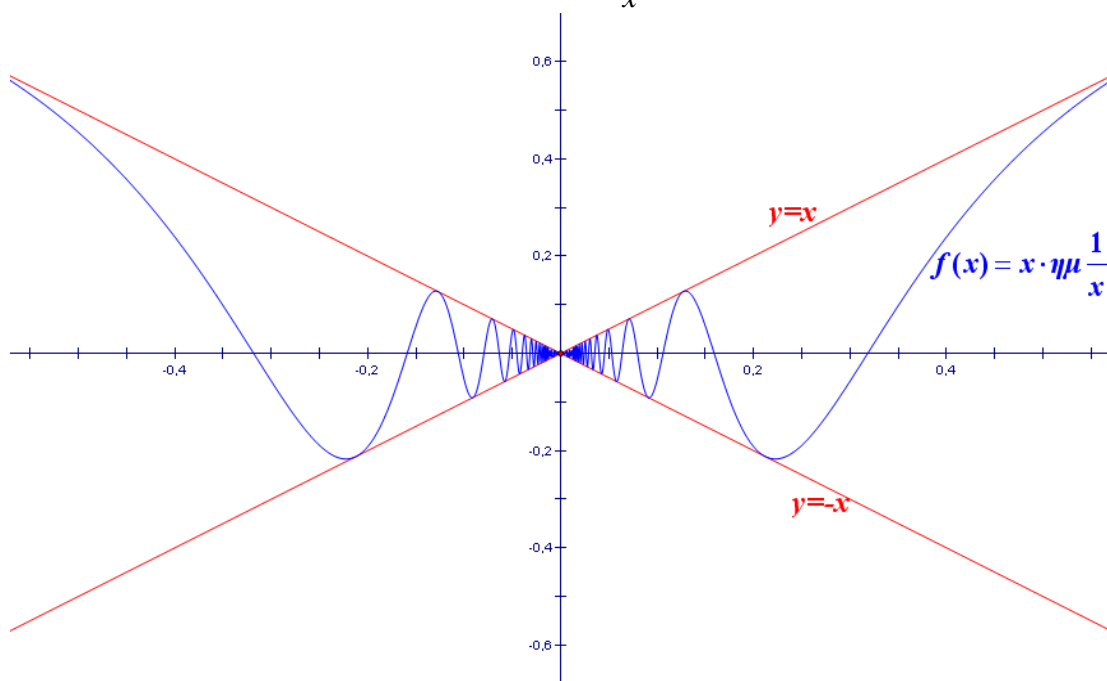
**§1.3** (Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες).



- α) Να γίνουν ασκήσεις ελέγχου της ιδιότητας 1-1 μέσα από γραφήματα.  
 β) Στην άσκηση 3 (σελ. 156) να μελετηθεί η μονοτονία των συναρτήσεων που δίδονται οι γραφικές τους παραστάσεις. Να γίνουν και άλλες τέτοιου τύπου ασκήσεις.

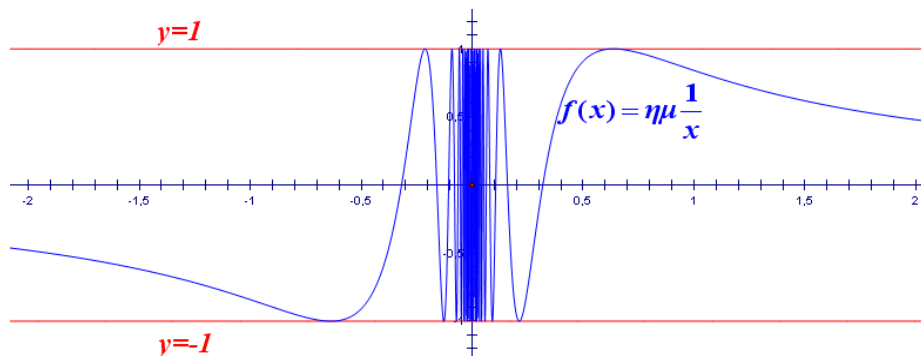
**§1.4** (Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες).

Με δεδομένο ότι ο τυπικός ορισμός του ορίου (σελ. 161) δεν συμπεριλαμβάνεται στην ύλη, να δοθεί βάρος στη διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του ορίου. Δηλαδή, να γίνει προσπάθεια, μέσα από γραφικές παραστάσεις κατάλληλων συναρτήσεων, να αποκτήσουν οι μαθητές μια καλή εικόνα και να αποφευχθούν παρανοήσεις, που από τη βιβλιογραφία έχει προκύψει ότι δημιουργούνται συχνά στους μαθητές, για την έννοια του ορίου. Να τονιστεί ιδιαίτερα, μέσα από κατάλληλες γραφικές παραστάσεις, ότι η συμπεριφορά της συνάρτησης στο σημείο  $x_0$  δεν επηρεάζει το όριο της όταν το  $x$  τείνει στο  $x_0$ , καθώς και ότι η τιμή του  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  καθορίζεται, από τις τιμές που παίρνει η συνάρτηση κοντά στο  $x_0$ . Δηλαδή, δύο συναρτήσεις που έχουν τις ίδιες τιμές σε ένα διάστημα γύρω από το  $x_0$  αλλά μπορεί να διαφέρουν στο  $x_0$  (παίρνουν διαφορετικές τιμές ή η μια ορίζεται και η άλλη δεν ορίζεται ή καμία δεν ορίζεται) έχουν το ίδιο όριο όταν το  $x$  τείνει στο  $x_0$  (σχολικό βιβλίο, σελ. 158-160). Να τονιστεί, επίσης, ότι η ύπαρξη του ορίου δεν συνεπάγεται μονοτονία, κάτι που όπως προκύπτει από τη βιβλιογραφία είναι συνηθισμένη παρανόηση των μαθητών, ούτε όμως και τοπική μονοτονία δεξιά και αριστερά του  $x_0$ , δηλαδή μονοτονία σε ένα διάστημα αριστερά του  $x_0$  και σε ένα διάστημα δεξιά του  $x_0$ . Για το σκοπό αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθούν γραφικές παραστάσεις κατάλληλων συναρτήσεων, που θα σχεδιαστούν με τη βοήθεια λογισμικού, όπως είναι για παράδειγμα η  $f(x) = x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}$  (Σχήμα 1).



Σχήμα 1.

Επίσης, επειδή πολλοί μαθητές θεωρούν ότι όταν ένα όριο δεν υπάρχει τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι διαφορετικά, να δοθούν γραφικά και να συζητηθούν παραδείγματα που δεν υπάρχουν τα πλευρικά όρια, όπως για παράδειγμα η  $f(x) = \eta\mu \frac{1}{x}$  (Σχήμα 2).



Σχήμα 2.

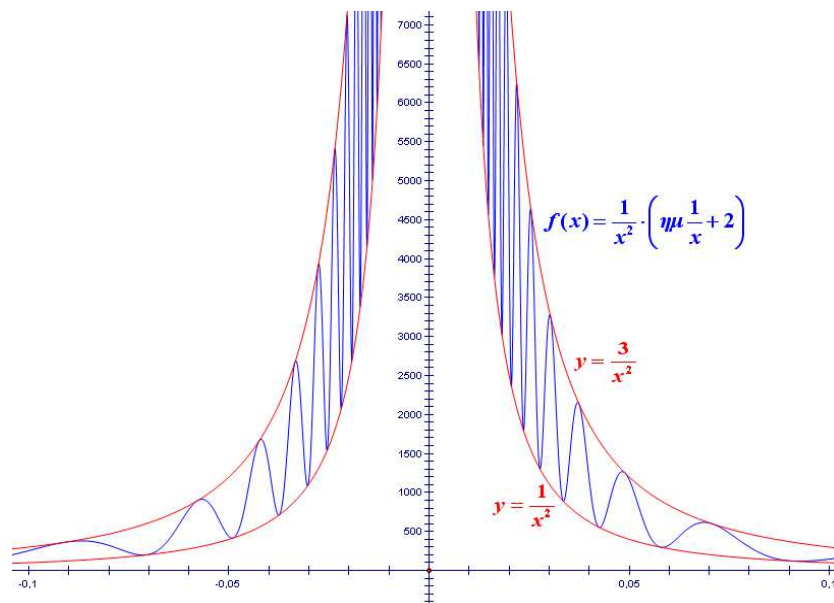
**§1.5** (Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες).

Στην ενότητα αυτή δεν έχει νόημα μια άσκοπη ασκησιολογία που οι μαθητές υπολογίζουν όρια, κάνοντας χρήση αλγεβρικών δεξιοτήτων. Στη λύση των ασκήσεων να ζητείται από τους μαθητές να τονίζουν τις ιδιότητες των ορίων που χρησιμοποιούν, ώστε οι ασκήσεις αυτές να αποκτούν ουσιαστικό περιεχόμενο από πλευράς Ανάλυσης, κάτι που θα βοηθήσει στην ανάπτυξη της κατανόησης από τους μαθητές της έννοιας του ορίου. Για παράδειγμα σε ερωτήσεις όπως «να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8}$ » (άσκηση 3 ι) θα πρέπει να ζητείται από τους μαθητές να αιτιολογήσουν ποιες ιδιότητες των ορίων χρησιμοποιούνται στα ενδιάμεσα στάδια μέχρι τον τελικό υπολογισμό, να προβληματιστούν αν οι  $f(x) = \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8}$  και

$g(x) = \frac{(x^2 + 4) \cdot (x + 2)}{x^2 + 2x + 4}$  είναι ίσες και, αφού διαπιστώσουν ότι δεν είναι ίσες, να δικαιολογήσουν γιατί έχουν ίσα όρια. Επίσης σε ασκήσεις όπου η συνάρτηση ορίζεται με διαφορετικό τύπο σε δύο συνεχόμενα διαστήματα, όπως π.χ. η άσκηση 5 (σελ. 175), να ζητείται αιτιολόγηση γιατί στο σημείο αλλαγής του τύπου είμαστε υποχρεωμένοι να ελέγχουμε τα πλευρικά όρια, ενώ στα άλλα σημεία του πεδίου ορισμού μπορούμε να βρούμε το όριο χρησιμοποιώντας τον αντίστοιχο τύπο. Δηλαδή, να φαίνεται ότι οι μαθητές κατανοούν ότι το όριο καθορίζεται από τις τιμές της συνάρτησης κοντά στο  $x_0$  και εκατέρωθεν αυτού. Αυτό μας επιτρέπει στα σημεία τα διαφορετικά από το  $x_0$  να χρησιμοποιούμε τον ένα τύπο, ενώ στο  $x_0$  πρέπει να πάρουμε πλευρικά όρια.

**§1.6** (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες).

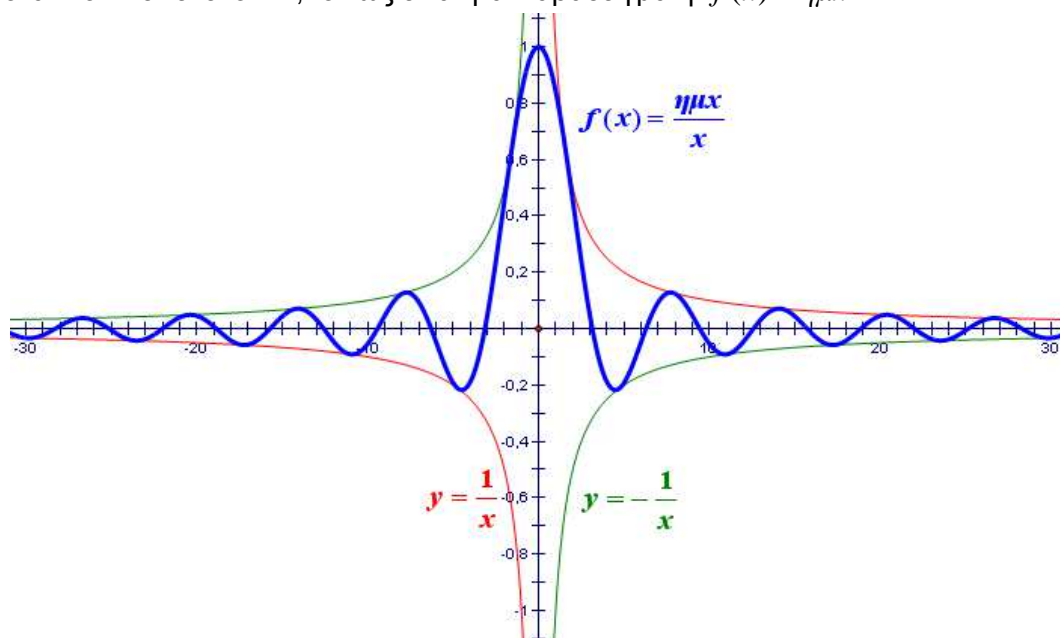
Να δοθεί βάρος στη διαισθητική προσέγγιση της έννοιας με τη χρήση γραφικών παραστάσεων. Εκτός από τα παραδείγματα του βιβλίου να δοθούν, μέσα από κατάλληλες γραφικές παραστάσεις, που θα σχεδιαστούν με τη βοήθεια λογισμικού, παραδείγματα όπου το όριο δεν είναι πεπερασμένο αλλά δεν υπάρχει μονοτονία, όπως π.χ.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2} \cdot \left( \eta\mu \frac{1}{x} + 2 \right)$  (Σχήμα 3), ώστε να αποφευχθεί η παρανόηση που συνδέει την ύπαρξη μη πεπερασμένου ορίου στο  $x_0$  με τη μονοτονία.



Σχήμα 3.

§1.7 (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες).

Να δοθεί βάρος στη διαισθητική προσέγγιση της έννοιας. Να δοθούν, μέσα από κατάλληλες γραφικές παραστάσεις, παραδείγματα συναρτήσεων των οποίων το όριο, όταν το  $x$  τείνει στο  $+\infty$ , υπάρχει αλλά οι συναρτήσεις αυτές δεν είναι μονότονες, όπως είναι για παράδειγμα η  $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$  (Σχήμα 4), καθώς και συναρτήσεων των οποίων το όριο δεν υπάρχει, όταν το  $x$  τείνει στο  $+\infty$ , όπως είναι για παράδειγμα η  $f(x) = \eta\mu x$ .



Σχήμα 4.

Τα όρια:

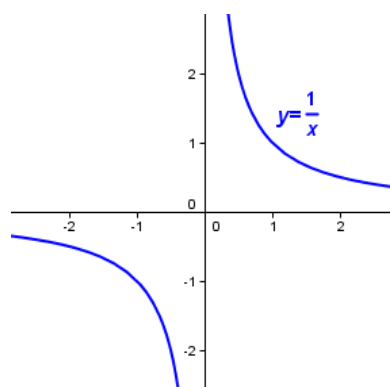
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n}$$

να συζητηθούν με τη χρήση γραφικών παραστάσεων, που θα σχεδιαστούν με τη βοήθεια λογισμικού, και πινάκων τιμών, με στόχο να αντιληφθούν διαισθητικά οι μαθητές ποια είναι τα όρια αυτά.

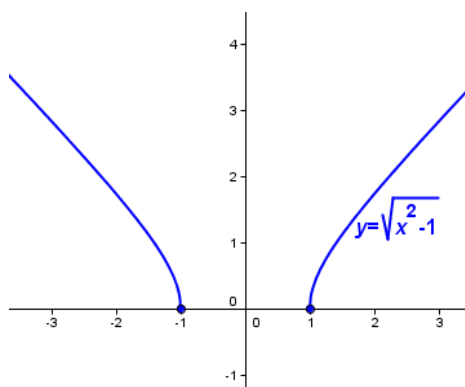
Η τελευταία παράγραφος, πεπερασμένο όριο ακολουθίας, να συζητηθεί γιατί θα χρειαστεί για το ορισμένο ολοκλήρωμα.

**§1.8** (Προτείνεται να διατεθούν 10 διδακτικές ώρες).

Στην πρώτη ενότητα (ορισμός της συνέχειας) να συζητηθούν και γραφικά παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού ένωση ξένων διαστημάτων, όπως είναι για παράδειγμα οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{1}{x}$  (Σχήμα 5) και  $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$  (Σχήμα 6)



Σχήμα 5



Σχήμα 6

και να συζητηθεί γιατί το γράφημα των συναρτήσεων αυτών διακόπτεται, παρόλο που είναι συνεχείς. Να δοθούν στους μαθητές και σχετικές ασκήσεις.

Επίσης, κατά τη διδασκαλία των θεωρημάτων Bolzano, ενδιάμεσων τιμών και μέγιστης και ελάχιστης τιμής, καθώς και της πρότασης ότι η συνεχής εικόνα διαστήματος είναι διάστημα, να δοθεί έμφαση και να συζητηθούν οι γραφικές παραστάσεις που ακολουθούν τις τυπικές διατυπώσεις αυτών, ώστε οι μαθητές να βοηθηθούν στην ουσιαστική κατανόηση τους.

Το θεώρημα Bolzano είναι το πρώτο ουσιαστικά θεώρημα που συναντάνε οι μαθητές στην Ανάλυση. Για αυτό είναι καλό να γίνει μια συζήτηση που να αφορά την αναγκαιότητα των υποθέσεων του θεωρήματος ανάλογη με το σχόλιο του θεωρήματος των ενδιάμεσων τιμών (σελ. 194). Επίσης θα πρέπει να τονισθεί ότι δεν ισχύει το αντίστροφο. Δηλαδή ενδέχεται οι τιμές μιας συνάρτησης στα άκρα ενός κλειστού διαστήματος  $[a, b]$  του πεδίου ορισμού της να έχουν το ίδιο πρόσημο, η συνάρτηση να μην είναι συνεχής στο  $[a, b]$  και όμως να παίρνει την τιμή 0 σε ένα εσωτερικό σημείο του  $[a, b]$ .

Οι ώρες που απομένουν να διατεθούν για την επίλυση επαναληπτικών ασκήσεων από ολόκληρο το κεφάλαιο.

**Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup>** (Προτείνεται να διατεθούν 38 διδακτικές ώρες)

**§2.1** (Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες).

Να δοθεί έμφαση στην εισαγωγή της έννοιας μέσω του προβλήματος της στιγμιαίας ταχύτητας και της εφαπτομένης. Μετά τον ορισμό της παραγώγου και της εφαπτομένης γραφικής παράστασης συνάρτησης (σελ.214) να συζητηθεί αναλυτικότερα η έννοια της εφαπτομένης. Επίσης, να δοθούν παραδείγματα που θα βοηθήσουν τον μαθητή να ανακατασκευάσει την εικόνα της εφαπτομένης που έχει από τον κύκλο (η εφαπτομένη έχει ένα κοινό σημείο και δεν κόβει την καμπύλη) και να σχηματίσει μια γενικότερη εικόνα για την εφαπτομένη ευθεία. Για παράδειγμα, προτείνεται να συζητηθούν και να δοθούν στους μαθητές γραφικά:

i) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = x^3$  στο σημείο O, ώστε να καταλάβουν ότι η εφαπτομένη μιας καμπύλης μπορεί να διαπερνά την καμπύλη και

ii) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \leq 0 \\ 0, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$  στο

σημείο  $O$ , ώστε να καταλάβουν ότι μια ημιευθεία της εφαπτομένης μιας καμπύλης μπορεί να συμπίπτει με ένα τμήμα της καμπύλης και επιπλέον ότι η εφαπτομένη μιας ευθείας σε κάθε σημείο της συμπίπτει με την ευθεία.

**§2.2** (Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες).

Να προσεχθεί ιδιαίτερα το θέμα της κατανόησης από τους μαθητές των ρόλων του  $h$  και του  $x$  στην έκφραση  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  που χρησιμοποιείται στο βιβλίο για τον υπολογισμό της παραγώγου των τριγωνομετρικών συναρτήσεων (σελ 225). Να τονιστεί η διαφορά παραγώγου σε σημείο και παραγώγου συνάρτησης.

**§2.3** (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες).

Να δοθεί βάρος στην παραγωγή σύνθετης συνάρτησης καθώς και στην παρατήρηση της σελίδας 234 σχετικά με το ότι το σύμβολο  $\frac{dy}{dx}$  δεν είναι πηλίκο.

Στην εφαρμογή 2 (σελ 236) που αφορά στην εφαπτομένη του κύκλου να τονιστεί ότι η εξίσωση της ευθείας που βρέθηκε με βάση τον αναλυτικό ορισμό της εφαπτομένης είναι ίδια με αυτή που γνωρίζουμε από την αναλυτική γεωμετρία. Αυτό για να σταθεροποιηθεί στους μαθητές η αντίληψη ότι η έννοια της εφαπτομένης που πραγματεύονται στην ανάλυση συνδέεται και επεκτείνει την έννοια της εφαπτομένης που γνωρίσανε στη γεωμετρία.

**§2.4** (Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες).

Η έννοια του ρυθμού μεταβολής είναι σημαντική και δείχνει τη σημασία της έννοιας της παραγώγου στις εφαρμογές. Για το λόγο αυτό καλό είναι να γίνει προσπάθεια οι μαθητές να κατανοήσουν την έννοια και να δουν ορισμένες χρήσιμες εφαρμογές.

**§2.5** (Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες).

Να δοθεί έμφαση στη γεωμετρική ερμηνεία των θεωρημάτων Rolle και Μέσης Τιμής που υπάρχει στο σχολικό βιβλίο μετά τη διατύπωση των θεωρημάτων αυτών. Επειδή οι μαθητές έχουν χρησιμοποιήσει το θεώρημα του Bolzano, σε ασκήσεις όπως η εφαρμογή 1 ii) μπορεί να συζητηθεί πρώτα η δυνατότητα απόδειξης με χρήση του θεωρήματος Bolzano και να φανεί ότι δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε αυτό το θεώρημα. Έτσι φαίνεται ότι το θεώρημα Rolle αποτελεί ουσιαστικό εργαλείο και για τέτοιες περιπτώσεις. Στην εφαρμογή 3 να γίνει συζήτηση τι εκφράζει το πηλίκο  $\frac{S(2,5) - S(0)}{2,5}$  (μέση ταχύτητα της κίνησης) με στόχο να

κατανοήσουν οι μαθητές ότι αυτό που αποδεικνύεται είναι ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης υπάρχει τουλάχιστον μια χρονική στιγμή κατά την οποία η στιγμιαία ταχύτητα θα είναι ίση με τη μέση ταχύτητα που είχε το αυτοκίνητο σε όλη την κίνηση.

Εναλλακτικά θα μπορούσε να συζητηθεί στην αρχή του κεφαλαίου, το γεγονός ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης ενός αυτοκινήτου κάποια στιγμή της διαδρομής η στιγμιαία ταχύτητά του θα είναι ίση με τη μέση ταχύτητά του (κάτι που οι μαθητές το αντιλαμβάνονται διαισθητικά). Στη συνέχεια να διατυπωθεί η μαθηματική σχέση που εκφράζει το γεγονός αυτό, και να τεθεί το ερώτημα αν το συμπέρασμα μπορεί να γενικευθεί και για άλλες συναρτήσεις. Η απάντηση στην ερώτηση αυτή είναι το θεώρημα Μέσης Τιμής.

**§2.6** (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες).

Στην αρχή της διδασκαλίας αυτού του κεφαλαίου μπορεί να συνδεθεί η μονοτονία μιας συνάρτησης  $f$  σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της με την διατήρηση του λόγου μεταβολής  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$  στο διάστημα αυτό. Συγκεκριμένα, να αποδειχτεί ότι η  $f$  είναι:

- i) γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ , αν και μόνο αν  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ , δηλαδή, αν και μόνο αν όλες οι χορδές της γραφικής της παράστασης της  $f$  στο  $\Delta$  έχουν θετική κλίση.
- ii) γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta$ , αν και μόνο αν  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$ , δηλαδή, αν και μόνο αν όλες οι χορδές της γραφικής της παράστασης της  $f$  στο  $\Delta$  έχουν αρνητική κλίση.

Με τον τρόπο αυτό θα συνδεθεί η μονοτονία με την παράγωγο και θα δικαιολογηθεί το γιατί στην απόδειξη του θεωρήματος της σελίδας 253 χρησιμοποιούμε το λόγο μεταβολής  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ .

**§2.7** (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες).

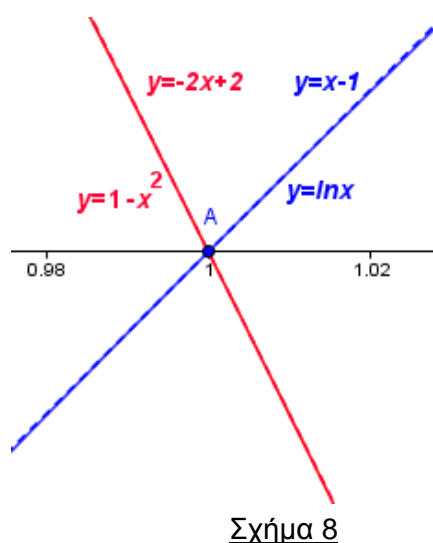
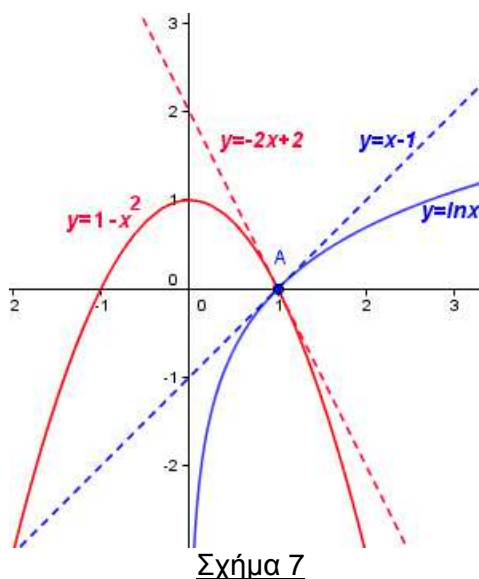
**§2.8** (Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες).

**§2.9** (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες).

Για μια διαισθητική κατανόηση του κανόνα De L' Hospital προτείνεται, πριν τη διατύπωση του, να δοθεί στους μαθητές να υπολογίσουν το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1 - x^2}$ , το οποίο είναι της μορφής « $\frac{0}{0}$ ». Οι μαθητές θα διαπιστώσουν ότι αδυνατούν να υπολογίσουν το όριο αυτό με τις μεθόδους που γνωρίζουν μέχρι τώρα. Για να τους βοηθήσουμε να υπολογίσουν το παραπάνω όριο προτείνουμε να δοθεί σε αυτούς η ακόλουθη δραστηριότητα.

**ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ:**

- i) Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις συναρτήσεις  $f(x) = \ln x$  και  $g(x) = 1 - x^2$ .



ii) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των  $f$  και  $g$  στο κοινό τους σημείο  $A(1,0)$  είναι οι ευθείες  $\varepsilon: y = x - 1$  και  $\zeta: y = -2x + 2$  αντιστοίχως και να τις χαράξετε.

iii) Να κάνετε χρήση του ότι «κοντά» στο  $x_0 = 1$  οι τιμές των συναρτήσεων  $f(x) = \ln x$  και  $g(x) = 1 - x^2$  προσεγγίζονται από τις τιμές των εφαπτομένων τους  $y = x - 1$  και  $y = -2x + 2$  για να καταλήξετε στο συμπέρασμα ότι «κοντά» στο  $x_0 = 1$  η τιμή του πηλίκου  $\frac{\ln x}{1 - x^2}$  είναι κατά προσέγγιση ίση με την τιμή του πηλίκου  $\frac{x - 1}{-2x + 2}$ , δηλαδή ότι «κοντά» στο  $x_0 = 1$  ισχύει:

$$\frac{\ln x}{1 - x^2} \approx \frac{x - 1}{-2x + 2} = \frac{x - 1}{-2x(x - 1)} = \frac{1}{-2}$$

που είναι το πηλίκο των κλίσεων των παραπάνω ευθειών.

Επομένως, «κοντά» στο  $x_0 = 1$  ισχύει  $\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f'(1)}{g'(1)}$ , το οποίο υπό μορφή ορίου γράφεται:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(1)}{g'(1)}.$$

### ΣΧΟΛΙΟ

Η διαπίστωση του ότι «κοντά» στο  $x_0 = 1$  οι τιμές των συναρτήσεων  $f(x) = \ln x$  και  $g(x) = 1 - x^2$  προσεγγίζονται από τις τιμές των εφαπτομένων τους  $y = x - 1$  και  $y = -2x + 2$  μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια ενός δυναμικού λογισμικού (πχ. Geogebra), ως εξής:

- ✓ Παριστάνουμε γραφικά τις συναρτήσεις  $y = \ln x$  και  $y = 1 - x^2$  και στη συνέχεια χαράσσουμε τις εφαπτόμενες τους  $y = x - 1$  και  $y = -2x + 2$  αντιστοίχως (σχήμα 7).
- ✓ Έπειτα, κάνουμε αλληπάλληλα ZOOM κοντά στο σημείο  $A(1,0)$ . Θα παρατηρήσουμε ότι η  $y = \ln x$  θα συμπίσει με την ευθεία  $y = x - 1$ , ενώ η  $y = 1 - x^2$  θα συμπίσει με την ευθεία  $y = -2x + 2$ . (σχήμα 8).

### **§2.10** (Προτείνεται να διατεθεί 1 διδακτική ώρα)

Οι δύο (2) διδακτικές ώρες που απομένουν από τον συνολικό αριθμό των προτεινομένων ωρών να διατεθούν για επίλυση επαναληπτικών ασκήσεων.

### **Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup>** (Προτείνεται να διατεθούν 20 διδακτικές ώρες).

#### **§3.1** (Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες).

A) Να δοθεί έμφαση στα προβλήματα που διατυπώνονται στο σχολικό βιβλίο στην αρχή της ενότητας και να τονιστεί η σημασία της αντίστροφης διαδικασίας της παραγωγίσιμης. Θα ήταν καλό να συζητηθούν διεξοδικά ορισμένα από αυτά ή άλλα ανάλογα, ώστε να προκύψει η σημασία της αρχικής συνάρτησης.

B) Να συζητηθεί μόνο η πρώτη παράγραφος που αφορά στην παράγουσα συνάρτηση. Το αόριστο ολοκλήρωμα παραλείπεται και αντί του πίνακα αόριστων ολοκληρωμάτων (σελ. 305) να δοθεί ο παρακάτω πίνακας των παραγουσών μερικών βασικών συναρτήσεων.

A/A	Συνάρτηση	Παράγουσες
1	$f(x) = 0$	$G(x) = c, c \in \mathbb{R}$ ,
2	$f(x) = 1$	$G(x) = x + c, c \in \mathbb{R}$
3	$f(x) = \frac{1}{x}$	$G(x) = \ln x  + c, c \in \mathbb{R}$
4	$f(x) = x^\alpha$	$G(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, c \in \square$
5	$f(x) = \sigma\upsilon\nu x$	$G(x) = \eta\mu x + c, c \in \square$
6	$f(x) = \eta\mu x$	$G(x) = -\sigma\upsilon\nu x + c, c \in \square$
7	$f(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$G(x) = \varepsilon\phi x + c, c \in \mathbb{R}$
8	$f(x) = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$G(x) = -\sigma\phi x + c, c \in \mathbb{R}$
9	$f(x) = e^x$	$G(x) = e^x + c, c \in \mathbb{R}$
10	$f(x) = a^x$	$G(x) = \frac{a^x}{\ln a} + c, c \in \square$

**Σημείωση:**

Οι τύποι του πίνακα αυτού ισχύουν σε κάθε **διάστημα** στο οποίο οι παραστάσεις του  $x$  που εμφανίζονται έχουν νόημα.

Οι δύο ιδιότητες των αόριστων ολοκληρωμάτων στο τέλος της σελίδας 305 μπορούν να αναδιατυπωθούν ως εξής:

Αν οι συναρτήσεις  $F$  και  $G$  είναι παράγουσες των  $f$  και  $g$  αντιστοίχως και ο  $\lambda$  είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε:

- i) Η συνάρτηση  $F + G$  είναι μια παράγουσα της συνάρτησης  $f + g$  και
- ii) Η συνάρτηση  $\lambda F$  είναι μια παράγουσα της συνάρτησης  $\lambda f$ .

Οι εφαρμογές των σελίδων 306 και 307 να γίνουν με τη χρήση των αρχικών συναρτήσεων. Να λυθούν μόνο οι ασκήσεις 2, 4, 5 και 7 της Α΄ Ομάδας.

**§3.4** (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες).

Να γίνει αναλυτικά το πρώτο μέρος που αφορά στον υπολογισμό του εμβαδού παραβολικού χωρίου. Στη συνέχεια να γίνει διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος και να συνδεθεί με το εμβαδόν όταν η συνάρτηση δεν παίρνει αρνητικές τιμές και με τον υπολογισμό του παραβολικού χωρίου που προηγήθηκε. Να γίνει η εφαρμογή του βιβλίου για το ολοκλήρωμα σταθερής συνάρτησης και οι ιδιότητες που ακολουθούν.

**§3.5** (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες).



Να δοθεί έμφαση στο σχόλιο που αφορά στην εποπτική απόδειξη του συμπεράσματος.

**§3.7** (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες).

Οι 4 διδακτικές ώρες που απομένουν (από τον συνολικό αριθμό των ωρών που προτείνεται να διατεθούν για το κεφάλαιο αυτό), προτείνεται να διατεθούν για επίλυση επαναληπτικών ασκήσεων.

## **6 . Μαθηματικά ΙΙ – Δ΄ ΤΑΞΗ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

### **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

Η διαχείριση είναι η ίδια με την προτεινόμενη για τη Γ΄ Τάξη του Ημερησίου Επαγγελματικού Λυκείου, με την ακόλουθη διαφοροποίηση ως προς τις ώρες διδασκαλίας ανά κεφάλαιο και παράγραφο:

#### **ΜΕΡΟΣ Α΄: Άλγεβρα**

##### **Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup> (Προτείνεται να διατεθούν 15 διδακτικές ώρες)**

Ειδικότερα:

**§2.1 - §2.2** (Προτείνεται να διατεθούν 6 διδακτικές ώρες)

**§2.3** (Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες).

Οι δύο (2) ώρες που απομένουν από τον συνολικό αριθμό των προτεινόμενων ωρών να διατεθούν για επίλυση ασκήσεων από το σύνολο του κεφαλαίου.

#### **ΜΕΡΟΣ Β΄: Ανάλυση**

##### **Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup> (Προτείνεται να διατεθούν 38 διδακτικές ώρες)**

Ειδικότερα:

**§1.1** (Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες)

**§1.2** (Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες)

**§1.3** (Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες)

**§1.4** (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

**§1.5** (Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες)

**§1.6** (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

**§1.7** (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)

**§1.8** (Προτείνεται να διατεθούν 11 διδακτικές ώρες)

##### **Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup> (Προτείνεται να διατεθούν 46 διδακτικές ώρες)**

**§2.1** (Προτείνεται να διατεθούν 8 διδακτικές ώρες)

**§2.2** (Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες)

**§2.3** (Προτείνεται να διατεθούν 6 διδακτικές ώρες)

**§2.4** (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

§2.5 (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)

§2.6 (Προτείνεται να διατεθούν 6 διδακτικές ώρες)

§2.7 (Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες)

§2.9 (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)

Οι δύο (2) διδακτικές ώρες που απομένουν από τον συνολικό αριθμό των προτεινομένων ωρών να διατεθούν για επίλυση επαναληπτικών ασκήσεων.

### **Επισήμανση**

1. Οι τύποι  $(\eta\mu\chi)' = \sigma\upsilon\nu\chi$  (σελ. 224) και  $(\sigma\upsilon\nu\chi)' = -\eta\mu\chi$  (σελ. 225) να δοθούν χωρίς απόδειξη καθώς και
2. Η Άσκηση 8α της Β' Ομάδας (σελ. 96-97) να διδαχθεί ως εφαρμογή για να μπορεί να χρησιμοποιείται στην επίλυση ασκήσεων, χωρίς απόδειξη.
3. Στο εισαγωγικό κείμενο (σελ. 233) της παρουσίασης της έννοιας της παραγώγου σύνθετης συνάρτησης, η συνάρτηση  $y = \eta\mu 2x$  να αντικατασταθεί από μια άλλη, για παράδειγμα την  $y = \ln 2x$

$$\left( (\ln 2x)' = (\ln 2 + \ln x)' = (\ln 2)' + (\ln x)' = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \right).$$

4. Από τη διδακτέα-εξεταστέα ύλη εξαιρούνται οι Ασκήσεις του σχολικού βιβλίου που αναφέρονται σε τύπους τριγωνομετρικών αριθμών αθροίσματος γωνιών, διαφοράς γωνιών και διπλάσιας γωνίας.

## **Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής**

### **Μάθημα Επιλογής Γ' τάξης Ημερησίων και Δ' Εσπερινών ΕΠΑ.Λ.**

#### **I. Διδακτέα ύλη**

Από το βιβλίο «Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής» της Γ' Τάξης Γενικού Λυκείου των Λ. Αδαμόπουλου κ.α., έκδοση 2012

#### **Κεφ. 1<sup>ο</sup>: Διαφορικός Λογισμός**

- 1.1. Συναρτήσεις
- 1.2. Η έννοια της παραγώγου
- 1.3. Παράγωγος συνάρτησης
- 1.4. Εφαρμογές των Παραγώγων, χωρίς το κριτήριο της 2ης παραγώγου

#### **Κεφ. 2<sup>ο</sup>: Στατιστική**

- 2.1. Βασικές έννοιες
- 2.2. Παρουσίαση Στατιστικών Δεδομένων, χωρίς την υποπαράγραφο «Κλάσεις άνισου πλάτους»
- 2.3. Μέτρα Θέσης και Διασποράς, χωρίς τις υποπαραγράφους: «Εκατοστημόρια», «Ενδοτεταρτημοριακό εύρος» και «Επικρατούσα τιμή»

#### **Κεφ. 3<sup>ο</sup>: Πιθανότητες**

- 3.1. Δειγματικός Χώρος-Ενδεχόμενα

### 3.2. Έννοια της Πιθανότητας

#### Παρατηρήσεις:

1. Τα θεωρήματα, οι προτάσεις, οι αποδείξεις και οι ασκήσεις που φέρουν αστερίσκο δε διδάσκονται και δεν εξετάζονται.
2. Οι εφαρμογές και τα παραδείγματα των βιβλίων δεν εξετάζονται ούτε ως θεωρία ούτε ως ασκήσεις. Μπορούν, όμως, να χρησιμοποιηθούν ως προτάσεις για τη λύση ασκήσεων, ή την απόδειξη άλλων προτάσεων.
3. Οι τύποι 2 και 4 των σελίδων 93 και 94 του βιβλίου «Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής» θα δίνονται στους μαθητές τόσο κατά τη διδασκαλία όσο και κατά την εξέταση θεμάτων των οποίων η αντιμετώπιση απαιτεί τη χρήση τους.

## II. Διδακτική διαχείριση

### Κεφάλαιο 1. Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 15 διδακτικές ώρες.

Σε όλο το κεφάλαιο γίνεται ευρεία χρήση της εποπτείας και των παραδειγμάτων για την ερμηνεία και για την κατανόηση των διάφορων εννοιών και προτάσεων.

Στην αρχή της §1.1 γίνεται μια σύντομη αναφορά στην έννοια της συνάρτησης και των ιδιοτήτων της. Πολλές από τις έννοιες και τους συμβολισμούς αυτού του κεφαλαίου είναι ήδη γνωστά στους μαθητές από προηγούμενες τάξεις γι' αυτό και η διδασκαλία τους δεν πρέπει να στοχεύει στην αναλυτική παρουσίασή τους, αλλά στο να τα επαναφέρουν οι μαθητές στη μνήμη τους, επειδή θα τους χρειαστούν στα επόμενα κεφάλαια.

Στην ίδια παράγραφο παρουσιάζεται μέσω παραδειγμάτων και χωρίς μαθηματική αυστηρότητα η έννοια του ορίου και γίνεται μια σύντομη αναφορά στην έννοια της συνεχούς συνάρτησης. Επισημαίνεται ότι η διδασκαλία των εννοιών αυτών δεν αποτελεί αυτοσκοπό, αλλά στοχεύει στην προετοιμασία για την εισαγωγή της έννοιας της παραγώγου. Δεν πρέπει επομένως να καθυστερήσει η διδασκαλία με άσκοπη "ασκησιολογία". Κατά τη διδασκαλία των εννοιών της παραγράφου αυτής, για εξοικονόμηση χρόνου, συνιστάται οι πίνακες, τα σχήματα και η ερμηνεία τους να προσφέρονται σε διαφάνειες ή σε φωτοτυπίες ή, στην περίπτωση που αυτό είναι αδύνατον, οι μαθητές να χρησιμοποιούν τα βιβλία τους.

Σχετικά με την έννοια της συνεχούς συνάρτησης αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η πρόταση  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  μας πληροφορεί ότι οι τιμές του  $f(x)$  είναι πολύ κοντά στο  $f(x_0)$ , όταν το  $x$  είναι πολύ κοντά στο  $x_0$ . Αυτό σημαίνει ότι μικρές μεταβολές στο  $x$  έχουν ως αποτέλεσμα μόνο μικρές μεταβολές στις τιμές μιας συνεχούς συνάρτησης.

Στην §1.2 εισάγεται η έννοια της παραγώγου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο της. Η παράγωγος είναι ένα από τα θεμελιώδη εργαλεία των Μαθηματικών και χρησιμοποιείται σε ένα ευρύ φάσμα επιστημών.

Για τον ορισμό της παραγώγου ακολουθείται η ιστορική πορεία της εξέλιξης της έννοιας. Παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι ως εφαπτομένη ενός κύκλου  $(O, R)$  σε ένα σημείο του  $A$  θα μπορούσαμε να ορίσουμε την οριακή θέση μιας τέμνουσας  $AM$ , καθώς το  $M$  κινούμενο πάνω στον κύκλο τείνει να συμπίπτει με το  $A$ . Με βάση την παρατήρηση αυτή ορίζουμε ως εφαπτομένη της καμπύλης μιας συνάρτησης  $f$  σε ένα σημείο της  $A(x_0, f(x_0))$  την ευθεία η οποία διέρχεται από το  $A$  και έχει ως συντελεστή διεύθυνσης τον αριθμό  $\lambda = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ . Δε δίνεται ο τύπος της εξίσωσης της εφαπτομένης της καμπύλης μιας συνάρτησης  $f$  σε ένα σημείο της  $(x_0, f(x_0))$ . Όμως, μέσα από εφαρμογές, εξηγείται ο τρόπος με τον οποίο προσδιορίζεται κάθε φορά η εφαπτομένη αυτή, αφού γνωρίζουμε ένα σημείο της και μπορούμε να βρούμε το συντελεστή διεύθυνσής της. Δε γίνεται επίσης αναφορά στην έννοια της κατακόρυφης εφαπτομένης. Μαθητές με αυξημένη μαθηματική περιέργεια θα ικανοποιήσουν τις αναζητήσεις τους αυτές στα Μαθηματικά της Θετικής και της Τεχνολογικής κατεύθυνσης της Γ' Λυκείου.

Στη συνέχεια, διαπιστώνεται ότι και άλλα παραδείγματα, όπως ο προσδιορισμός της στιγμιαίας ταχύτητας ενός κινητού, του οριακού κόστους στην Οικονομία, της ταχύτητας μιας αντίδρασης στη Χημεία κτλ., οδηγούν στον υπολογισμό ενός ορίου της μορφής  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$ . Το όριο αυτό, όταν υπάρχει, ονομάζεται παράγωγος της  $f$  στο  $t_0$ .

Φυσικά το πρόβλημα της εφαπτομένης και το πρόβλημα της στιγμιαίας ταχύτητας έχουν προετοιμάσει το έδαφος, ώστε να γίνει αποδεκτός και κατανοητός ο ορισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο της και η ερμηνεία της ως ρυθμού μεταβολής.

Στην §1.3 ορίζεται η (πρώτη) **παράγωγος** μιας **συνάρτησης**  $f$ . Με τον όρο **παράγωγος της  $f$**  εννοείται η συνάρτηση  $f'$ , η οποία σε κάθε σημείο  $x$  του πεδίου ορισμού της  $f$ , όπου αυτή είναι παραγωγίσιμη, αντιστοιχίζει την παράγωγό της στο σημείο αυτό. Με ανάλογο τρόπο ορίζεται και η **δεύτερη παράγωγος** της  $f$  και ως παραδείγματα αναφέρονται η ταχύτητα  $u(t) = x'(t)$  και η επιτάχυνση  $a(t) = x''(t)$  στην ευθύγραμμη κίνηση ενός σώματος. Ακολουθεί η παραγωγή βασικών συναρτήσεων και οι κανόνες παραγωγίσιμης αθροίσματος, γινομένου, πηλίκου και σύνθετης συνάρτησης. Αναφέρονται μόνο οι αποδείξεις όσων τύπων και κανόνων είναι απλές.

Επισημαίνεται ότι στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις  $\eta\mu x$ ,  $\sigma\upsilon\nu x$  και  $\epsilon\phi x$  το  $x$  εκφράζει το μέτρο μιας γωνίας σε ακίνια (rad). Αν  $\theta$  είναι το μέτρο της ίδιας γωνίας σε μοίρες, τότε

$$\eta\mu x = \eta\mu\theta^\circ \text{ και } x = \frac{\pi}{180}\theta. \text{ Επομένως,}$$

$$(\eta\mu\theta^\circ)'_\theta = (\eta\mu x)'_\theta = (\eta\mu x)'_x \cdot x'_\theta = \sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180}\sigma\upsilon\nu\theta^\circ.$$

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για τις άλλες τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Στην §1.3 υλοποιείται ο κύριος στόχος της διδασκαλίας του κεφαλαίου, που είναι η χρησιμοποίηση των παραγώγων στον προσδιορισμό των ακροτάτων. Όπως και στις προηγούμενες παραγράφους, έτσι και εδώ για την κατανόηση των ιδιοτήτων κυριαρχεί η γεωμετρική εποπτεία. Για να συνδεθεί καλύτερα η σχέση του προσήμου της πρώτης παραγώγου με τα ακρότατα, μπορεί ο διδάσκων να αναφέρει παραδείγματα και από τη Φυσική. Έτσι, στο παράδειγμα της σελίδας 39 του βιβλίου μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι όταν το σώμα φτάσει στο υψηλότερο σημείο, η ταχύτητά του πρέπει να μηδενιστεί, διότι διαφορετικά το σώμα θα εξακολουθούσε να ανεβαίνει. Επομένως, βρίσκουμε ότι η χρονική στιγμή  $t$  που θα έχουμε το μέγιστο ύψος, δηλαδή το μέγιστο της συνάρτησης  $h(t) = 20t - 5t^2$ , είναι όταν  $u(t) = h'(t) = 20 - 10t = 0$ . Άρα για  $t = 2$  έχουμε το μέγιστο ύψος, που είναι ίσο με  $h(2) = 40 - 20 = 20$ .

Οι μέθοδοι του Διαφορικού Λογισμού για τον προσδιορισμό των ακροτάτων τιμών ενός μεταβαλλόμενου μεγέθους έχουν πρακτική εφαρμογή σε πολλές περιοχές των επιστημών αλλά και της καθημερινής ζωής. Για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων αυτό που κυρίως προέχει είναι η μετατροπή του προβλήματος που είναι διατυπωμένο στην καθημερινή γλώσσα σε πρόβλημα **μεγίστου** ή **ελαχίστου** με τον ορισμό μιας συνάρτησης, της οποίας πρέπει να βρεθούν τα ακρότατα. Είναι σκόπιμο επομένως να τονιστούν με τη βοήθεια κατάλληλου προβλήματος οι αρχές "επίλυσης προβλήματος", τις οποίες έχουν γνωρίσει οι μαθητές σε προηγούμενες τάξεις, και να προσαρμοστούν στη συγκεκριμένη κατάσταση. Επισημαίνεται ότι η διαδικασία επίλυσης προβλήματος δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια συλλογή στρατηγικών, τις οποίες κάθε λογικά σκεπτόμενος άνθρωπος πρέπει να χρησιμοποιήσει προκειμένου να αντιμετωπίσει ένα πρόβλημα.

Σχετικά με την επίλυση προβλημάτων με τη βοήθεια του Διαφορικού Λογισμού πρέπει να αναφερθεί ότι πολλά προβλήματα μεγίστου ή ελαχίστου περιέχουν διακριτές μεταβλητές. Για παράδειγμα, ο αριθμός των παραγόμενων μονάδων ενός προϊόντος, καθώς και ο αριθμός των εργαζομένων σε ένα εργοστάσιο πρέπει να είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί. Ο Διαφορικός Λογισμός όμως δεν εφαρμόζεται απευθείας σε προβλήματα που περιέχουν διακριτές μεταβλητές. Ωστόσο, μπορούμε μερικές φορές να οδηγηθούμε στη λύση ενός τέτοιου προβλήματος υποθέτοντας ότι κάθε μεταβλητή παίρνει τιμές σε όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών ή σε κάποιο διάστημά του, ακόμα και αν η φυσική ερμηνεία της

μεταβλητής έχει νόημα μόνο για διακριτές τιμές. Έτσι, χρησιμοποιώντας το Διαφορικό Λογισμό βρίσκουμε μια λύση για το μαθηματικό μοντέλο, η οποία ελπίζουμε ότι προσεγγίζει τη λύση του πραγματικού προβλήματος.

Γενικά, με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται οι μαθητές:

- Να κατανοήσουν την έννοια της παραγώγου και να μπορούν να την ερμηνεύουν ως ρυθμό μεταβολής.
- Να μπορούν να βρίσκουν τις παραγώγους συναρτήσεων.
- Να κατανοήσουν ότι η γνώση του ρυθμού μεταβολής ενός μεταβαλλόμενου μεγέθους μας δίνει χρήσιμες πληροφορίες για το ίδιο το μέγεθος.

Να μπορούν με τη βοήθεια των παραγώγων να επιλύουν προβλήματα ακροτάτων.

## Κεφάλαιο 2 Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 16 διδακτικές ώρες.

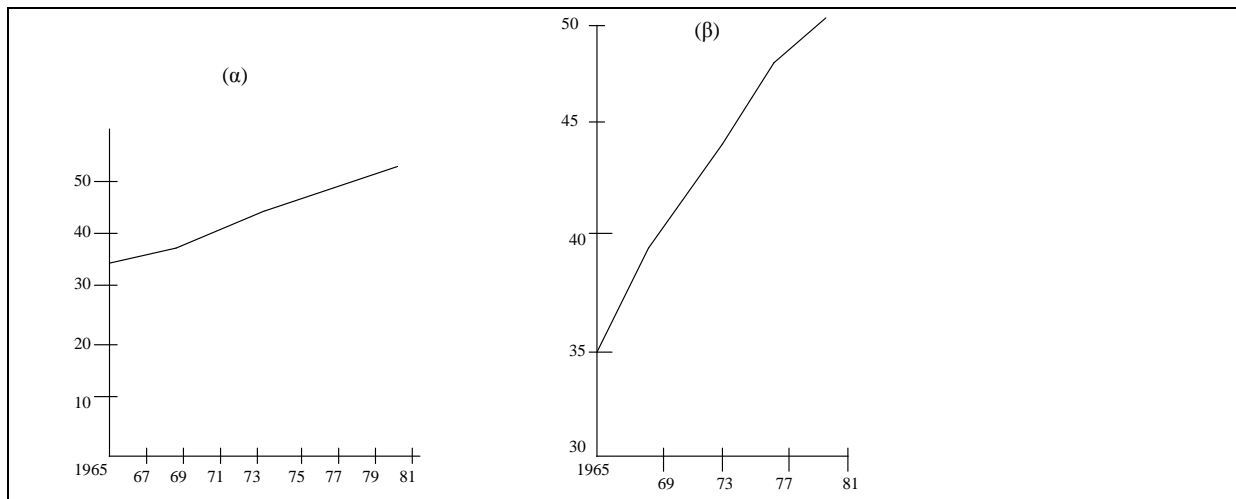
Στην §2.1 πρέπει να καταβληθεί προσπάθεια, ώστε με κατάλληλα παραδείγματα να κατανοήσουν οι μαθητές τις έννοιες **πληθυσμός**, **μεταβλητή** (ποσοτική, ποιοτική), **απογραφή** και **δείγμα**. Να διευκρινιστεί ότι δε συμπίπτει το σύνολο των τιμών μιας μεταβλητής με τις παρατηρήσεις από την εξέταση ενός πληθυσμού ως προς τη μεταβλητή αυτή. Για παράδειγμα, οι τιμές της μεταβλητής “ομάδα αίματος” είναι A, B, AB και O, ενώ οι παρατηρήσεις από την εξέταση δέκα ατόμων μπορεί να είναι A, A, B, B, B, AB, A, AB, O, B.

Όταν είναι πρακτικά αδύνατο ή οικονομικά ασύμφορο να εξετάσουμε κάθε μέλος ενός πληθυσμού, οδηγούμαστε στην εξέταση ενός αντιπροσωπευτικού δείγματος. Είναι σημαντικό να αναγνωρίσουν οι μαθητές τη χρησιμότητα του δείγματος, από το οποίο μπορούν να προκύψουν αξιόπιστες πληροφορίες για ολόκληρο τον πληθυσμό.

Στην §2.2 παρουσιάζονται οι κατανομές συχνοτήτων και οι γραφικές παραστάσεις τους. Μια από τις απλούστερες διαδικασίες για την οργάνωση και τη συνοπτική παρουσίαση των δεδομένων είναι η κατανομή συχνοτήτων. Η κατανομή συχνοτήτων θεωρείται ως το πρώτο βήμα σε κάθε ανάλυση δεδομένων. Ανάλογα ορίζονται η κατανομή σχετικών συχνοτήτων, η κατανομή αθροιστικών συχνοτήτων και η κατανομή αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

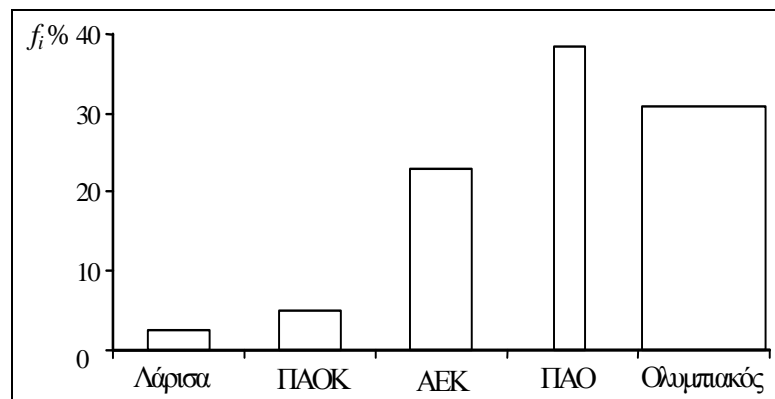
Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν ότι:

- Η (απόλυτη) **συχνότητα**  $v_i$  μιας τιμής  $x_i$  δηλώνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή  $x_i$  στο δείγμα.
- Η **σχετική συχνότητα**  $f_i$  εκφράζει το ποσοστό (επί τοις %) μιας τιμής  $x_i$ , η οποία εμφανίζεται στο δείγμα των  $n$  παρατηρήσεων. Γι' αυτό η σχετική συχνότητα προσφέρεται για τη σύγκριση πληθυσμών, όταν εξετάζονται ως προς την ίδια μεταβλητή. Βέβαια με τις σχετικές συχνότητες χάνουμε τις απόλυτες συχνότητες. Αν όμως  $n$  είναι το μέγεθος του δείγματος, τότε  $v_i = f_i \cdot n$ .
- Η **αθροιστική συχνότητα**  $N_i$  και η **αθροιστική σχετική συχνότητα**  $F_i$ , οι οποίες έχουν νόημα μόνο για ποσοτικές μεταβλητές, εκφράζουν το πλήθος και το ποσοστό αντιστοίχως των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες με  $x_i$ .
- Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να παραστήσουν γραφικά τα δεδομένα που έχουν συλλέξει, χρησιμοποιώντας κάθε φορά το κατάλληλο διάγραμμα. Ακόμη πρέπει να είναι σε θέση να «διαβάζουν» τα διάφορα διαγράμματα τα οποία παρουσιάζουν με άμεσο και οργανωμένο τρόπο τα στατιστικά δεδομένα και επιτρέπουν ορισμένες φορές να φανούν αμέσως οι σχέσεις που ενδεχομένως υπάρχουν. Πρέπει όμως να επιστήσουμε την προσοχή των μαθητών, δίνοντας κατάλληλα παραδείγματα, για τον κίνδυνο παραπλάνησης που υπάρχει από την ανάγνωση ενός στατιστικού διαγράμματος. Για παράδειγμα, στο σχήμα 1 τα δυο διαγράμματα (α) και (β) αναφέρονται στο ποσοστό των εργαζομένων γυναικών στο σύνολο του γυναικείου πληθυσμού μιας χώρας άνω των 16 ετών. Δίνουν όμως εντελώς διαφορετική εικόνα για το πως μεταβάλλεται το ποσοστό αυτό.



Σχήμα 1

Το διάγραμμα (β) προκύπτει από το (α), αν απλώς μεγεθύνουμε την κλίμακα στον άξονα των y, σμικρύνουμε την κλίμακα στον άξονα των x και θεωρήσουμε ως αρχή μετρήσεων στον άξονα των y την ένδειξη 30. Ανάλογες παραποιήσεις μπορούν να πραγματοποιηθούν με το ραβδόγραμμα κατασκευάζοντας τα ορθογώνια με διαφορετικό πλάτος. Με τον τρόπο αυτό η οποιαδήποτε διαφορά στις συχνότητες εμφανίζεται πολλαπλάσια από ό,τι πραγματικά είναι. Για παράδειγμα, αν για την άσκηση 9 σελ. 80 παραστήσουμε το ιστόγραμμα συχνοτήτων όπως παρακάτω,



τότε η απεικόνιση της κατάστασης είναι παραπλανητική, σε βάρος του Παναθηναϊκού και υπέρ του Ολυμπιακού.

Όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μεγάλο, επιβάλλεται να γίνεται ομαδοποίηση. Στην ομαδοποίηση το **πλήθος των κλάσεων** ορίζεται αυθαίρετα από τον ερευνητή σύμφωνα με την πείρα του. Μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί και ο εμπειρικός τύπος του Sturges:  $k = 1 + 3,32 \cdot \log n$ , όπου  $k$  είναι ο αριθμός των κλάσεων και  $n$  είναι το μέγεθος του δείγματος.

Με την ομαδοποίηση έχουμε απώλεια πληροφοριών, η οποία είναι τόσο μεγαλύτερη όσο μικρότερος είναι ο αριθμός των κλάσεων. Όμως, με την ομαδοποίηση διευκολύνεται η επεξεργασία των δεδομένων και η παρουσίασή τους είναι εποπτικότερη.

Στην § 2.3 εξετάζονται τα μέτρα θέσης και διασποράς μιας κατανομής.

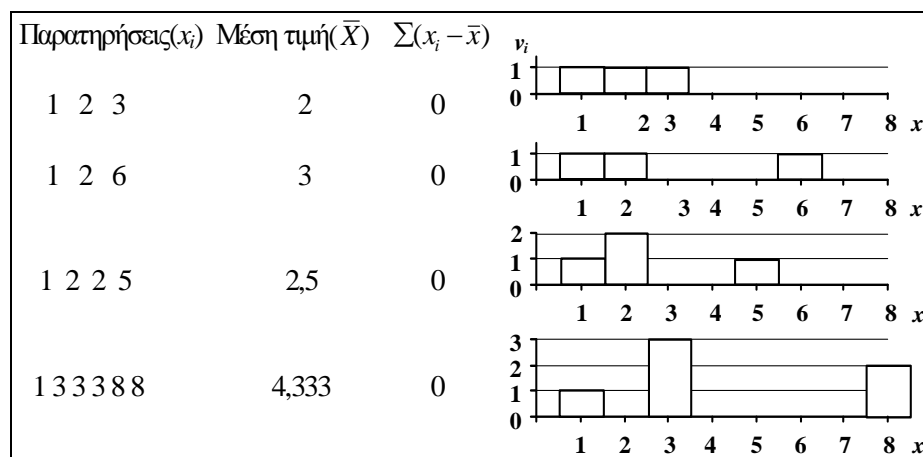
Ένας μεγάλος αριθμός δεδομένων μπορεί σε πολλές περιπτώσεις να περιγραφεί με ένα μέτρο κεντρικής τάσης και με ένα μέτρο διασποράς. Οι μαθητές πρέπει να ενημερωθούν για τους περιορισμούς και τις επιπτώσεις από τη χρήση καθενός από τα μέτρα θέσης και διασποράς. Είναι επίσης σημαντικό να κατανοήσουν ότι με την αντικατάσταση των δεδομένων από ένα μέτρο θέσης έχουμε μεν μια σύντομη πληροφόρηση, αλλά συγχρόνως έχουμε και μια σημαντική απώλεια πληροφοριών. Αν, για παράδειγμα, θέλουμε να πληροφορηθούμε

κάποιον για τη θερμοκρασία μιας πόλης θα ήταν κατάχρηση να του δώσουμε πλήρη κατάλογο των καθημερινών θερμοκρασιών. Δίνοντάς του όμως για συντομία μόνο τη μέση ετήσια θερμοκρασία οπωσδήποτε δεν του δίνουμε πλήρη εικόνα της μεταβολής της θερμοκρασίας στη διάρκεια του έτους.

Η **μέση τιμή** είναι ο μέσος όρος των παρατηρήσεων μιας κατανομής. Η μέση τιμή ενός πληθυσμού συμβολίζεται με  $\mu$ , ενώ ενός δείγματος με  $\bar{x}$ . Στη στατιστική συμπερασματολογία γίνεται διάκριση μεταξύ της μέσης τιμής πληθυσμού και της μέσης τιμής δείγματος. Όμως στο βιβλίο χρησιμοποιείται μόνο η μέση τιμή δείγματος και συμβολίζεται με  $\bar{x}$ . Η μέση τιμή είναι το μέτρο της κεντρικής τάσης, το οποίο χρησιμοποιείται συχνότερα από τα άλλα, κυρίως επειδή έχει τις δύο ακόλουθες ιδιότητες:

**α.** Το άθροισμα των αποκλίσεων όλων των τιμών από τη μέση τιμή είναι ίσο με μηδέν, δηλαδή  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$ . Η ιδιότητα αυτή είναι σημαντική για την παραγωγή και την απλοποίηση πολλών τύπων της Στατιστικής. Την ερμηνεία αυτή της μέσης τιμής μπορούμε να τη δούμε και με το παρακάτω παράδειγμα:

Για καθένα από τα παρακάτω σύνολα δεδομένων υπολογίζουμε τη μέση τιμή τους και κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα συχνοτήτων. Στον άξονα  $Ox$  σημειώνουμε με "▲" τη μέση τιμή.



Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει προφανώς και στην περίπτωση που έχουμε συχνότητες, όταν η παρατήρηση  $x_i$  εμφανίζεται  $v_i$  φορές. Τότε ισχύει η σχέση

$$\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})v_i = 0,$$

η οποία σύμφωνα με όσα ξέρουμε από τη Φυσική δείχνει ότι το  $\bar{x}$  είναι η θέση του **κέντρου βάρους**  $k$  σωματιδίων με βάρη  $v_1, v_2, \dots, v_k$  τοποθετημένα στις θέσεις  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Αυτό ακριβώς φαίνεται και στα παραπάνω ιστογράμματα συχνοτήτων, όπου η μέση τιμή παριστάνεται με "▲". Αν θεωρήσουμε δηλαδή τον άξονα  $Ox$  να μην έχει βάρος και τοποθετήσουμε τα βάρη  $v_i$  στις θέσεις  $x_i$  και το υποστήριγμα ▲ στη θέση  $\bar{x}$ , τότε θα έχουμε ισορροπία, όπως π.χ. σε μία "τραμπάλα".

**β.** Το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων από τη μέση τιμή είναι μικρότερο από το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων από οποιαδήποτε άλλη τιμή στην κατανομή (εφαρμογή 2, σελίδα 98). Η ιδιότητα αυτή χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της διασποράς και της τυπικής απόκλισης.

Στο βιβλίο αναφέρεται και ο **σταθμικός μέσος**, ο οποίος χρησιμοποιείται στην περίπτωση που οι τιμές έχουν διαφορετική αξία. Μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί και για τον προσδιορισμό της μέσης τιμής περισσότερων ομάδων δεδομένων με διαφορετικό μέγεθος



των οποίων γνωρίζουμε τις μέσες τιμές. Για παράδειγμα, αν η μέση τιμή της βαθμολογίας 80 κοριτσιών είναι 17 και η μέση τιμή της βαθμολογίας 50 αγοριών είναι 15, τότε η μέση τιμή της βαθμολογίας των  $80+50=130$  παιδιών είναι

$$\bar{x} = \frac{17 \cdot 80 + 15 \cdot 50}{80 + 50} = \frac{2110}{130} \approx 16.23.$$

Η **διάμεσος** είναι το σημείο του άξονα των δεδομένων κάτω από το οποίο βρίσκεται το πολύ το 50% των παρατηρήσεων και συγχρόνως πάνω από αυτό το πολύ το 50% των παρατηρήσεων. Όταν ο αριθμός των παρατηρήσεων είναι μεγάλος, τότε γίνεται ομαδοποίηση των δεδομένων και η διάμεσος προσδιορίζεται με τη βοήθεια του ιστογράμματος των αθροιστικών συχνοτήτων.

Υποθέτοντας ότι οι παρατηρήσεις σε κάθε κλάση κατανέμονται ομοιόμορφα, αποδεικνύεται (με απλή μέθοδο των τριών) ότι ο τύπος που δίνει τη διάμεσο σε ομαδοποιημένα δεδομένα είναι:

$$\delta = L_i + \frac{\frac{v}{2} - N_{i-1}}{v_i} \cdot c_i$$

$i$	Κλάσεις	$v_i$	$N_i$	$F_i\%$
1	156-162	2	2	5,0
2	262-168	8	10	25,0
3	168-174	12	22	55,0
3	174-180	11	33	82,5
5	180-186	5	38	95,0
6	186-192	2	40	100,0

όπου

$L_i$  το κατώτερο όριο της κλάσης που περιέχει τη διάμεσο

$v_i$  η συχνότητα της κλάσης

$c_i$  το πλάτος της κλάσης

$N_{i-1}$  η αθροιστική συχνότητα της **προηγούμενης** κλάσης, και

$v$  το πλήθος των παρατηρήσεων.

Εφαρμόζοντας, για παράδειγμα, τον τύπο της διαμέσου για τα δεδομένα του πίνακα 9 της σελίδας 73 του βιβλίου, βρίσκουμε ότι η διάμεσος βρίσκεται στην τρίτη κλάση, επειδή εδώ αντιστοιχούν αθροιστικά οι  $v/2 = 20$  παρατηρήσεις. Συνεπώς,

$$\delta = L_i + \frac{\frac{v}{2} - N_{i-1}}{v_i} c_i = 168 + \frac{\frac{40}{2} - 10}{12} \cdot 6 = 173\text{cm},$$

όπως (περίπου) και στη γραφική μέθοδο.

Ποιο είναι όμως το καλύτερο μέτρο θέσης μιας κατανομής; Σύμφωνα με ένα πρώτο κριτήριο η απάντηση εξαρτάται από το αν η μεταβλητή είναι ποιοτική ή ποσοτική. Αν η μεταβλητή είναι ποιοτική, τότε προσφέρεται μόνο η επικρατούσα τιμή, αν όμως η μεταβλητή είναι ποσοτική, τότε μπορούν να χρησιμοποιηθούν και τα τρία μέτρα θέσης. Σύμφωνα με ένα δεύτερο κριτήριο, η επιλογή του καταλληλότερου μέτρου θέσης εξαρτάται από το σκοπό για τον οποίο θα χρησιμοποιηθεί. Αν επιθυμούμε περαιτέρω στατιστική επεξεργασία, τότε η μέση τιμή προσφέρεται περισσότερο. Αν όμως ο σκοπός είναι βασικά περιγραφικός, τότε πρέπει να χρησιμοποιείται το μέτρο που περιγράφει καλύτερα τα δεδομένα. Η παρουσία ακραίων παρατηρήσεων (πολύ μικρών ή πολύ μεγάλων αναφορικά με τις άλλες παρατηρήσεις) είναι συχνά ένα από τα βασικότερα κριτήρια για την επιλογή κατάλληλου μέτρου θέσης. Η

επικρατούσα τιμή και η διάμεσος μένουν γενικά ανεπηρέαστες από τις ακραίες τιμές του δείγματος. Η μέση τιμή όμως επηρεάζεται σημαντικά από τις τιμές αυτές, επομένως δεν ενδείκνυται σε τέτοιες περιπτώσεις. Έτσι, για παράδειγμα, στη διαπραγματεύση για τους μισθούς των εργαζομένων σε μια εταιρεία, οι εργαζόμενοι θα επικαλούνται ως αντιπροσωπευτικό μισθό τη διάμεσο ή την επικρατούσα τιμή, ενώ οι εκπρόσωποι της εταιρείας τη μέση τιμή που επηρεάζεται σημαντικά από τους μισθούς των υψηλόβαθμων στελεχών της.

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα πόσο διασπαρμένες είναι οι τιμές μιας κατανομής, χρησιμοποιούμε τα **μέτρα διασποράς**. Από τα μέτρα αυτά αναφέρονται στο βιβλίο το εύρος, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση.

Από τα μέτρα διασποράς το **εύρος** χρησιμοποιείται αρκετά συχνά σε περιπτώσεις ελέγχου ποιότητας βιομηχανικών προϊόντων, όταν εργαζόμαστε με πολλά ισομεγέθη δείγματα. Αυτό οφείλεται στον εύκολο υπολογισμό του και στην εύκολη ερμηνεία του. Το εύρος όμως έχει το μειονέκτημα να εξαρτάται μόνο από τις δύο ακραίες τιμές και έχει την τάση να αυξάνεται, καθώς το μέγεθος του δείγματος μεγαλώνει. Αυτό έχει ως συνέπεια να μην είναι συγκρίσιμα ως προς το εύρος δύο δείγματα διαφορετικού μεγέθους.

Η **διακύμανση** ενός πληθυσμού μεγέθους  $N$  συμβολίζεται με  $\sigma^2$  και ο τύπος της είναι

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (t_i - \mu)^2}{N} \quad (1),$$

όπου  $\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i$  η μέση τιμή του πληθυσμού, ενώ η διακύμανση ενός δείγματος μεγέθους  $n$

συμβολίζεται με  $s^{*2}$  και ο τύπος της είναι

$$s^{*2} = \frac{\sum_{i=1}^v (t_i - \bar{x})^2}{v-1} \quad (2).$$

Στατιστικές διαδικασίες που χρησιμοποιούνται στις διάφορες επιστήμες συνήθως προσδιορίζουν τη διακύμανση  $s^{*2}$  ενός δείγματος, η οποία στη συνέχεια χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της διακύμανσης  $\sigma^2$  του πληθυσμού. Η δειγματική διακύμανση που προσδιορίζεται με τον τύπο (2) αποδεικνύεται ότι είναι μια *αμερόληπτη εκτιμήτρια*. Αν πάρουμε δηλαδή όλα τα δυνατά δείγματα μεγέθους  $v$  και υπολογίσουμε τις διασπορές  $s^{*2}$  από τη σχέση (2), τότε η μέση τιμή τους θα ισούται με την πληθυσμιακή διασπορά  $\sigma^2$ .

Αντίθετα, η δειγματική διακύμανση, όπως ορίζεται από τη σχέση  $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^v (t_i - \bar{x})^2}{v}$ , τείνει να υποεκτιμά τη πληθυσμιακή διακύμανση  $\sigma^2$ . Ωστόσο, στο βιβλίο για διδακτικούς λόγους χρησιμοποιούμε για τη δειγματική διακύμανση τον τύπο  $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^v (t_i - \bar{x})^2}{v}$ , αφού δεν πρόκειται να ασχοληθούμε με στατιστική συμπερασματολογία.

Η **τυπική απόκλιση** είναι η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης. Το μέτρο αυτό διασποράς ικανοποιεί την απαίτηση να εκφράζεται στην ίδια μονάδα μέτρησης με τις παρατηρήσεις.

Στην περίπτωση που οι παρατηρήσεις είναι μεγάλοι αριθμοί, μπορούμε να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς χρησιμοποιώντας την εφαρμογή 3 (σελίδα 99 του βιβλίου), σύμφωνα με την οποία αν  $y = ax + \beta$ , τότε  $\bar{y} = a\bar{x} + \beta$  και  $s_y = |a| \cdot s_x$ .

Για την ερμηνεία της τυπικής απόκλισης ως μέτρου διασποράς, ας υποθέσουμε ότι ο μέσος μισθός των υπαλλήλων μιας εταιρείας Α είναι  $\bar{x}_A = 250.000$  δρχ. με τυπική απόκλιση

$s_A = 42.000$  δρχ. Μια ερμηνεία της μεταβλητότητας των απολαβών των εργαζομένων έγκειται στον καθορισμό του ποσοστού των εργαζομένων που αναμένεται να βρίσκονται στο διάστημα  $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ , ή με δύο τυπικές αποκλίσεις στο διάστημα  $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$  κτλ. Αν υποθέσουμε ότι έχουμε περίπου κανονική κατανομή, τότε έχουμε την ερμηνεία του σχήματος 15, σελ. 95. Αντίθετα, για οποιοδήποτε σύνολο παρατηρήσεων, ανεξάρτητα από την κατανομή που έχουμε, εφαρμόζεται το θεώρημα του Chebyshev, το οποίο λέει ότι “το ποσοστό των παρατηρήσεων που περιλαμβάνονται στο διάστημα  $(\bar{x} - \kappa s, \bar{x} + \kappa s)$ ,  $\kappa \geq 1$ , είναι τουλάχιστον  $1 - \frac{1}{\kappa^2}$ ”. Συνεπώς, στο διάστημα  $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$  έχουμε τουλάχιστον το 75% των

παρατηρήσεων, ενώ στο διάστημα  $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$  έχουμε τουλάχιστον το 89% των παρατηρήσεων. Επομένως, για το παραπάνω παράδειγμα, αν υποθέσουμε ότι ο μισθός των υπαλλήλων ακολουθεί κανονική κατανομή, τότε αναμένεται το:

- 68% των υπαλλήλων να έχουν μισθό στο διάστημα (208.000, 292.000)
- 95% των υπαλλήλων να έχουν μισθό στο διάστημα (166.000, 334.000)
- 99,7% των υπαλλήλων να έχουν μισθό στο διάστημα (124.000, 376.000),

ενώ τα αντίστοιχα ποσοστά, όταν δεν υποθέτουμε κανονική κατανομή, γίνονται τουλάχιστον 0%, 75% και 89%.

Μερικές φορές σε στατιστικούς υπολογισμούς είναι αναγκαίο όχι μόνο να υπολογίσουμε απλώς τις τυπικές αποκλίσεις, αλλά να συγκρίνουμε μεταξύ τους τα μεγέθη των τυπικών αποκλίσεων σε διαφορετικές στατιστικές συλλογές. Δε φτάνουμε όμως στο σκοπό μας με το να παραλληλίσουμε μεταξύ τους τις τυπικές αποκλίσεις. Αυτό θα μας έδινε στην πλειοψηφία των περιπτώσεων μια εσφαλμένη εικόνα.

Ας υποθέσουμε ότι ο μέσος μισθός  $\bar{x}$  και η τυπική απόκλιση  $s$  των υπαλλήλων δύο εταιρειών  $A$  και  $B$  δίνονται στον παρακάτω πίνακα για 3 διαφορετικές περιπτώσεις:

	Εταιρεία A	Εταιρεία B
Περίπτωση 1	$\bar{x}_A = 250.000$ δρχ. $s_A = 42.000$ δρχ.	$\bar{x}_B = 250.000$ δρχ. $s_B = 60.000$ δρχ.
Περίπτωση 2	$\bar{x}_A = 250.000$ δρχ. $s_A = 42.000$ δρχ.	$\bar{x}_B = 350.000$ δρχ. $s_B = 50.000$ δρχ.
Περίπτωση 3	$\bar{x}_A = 250.000$ δρχ. $s_A = 42.000$ δρχ.	$\bar{x}_B = \$1400$ $s_B = \$350$

Στην περίπτωση 1 έχουμε την ίδια μέση τιμή, οπότε η σύγκριση της μεταβλητότητας μπορεί να γίνει αμέσως, συνεπώς μπορούμε να πούμε ότι η μεταβλητότητα των μισθών στην εταιρεία B είναι μεγαλύτερη από την μεταβλητότητα των μισθών στην εταιρεία A. Δηλαδή οι εργαζόμενοι στην εταιρεία A παρουσιάζουν μεγαλύτερη ομοιογένεια στις μηνιαίες αποδοχές τους από ό,τι στην εταιρεία B. Αντίθετα, στη δεύτερη περίπτωση δεν μπορούμε να πούμε ότι έχουμε μεγαλύτερη μεταβλητότητα στην εταιρεία B από ό,τι στην A. Η τυπική απόκλιση  $s_A = 42.000$ δρχ. έχει υπολογιστεί θεωρώντας τις αποκλίσεις των παρατηρήσεων από τη μέση τιμή  $\bar{x}_A = 250.000$ δρχ., ενώ η  $s_B = 50.000$ δρχ. υπολογίστηκε θεωρώντας τις αποκλίσεις των παρατηρήσεων από τη μέση τιμή  $\bar{x}_B = 350.000$ δρχ. Ανάλογη είναι και η τρίτη περίπτωση, όπου έχουμε διαφορετικές μονάδες μέτρησης.

Στις δύο αυτές περιπτώσεις η μεταβλητότητα των δεδομένων μπορεί να συγκριθεί, αφού πρώτα εκφράσουμε τις σχετικές ποσότητες σε μια κοινή βάση. Γι' αυτό υπάρχει ανάγκη ορισμού μέτρων σχετικής μεταβλητότητας, τα οποία να συνδυάζουν μέτρα θέσης με μέτρα διασποράς. Το πιο γνωστό μέτρο σχετικής μεταβλητότητας είναι ο συντελεστής μεταβολής ή

συντελεστής μεταβλητότητας, ο οποίος ορίζεται από τον τύπο  $cv = \frac{s}{\bar{x}}$  και συνήθως εκφράζεται ως ποσοστό.

### Σύγκριση μέσης τιμής, διαμέσου

#### Πλεονεκτήματα

- Για τον υπολογισμό της χρησιμοποιούνται όλες οι τιμές.
- Είναι μοναδική για κάθε σύνολο δεδομένων.
- Είναι εύκολα κατανοητή.
- Ο υπολογισμός της είναι σχετικά εύκολος.
- Έχει μεγάλη εφαρμογή για περαιτέρω στατιστική ανάλυση.

#### Μειονεκτήματα

##### Μέση τιμή

- Επηρεάζεται πολύ από ακραίες τιμές.
  - Μπορεί να μην αντιστοιχεί σε δυνατή τιμή της μεταβλητής. Όταν η  $X$  είναι διακριτή, με ακέραιες τιμές, τότε η μέση τιμή μπορεί να μην είναι ακέραιος.
  - Δεν υπολογίζεται για ποιοτικά δεδομένα.
- 
- Είναι δύσκολος ο υπολογισμός της σε ομαδοποιημένα δεδομένα με ανοικτές τις ακραίες κλάσεις.

- Είναι εύκολα κατανοητή.
- Δεν επηρεάζεται από ακραίες τιμές.
- Υπολογίζεται και στην περίπτωση που οι ακραίες κλάσεις είναι ανοικτές.
- Ο υπολογισμός της είναι απλός.
- Είναι μοναδική σε κάθε σύνολο δεδομένων.

##### Διάμεσος

- Δε χρησιμοποιούνται όλες οι τιμές για τον υπολογισμό της.
- Είναι δύσκολη η εφαρμογή της για περαιτέρω στατιστική ανάλυση.
- Δεν υπολογίζεται για ποιοτικά δεδομένα.
- Για τον υπολογισμό της μπορεί να χρειαστεί παρεμβολή.

### Σύγκριση μέτρων διασποράς

#### Πλεονεκτήματα

- Είναι πολύ απλό στον υπολογισμό.
- Χρησιμοποιείται αρκετά στον έλεγχο ποιότητας.
- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση της τυπικής απόκλισης.

#### Μειονεκτήματα

##### Εύρος

- Δε θεωρείται αξιόπιστο μέτρο διασποράς, επειδή βασίζεται μόνο στις δυο ακραίες παρατηρήσεις.
- Δε χρησιμοποιείται για περαιτέρω στατιστική ανάλυση.

##### Διασπορά και τυπική απόκλιση

- Λαμβάνονται υπόψη για τον υπολογισμό τους όλες οι παρατηρήσεις.
- Έχουν μεγάλη εφαρμογή στη στατιστική συμπερασματολογία.
- Σε κανονικούς πληθυσμούς το 68%, 95%, 99,7% των παρατηρήσεων βρίσκονται στα διαστήματα  $\bar{x} \pm s$ ,  $\bar{x} \pm 2s$  και  $\bar{x} \pm 3s$  αντίστοιχα.

- Το κυριότερο μειονέκτημα της διασποράς είναι ότι δεν εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με το χαρακτηριστικό. Το μειονέκτημα αυτό παύει να υπάρχει με τη χρησιμοποίηση της τυπικής απόκλισης
- Απαιτούνται περισσότερες αλγεβρικές πράξεις για τον υπολογισμό τους παρά στα άλλα μέτρα.

### Συντελεστής μεταβολής

- Είναι καθαρός αριθμός.
- Δεν ενδείκνυται στην περίπτωση που η μέση τιμή είναι κοντά στο μηδέν.
- Χρησιμοποιείται ως μέτρο σύγκρισης της μεταβλητότητας, όταν έχουμε ίδιες ή και διαφορετικές μονάδες μέτρησης.
- Χρησιμοποιείται ως μέτρο ομοιογένειας ενός πληθυσμού.

### ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Από το κεφάλαιο 2 **δε θα διδαχθούν:**
  - α) Οι κλάσεις άνισου πλάτους (σελ. 74)
  - β) Τα εκατοστημόρια (σελ. 89) και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος (σελ. 92)
  - γ) Η επικρατούσα τιμή (σελ. 90,91)
  - δ) Η γραμμική παλινδρόμηση, §2.4
  - ε) Η γραμμική συσχέτιση, §2.5
  - στ) Η άσκηση 4 της σελ. 81.
- Κατά την εξέταση ασκήσεων που αναφέρονται σε ομαδοποίηση παρατηρήσεων, οι κλάσεις θα δίδονται υποχρεωτικά.
- Κατά τη διδασκαλία του ιστογράμματος συχνοτήτων **να τονιστεί ιδιαίτερα** ότι οι παρατηρήσεις στις κλάσεις κατανέμονται **ομοιόμορφα**. Επομένως, αν σε μια κλάση πλάτους  $c$  αντιστοιχούν  $v_i$  παρατηρήσεις, τότε σε ένα υποδιάστημα αυτής πλάτους  $d$  αντιστοιχούν  $v_i \frac{d}{c}$  παρατηρήσεις. Έτσι για παράδειγμα στην άσκηση 5 της σελ. 103 οι πωλητές που έκαναν πωλήσεις από 5 χιλιάδες ευρώ μέχρι 6 χιλιάδες ευρώ είναι  $14 \cdot \frac{1}{2} = 7$ .
- Κατά τη διδασκαλία της διακύμανσης να δίνονται οι τύποι 2 και 4 των σελίδων 93 & 94 αντιστοίχως.

### Κεφάλαιο 3. Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 19 διδακτικές ώρες.

Η Θεωρία των Πιθανοτήτων προσφέρει τις μεθόδους με τις οποίες προσδιορίζουμε ένα μέτρο της βεβαιότητας, με την οποία αναμένεται να πραγματοποιηθεί ή να μην πραγματοποιηθεί ένα ενδεχόμενο. Η κατοχή επομένως των βασικών στοιχείων της Θεωρίας των Πιθανοτήτων θα καταστήσει τους αυριανούς πολίτες ικανούς να συλλογίζονται με ψυχραιμία, να κρίνουν και να εκτιμούν με αντικειμενικότητα τα γεγονότα, αφού θα έχουν κατανοήσει ότι υπάρχουν τρόποι για να βρούμε αν κάποια από αυτά είναι περισσότερο πιθανά από κάποια άλλα.

Στην §3.1 εξηγούνται οι έννοιες του **πειράματος τύχης**, του **δειγματικού χώρου** και του **ενδεχομένου**. Για τα ενδεχόμενα, αφού είναι υποσύνολα του δειγματικού χώρου  $\Omega$ , ισχύει η γνωστή από την Α΄ Λυκείου άλγεβρα των συνόλων. Πρέπει επομένως οι μαθητές να εξοικειωθούν με τις πράξεις μεταξύ των συνόλων, τις οποίες και να ερμηνεύουν ως αντίστοιχες πράξεις με ενδεχόμενα. Πρέπει επίσης οι μαθητές να κατανοήσουν την αντιστοιχία ανάμεσα στις διάφορες σχέσεις των ενδεχομένων που είναι διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα και στη διατύπωση των ίδιων σχέσεων στη γλώσσα των συνόλων. Για το ξεπέραςμα των δυσκολιών που παρουσιάζονται στον προσδιορισμό του δειγματικού χώρου και των ενδεχομένων πρέπει οι διδάσκοντες για την εποπτική παρουσίασή τους να χρησιμοποιούν τα

δεντροδιαγράμματα, τους πίνακες διπλής εισόδου, τα διαγράμματα Venn κτλ., ώστε να οδηγούν τους μαθητές στο να οργανώνουν τη σκέψη τους με συστηματικό και παραστατικό τρόπο.

Για να κατανοήσουν οι μαθητές ότι στη ρίψη δύο νομισμάτων τα αποτελέσματα  $KΓ$  και  $ΓΚ$  είναι διαφορετικά, να εξεταστεί για παράδειγμα το πείραμα στην περίπτωση της ρίψης ενός δεκάρικου και ενός εικοσάρικου.

Τέλος, επειδή σημαντικό ρόλο στον υπολογισμό των πιθανοτήτων παίζει ο διαμερισμός ενός συνόλου σε ανά δύο ξένα μεταξύ τους ενδεχόμενα, πρέπει να κατανοήσουν οι μαθητές τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}A &= (A - B) \cup (A \cap B) = (A \cap B') \cup (A \cap B), \\B &= (B - A) \cup (B \cap A) = (B \cap A') \cup (B \cap A) \text{ και} \\A \cup B &= (A \cap B') \cup (A \cap B) \cup (B \cap A').\end{aligned}$$

Στην §3.2 εισάγεται η έννοια της πιθανότητας, η οποία είναι και η βασικότερη έννοια του κεφαλαίου. Επειδή η έννοια αυτή διαμορφώνεται με βάση την έννοια της σχετικής συχνότητας, κρίνεται σκόπιμο να γίνει αναφορά και στην αντίστοιχη έννοια στο κεφάλαιο της Στατιστικής (σελ. 65 του βιβλίου).

Ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά του πειράματος τύχης είναι η αβεβαιότητα για το ποιο αποτέλεσμα του πειράματος θα εμφανιστεί σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του. Επομένως, αν  $A$  είναι ένα ενδεχόμενο, δεν μπορούμε με βεβαιότητα να προβλέψουμε αν το  $A$  θα πραγματοποιηθεί ή όχι. Γι' αυτό είναι χρήσιμο να συνδυάσουμε με κάθε ενδεχόμενο  $A$  έναν αριθμό, που θα είναι ένα μέτρο της "προσδοκίας" με την οποία αναμένουμε την πραγματοποίηση του  $A$ . Τον αριθμό αυτό τον ονομάζουμε πιθανότητα του  $A$ . Πώς θα γίνει όμως η "εκχώρηση" των πιθανοτήτων στα διάφορα ενδεχόμενα του πειράματος τύχης; Πώς δηλαδή θα κατασκευάσουμε μια κλίμακα πιθανότητας, με τη βοήθεια της οποίας σε κάθε ενδεχόμενο θα εκχωρούμε την αντίστοιχη πιθανότητα, όπως ακριβώς κάνουμε για τη μέτρηση της θερμοκρασίας κατασκευάζοντας, για παράδειγμα, τη θερμομετρική κλίμακα Κελσίου;

Συμφωνούμε ότι στην κλίμακα της πιθανότητας στο αδύνατο ενδεχόμενο θα αντιστοιχεί ο αριθμός 0, ενώ στο βέβαιο ενδεχόμενο ο αριθμός 1 (όπως και στην κοινή γλώσσα λέμε για το αδύνατο ενδεχόμενο ότι έχει πιθανότητα 0%, ενώ το βέβαιο 100%). Είναι λογικό να δεχτούμε ότι η πιθανότητα κάθε άλλου ενδεχομένου θα βρίσκεται ανάμεσα στο 0 και στο 1. Πώς θα γίνει όμως η εκχώρηση της πιθανότητας σε ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο; Σε ένα πείραμα που υπάρχει το στοιχείο της "συμμετρίας" είναι λογικό να υποθέσουμε ότι τα απλά ενδεχόμενα του πειράματος είναι ισοπίθανα, οπότε η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου  $A$  με  $\kappa$  στοιχεία θα τείνει στον αριθμό  $\frac{\kappa}{\nu}$  και το όριο αυτό το ορίζουμε και ως πιθανότητα του  $A$ ,

δηλαδή  $P(A) = \frac{\kappa}{\nu}$ , που αποτελεί και τον **κλασικό ορισμό** της πιθανότητας. Η  $P(A)$  που ορίζεται με αυτό τον τρόπο ικανοποιεί τις απαιτήσεις μιας κλίμακας πιθανότητας, αφού ισχύουν:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$ .

Πώς όμως γίνεται η εκχώρηση των πιθανοτήτων, όταν ο δειγματικός χώρος αποτελείται από μη ισοπίθανα αποτελέσματα ή έχει άπειρο πλήθος στοιχείων. Στις περιπτώσεις αυτές η Θεωρία των Πιθανοτήτων χρησιμοποιεί τον ορισμό που αναφέρεται στην αξιωματική θεμελίωση της Θεωρίας των Πιθανοτήτων, η οποία έγινε από τον Α.Ν. Κοιμογοφφ. Σύμφωνα με τη θεμελίωση αυτή, αν  $\Omega$  είναι ένας δειγματικός χώρος και  $\mathcal{D}$  η αντίστοιχη κλάση των ενδεχομένων, τότε μέτρο πιθανότητας ονομάζεται κάθε συνάρτηση

$$P : \mathcal{D} \rightarrow R$$

για την οποία ισχύουν οι ιδιότητες:

- $0 \leq P(A) \leq 1$ , για κάθε  $A \in \mathcal{D}$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ , αν  $A \cap B = \emptyset$ .

Η θεωρία του Kolmogoroff έχει το πλεονέκτημα να είναι φυσική, απλή και να ικανοποιεί τις σύγχρονες απαιτήσεις της αυστηρότητας. Συνδέει τη Θεωρία των Πιθανοτήτων με τη Θεωρία του Μέτρου και της Ολοκλήρωσης και έτσι εφοδιάζεται με ισχυρά εργαλεία και τεχνικές από άλλους αναπτυγμένους κλάδους των Μαθηματικών. Πέραν τούτου η αυστηρή θεμελίωση ήταν αυτή που επέτρεψε την αλματώδη ανάπτυξη της Θεωρίας των Πιθανοτήτων.

Όμως, στο διδακτικό βιβλίο υιοθετήθηκε για διδακτικούς λόγους ο απλούστερος αξιωματικός ορισμός που αναφέρεται στη σελίδα 149, άμεση συνέπεια του οποίου είναι και οι παραπάνω ιδιότητες, οι οποίες αναφέρονται στον ορισμό κατά Kolmogoroff.

Η παράγραφος 3.2 ολοκληρώνεται με τους κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων, οι οποίοι αποδεικνύονται για δειγματικούς χώρους με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Είναι σκόπιμο να δοθεί έμφαση στην εποπτική ερμηνεία των κανόνων αυτών.

### **Οι διδάσκοντες να ενημερωθούν ενυπόγραφα.**

**Ο ΥΦΥΠΟΥΡΓΟΣ**

**ΘΕΟΔΩΡΟΣ Π. ΠΑΠΑΘΕΟΔΩΡΟΥ**

### **Εσωτ. Διανομή**

- Γραφείο Υφυπουργού
- Γραφείο Γενικού Γραμματέα
- Γραφείο Ειδικού Γραμματέα
- Δ/νση Σπουδών Δ.Ε., Τμήμα Β΄
- Δ/νση Ιδιωτικής Εκπ/σης
- Δ/νση Π.Ο.Δ.Ε.
- Δ/νση Ξένων και Μειονοτικών Σχολείων
- Δ/νση Ειδικής Αγωγής
- ΣΕΠΕΔ