Οι κωνικές τομές από την άποψη της στοιχειώδους Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Μιχαήλ Τζούμας
Σχ. Σύμβουλος Μαθηματικών
Ιωσήφ Ρωγών και Βεΐκου
302 00 Μεσολόγγι
mtzoumas@sch.gr

Περίληψη

Ο κύκλος, η παραβολή, η έλλειψη και η υπερβολή εμφανίζονται από την αρχαιότητα ως τομή ενός επιπέδου με έναν κώνο και αυτός είναι ο λόγος που ονομάζονται κωνικές τομές. Πολύ αργότερα ορίστηκαν αλγεβρικά και μελετήθηκαν διεξοδικά μέσα από την Αναλυτική Γεωμετρία. Πολλές από τις ιδιότητες των κωνικών τομών (κ.τ.) μπορούν να μελετηθούν με τη θεωρία της στοιχειώδους Ευκλείδειας Γεωμετρίας, δηλαδή της Γεωμετρίας που διδάσκεται σήμερα στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση της χώρας μας. Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε και μελετάμε μερικές από τις ιδιότητες αυτές, που εμφανίζονται στην ύλη του βιβλίου της Β′ Λυκείου.

Abstract

The circle, the parabola, the ellipse and the hyperbola appear since antiquity as the intersection of a plane and a cone, hence their name “conics”. In later times, they were defined algebraically and have been thoroughly studied through Analytic Geometry. Many properties of conics can be studied using the theory of elementary Euclidean Geometry (which is being taught nowadays in high schools). In the sequel, we present and study several of these properties, which appear in the textbooks of the 2nd grade of the Greek Lyceum.

1. Εισαγωγή.

Ιστορικά, οι κ. τ. εμφανίζονται στα μέσα του 4^{ου} αιώνα π.Χ. στα έργα του Μεναίχμου. Ο Αρχιμήδης (3^{ος} π. Χ αιώνας) χρησιμοποίησε συχνά τις ιδιότητες τους στις εργασίες του. Εκείνος όμως που ασχολήθηκε συστηματικά μαζί τους ήταν ο Απολλώνιος (265-170 π. Χ.) στα κωνικά. Πλήθος πληροφορίες σχετικά με την ιστορική διαδρομή των κ. τ. μπορεί να βρει κάποιος στη μεταπτυχιακή εργασία του Δ. Μπουνάκη [1]. Στη μακρόχρονη διαδρομή τους καταναλώθηκε πολύ μελάνι για την καταγραφή και τη μελέτη τους. Για τους Έλληνες αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της ιστορίας τους και του πολιτισμού τους, ως μέρος της Γεωμετρίας και γενικότερα των Μαθηματικών στα οποία διέπρεψαν και έτσι θα πρέπει να αντιμετωπίζονται.

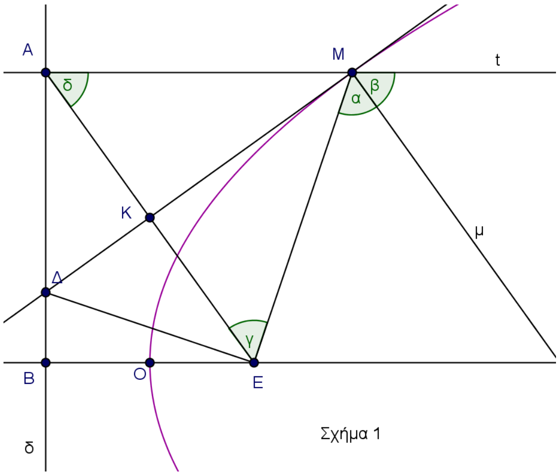
Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση εμφανίζονται τα τελευταία 30 χρόνια. Άλλοτε τυγχάνουν της προσοχής και του ενδιαφέροντος των μαθητών (αλλά και των καθηγητών) και άλλοτε όχι. Διδάχτηκαν και διδάσκονται αποκλειστικά με τη χρήση της Αναλυτικής Γεωμετρίας και όχι άδικα, αφού συμβάλουν τα μέγιστα στο να κατανοήσει κάποιος αυτό τον κλάδο των Μαθηματικών, που πράγματι είναι ένα σημαντικό εργαλείο στα χέρια των μελετητών και των ερευνητών. Όμως, με δεδομένο ότι η γνώση καταχτιέται μέσα από τις πολλές αναπαραστάσεις και τις πολύπλευρες οπτικές, θα πρέπει να συμπεράνουμε ότι για την κατανόηση των κ. τ. θα μπορούσε ή θα έπρεπε κάποιος να χρησιμοποιεί στη διδασκαλία του και την σΕΓ. Ωστόσο, αν αποφασίζαμε να διδάξουμε τις κ. τ. με τα κλασσικά εργαλεία διδασκαλίας των Μαθηματικών (κανόνα και διαβήτη) στον μαυροπίνακα της τάξης μάλλον σύγχυση και προβλήματα θα προκαλούσαμε. Όμως σήμερα, στη ψηφιακή εποχή που έχει ανατείλει ο δάσκαλος των Μαθηματικών έχει πολλές δυνατότητες, χρησιμοποιώντας λογισμικά όπως το Geogebra το Cabri ή το Sketchpad κ.α., να αναπτύξει αυτού του είδους τη διδασκαλία

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να δειχτεί ότι η χρήση της τεχνολογίας είναι σύμμαχος και βοηθός του εκπαιδευτικού στο έργο του, αλλά και πολύτιμος σύμμαχος του μαθητή στην κατάκτηση της γνώσης. Στη δεύτερη παράγραφο θα παρουσιαστεί η παραβολή και μερικές από τις ιδιότητες (εφαρμογές ή ασκήσεις) αυτής, που περιέχονται στο σχολικό βιβλίο, στην τρίτη η έλλειψη και στην τέταρτη η υπερβολή. Η μελέτη θα βασιστεί στο σχολικό βιβλίο της Β′ Λυκείου [2]. Ελάχιστα σημεία που πιθανόν προκύψουν κατά τη διάρκεια της μελέτης μας και δεν θα βρίσκονται στο βιβλίο της Α′ και Β′ Λυκείου [3], θα αναλυθούν και θα αποδειχτούν εκεί που θα εμφανιστούν. Επίσης για την πληρότητα του άρθρου και τη διευκόλυνση του αναγνώστη, θα αναφερθούν μερικά μικρά τμήματα από άλλη εργασία μας (βλ. [5]). Τα τμήματα αυτά θα επισημαίνονται και θα είναι μέσα σε εισαγωγικά.

2. Η Παραβολή

Ορισμός 2.1 [2]: Έστω ένα σημείο Ε και μια ευθεία , που δεν περιέχει το Ε. Ονομάζεται **παραβολή** με **εστία** το σημείο Ε και **διευθετούσα** την ευθεία δ ο γεωμετρικός τόπος (γ.τ.) C των σημείων του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από το Ε και τη δ .

Αναφέρεται στην [5] ότι: «Για να βρούμε το σημείο Μ της παραβολής, από το σημείο Α στη διευθετούσα δ φέρουμε κάθετη σ' αυτή. Έστω Μ η τομή της κάθετης αυτής με τη μεσοκάθετη στο τμήμα ΑΕ στο μέσον Κ αυτού. Προφανώς, το Μ είναι σημείο του γ.τ., αφού ΜΕ=ΜΑ. Η κάθετη από το Ε στη δ προσδιορίζει το Β και αποτελεί τον οριζόντιο άξονας x′x, ενώ η μεσοκάθετη στη ΒΕ αποτελεί τον κατακόρυφο άξονα y′y. Η τομή τους Ο προσδιορίζει την κορυφή της παραβολής. Προφανώς το Κ ανήκει στον κατακόρυφο άξονα, αφού $OK // \delta$ και Ο μέσο της ΒΕ. Επιπλέον η ΑΕ διχοτομεί τη γωνία $O\widehat{E}M$, αφού $O\widehat{E}A = E\widehat{A}M$ και $A\widehat{E}M = E\widehat{A}M$ ».



Σχήμα 1

Από τα παραπάνω γίνεται, πλέον, φανερό ότι για να βρούμε την εφαπτομένη της παραβολής σε ένα σημείο αυτής Μ, φέρνουμε από το Μ κάθετη στη δ, προσδιορίζουμε το Α και φέρνουμε τη μεσοκάθετη στην ΑΕ [5].

Πρόταση 2.1 (βλ. [5])(Ανακλαστική ιδιότητα). Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας παραβολής στο σημείο επαφής Μ διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζει η ΜΕ και η ημιευθεία Μt, που είναι ομόρροπη του $\overrightarrow{OE}$.

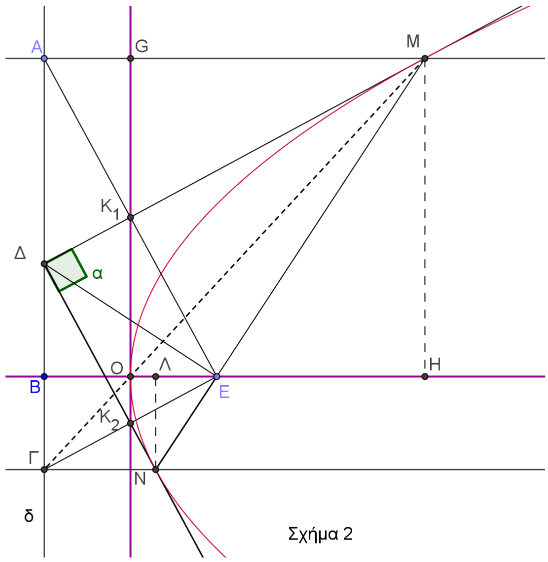
Απόδειξη. Έστω Μμ η κάθετη στην ΚΜ στο σημείο Μ. Προφανώς ισχύει $\hat{a} = \hat{\beta}$, αφού $\hat{\alpha} = \hat{\gamma}$, $\hat{\beta} = \hat{\delta}$ και επιπλέον ισχύει $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$.

Πρόταση 2.2 (βλ. [5]) (Εφαρμογή 2 σελ. 98 και Άσκ. 6, σελ. 100 [2]). Αν η εφαπτομένη της παραβολής (Σχήμα 2) στο σημείο Μ αυτής τέμνει τη διευθετούσα στο σημείο Δ και τον άξονα y′y στο K_1, τότε ισχύει ότι:

1. $M\widehat{E}\Delta = 90^o$
2. $EK_1 \perp M\Delta$
3. $EK_1^2 = K_1M \cdot K_1\Delta$

Πρόταση 2.3 (Εφαρμογή 1, ii, σελ.96 [2]). Έστω η παραβολή C και ε_1 και ε_2 δύο εφαπτόμενες αυτής στα σημεία Μ και Ν (Σχήμα 2). Να δειχθεί ότι η ευθεία ΜΝ διέρχεται από την εστία Ε της παραβολής, αν και μόνον αν το σημείο τομής των εφαπτόμενων Δ ανήκει στη διευθετούσα.

Απόδειξη. Αν M, E και N είναι συνευθειακά, τότε οι εφαπτόμενες στα M και N θα τέμνονται κάθετα στο Δ, αφού οι ΕΓ και ΕΑ διχοτομούν παραπληρωματικές γωνίες και είναι μεσοκάθετες στις ΝΔ και ΜΔ. Προφανώς το Δ είναι το μέσον του ΑΓ. Αντιστρόφως, έστω το Δ σημείο της διευθετούσας δ. Προσδιορίζουμε τα Α και Γ επ' αυτής, ώστε ΔΑ=ΔΕ=ΔΓ. Τότε ΔΜ και ΔΝ είναι οι εφαπτόμενες (Σχήμα 2). Αφού το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο και οι ΕΑ και ΕΓ διχοτόμοι αντίστοιχα των γωνιών $O\hat{E}M$ και $O\hat{E}N$, τα σημεία M, E και N είναι συνευθειακά.



Σχήμα 2

Πόρισμα 2.4. Έστω M, N και E συνευθειακά, όπου M και N σημεία της παραβολής και E η εστία της. Τότε M,O και Γ, όπου Γ η προβολή του N στη διευθετούσα, συνευθειακά (Σχήμα 2).

Απόδειξη. Με το σύμβολο $\sim$ συμβολίζουμε την ομοιότητα. Εύκολα βλέπουμε ότι $\triangle BE\Gamma \sim \triangle EA\Gamma \sim \triangle K_1MA \sim \triangle GMK_1$ (Σχήμα 2). Οπότε

$$\frac{BE}{B\Gamma} = \frac{GM}{GK_1} \Leftrightarrow \frac{2BO}{B\Gamma} = \frac{GM}{\frac{GO}{2}} \Leftrightarrow \frac{BO}{B\Gamma} = \frac{GM}{GO} \tag{2.1}$$

Η τελευταία αναλογία της σχέσης (2.1) και το γεγονός ότι τα τρίγωνα ΟΒΓ και MGO είναι ορθογώνια δείχνουν την πρόταση.

Πρόταση 2.5 (Άσκ. 5, σελ. 100 [2]). Έστω η παραβολή C και η εφαπτομένη ε αυτής σε ένα σημείο της M. Αν η MO τέμνει την διευθετούσα στο Γ, να δειχθεί ότι ΓΕ//ε (Σχήμα 2).

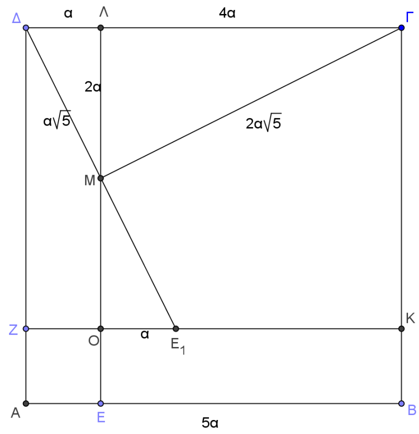
Απόδειξη. Από το προηγούμενο Πόρισμα 2.4, το Γ συμπίπτει με το ίχνος του N στη διευθετούσα.

Πρόταση 2.6 (Εφαρμογή, σελ. 92 [2]). Έστω η παραβολή C και μια ευθεία που διέρχεται από την εστία της τέμνει την παραβολή στα σημεία M και N. Να αποδειχτεί ότι το γινόμενο των αποστάσεων των M και N από τον οριζόντιο άξονα είναι σταθερό.

Απόδειξη. Από το Σχήμα 2 είναι φανερό ότι

$$MH \cdot N\Lambda = AB \cdot B\Gamma = BE^2 .$$

Πρόταση 2.7 (Άσκ. 4, σελ. 100 [2]). Έστω σημείο Μ της παραβολής C. Να αποδειχθεί ότι ο κύκλος με διάμετρο ΕΜ, όπου Ε η εστία της παραβολής, εφάπτεται στον κατακόρυφο άξονα y′y.



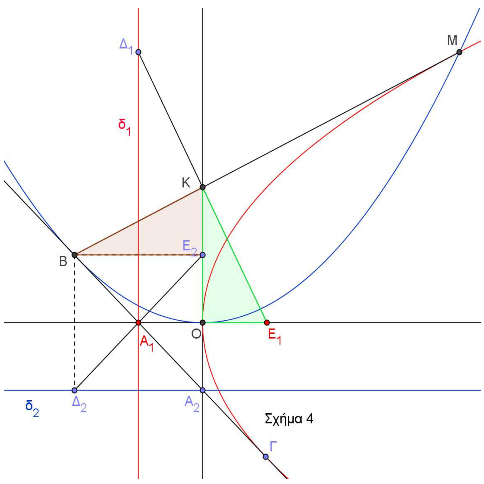
Σχήμα 3

Απόδειξη. Ο περιγεγραμμένος κύκλος στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΕΚ_1Μ$ (Σχήμα 2) έχει το κέντρο του $Ο_1$ στο μέσον της ΕΜ, οπότε $Ο_1Κ_1$ είναι κάθετη στο άξονα y′y.

Πρόταση 2.8 (Άσκ. 7, σελ. 100 [2]). Έστω η παραβολή C και ένα σημείο της Μ. Φέρουμε την εφαπτομένη στο Μ και έστω Μ′ το σημείο της τομής αυτής με τον οριζόντιο άξονα x′x. Αν η παράλληλη προς τον άξονα από το Μ τέμνει τη διευθετούσα στο Α, να αποδειχθεί ότι το τετράπλευρο ΜΑΜ′Ε είναι ρόμβος.

Απόδειξη. Αυτό ισχύει, αφού οι διαγώνιες αυτού (Σχήμα 2) τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται (θυμίζουμε ότι η ΕΑ διχοτομεί τη γωνία $O\widehat{E}A$).

Λήμμα 2.9. Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ, θεωρούμε τα Ε και Ζ στις ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα, ώστε $5 \cdot AE = AB$ και $5 \cdot AZ = A\Delta$. Αν Ο είναι το σημείο τομής των κάθετων στις ΑΒ στο Ε και ΑΔ στο Ζ, να αποδειχθεί ότι το Γ είναι το κοινό σημείο τομής των παραβολών που έχουν κορυφή το Ο και διευθετούσες τις ΑΒ και ΑΔ.



Σχήμα 4

Απόδειξη. Αν Ο είναι η κορυφή και ΑΔ η διευθετούσα μιας παραβολής, τότε το $Ε_1$, όπου $ΟΕ_1$=ΟΖ, θα είναι η εστία της. Το Μ, σημείο τομής της $ΔΕ_1$ και της ΟΛ είναι μέσον της $ΔΕ_1$. Εύκολα υπολογίζει κάποιος τα τμήματα στο Σχήμα 3. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα το τρίγωνο ΜΓΔ είναι ορθογώνιο, οπότε το Γ είναι σημείο της παραβολής με κορυφή το Ο και διευθετούσα την ΑΔ. Από τη συμμετρία του σχήματος το σημείο Γ ανήκει επίσης στην παραβολή με κορυφή το Ο και διευθετούσα την ΑΒ.

Πρόταση 2.10 (Άσκ. 8, σελ. 100 [2]). Δίνονται οι παραβολές C_1: $y^2=2px$ και C_2: $x^2=2py$.

1. Να αποδείξετε ότι αυτές τέμνονται στα σημεία (0,0) και Μ(2p,2p).
2. Αν οι εφαπτόμενες των $C_1(E_1,\delta_1)$ και $C_2(E_2,\delta_2)$ στο σημείο Μ τέμνουν τις C_2 και C_1 στα Β και Γ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι η ΒΓ είναι η κοινή εφαπτομένη των παραβολών.

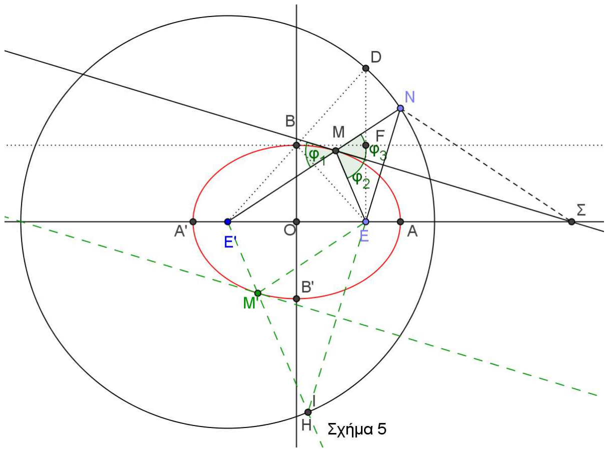
Απόδειξη. 1. Προκύπτει αμέ-σως από το Λήμμα 2.9.

2. Έστω Β το σημείο τομής της ΜΚ με την κάθετη στην ΟΚ στο σημείο E_2. Τα τρίγωνα OE_1K και E_2KB είναι ίσα. Έτσι $E_2B=2\cdot OA_1$, οπότε η εφαπτομένη της C_2 στο B είναι η A_1A_2, αφού είναι μεσοκάθετη στην $E_2\Delta_2$. Ομοίως για την εφαπτομένη της C_1 στο Γ.

3. Η Έλλειψη.

Ορισμός 3.1. Έστω E' και E δυο σημεία ενός επιπέδου. Ονομάζεται έλλειψη με εστίες τα σημεία E' και Ε ο γεωμετρικός τόπος (γ.τ.) C των σημείων του επιπέδου, των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα E' και E είναι σταθερό ($=2\cdot\alpha$) και μεγαλύτερο του EE' ($=2\cdot\gamma$).

Έχει γραφεί στην [5] ότι: «Για να βρούμε ένα σημείο M της έλλειψης, παίρνουμε ένα σημείο N στον κύκλο ($E', 2\cdot a$) και έστω M το σημείο τομής της $E'N$ και της μεσοκάθετης στο τμήμα ΝΕ (Σχήμα 5). Προφανώς το M είναι σημείο του γ.τ,. αφού $ME'+ME=ME'+MN=2\cdot a$. Τα E' και E ονομάζονται εστίες της έλλειψης και η EE' εστιακή απόσταση. Το μέσον O του EE' ονομάζεται κέντρο της έλλειψης και η ευθεία EE' είναι ο οριζόντιος άξονας, ενώ η κάθετη στο μέσον O του EE' είναι ο κατάκόρυφος άξονας. Αποδεικνύεται ότι το M είναι το μοναδικό σημείο της έλλειψης που ανήκει στη μεσοκάθετη EN. Δηλαδή, η μεσοκάθετη στο EN είναι η εφαπτόμενη στην έλλειψη. Έτσι, για να φέρουμε την εφαπτομένη σ' ένα σημείο M της έλλειψης ή από ένα σημείο Σ στο εξωτερικό της, αρκεί να προσδιορίσουμε το σημείο



Σχήμα 5

N του κύκλου ($E', 2\cdot a$). Η κάθετη από το E στον οριζόντιο άξονα $x'x$ προσδιορίζει επί του κύκλου το D. Η μεσοκάθετη στο ED προσδιορίζει το B στον κατακόρυφο άξονα, που είναι το μέσον B του $E'D$, οπότε και $EB=\alpha$ (διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου). Αν ορίσουμε $OB=\beta$, στο ορθογώνιο τρίγωνο EOB, προφανώς θα έχουμε τη γνωστή μας σχέση $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$. Το OA λέγεται οριζόντιος ημιάξονας, ενώ το τμήμα OB κατακόρυφος ημιάξονας. Τα α και β προσδιορίζουν πλήρως την έλλειψη, γι' αυτό πολλές φορές γράφουμε η έλλειψη $C(\alpha,\beta)$. Τέλος, για τις ιδιότητες της έλλειψης (σελ. 102, [2]), η εφαρμογή του θεωρήματος των διαμέσων στο τρίγωνο $E'ME$ (το M σημείο του 1ου τεταρτημόριου), θέτοντας $ME=x$, $ME'=2\cdot a-x$, $x\in(\alpha-\gamma,\alpha)$, δίνει

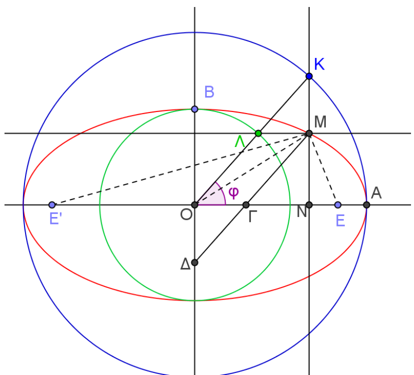
$$OM^2=x^2-2\alpha x+2a^2-\gamma^2.$$

Η διάμεσος, λοιπόν, εύκολα φαίνεται ότι είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του x, ήτοι $\beta\le OM\le\alpha$. Επιπλέον, η προέκταση της NE (Σχήμα 5) τέμνει τον κύκλο (Ε′,2α) στο H. Από το ισοσκελές τρίγωνο $HE'N$ φαίνεται ότι το τετράπλευρο $E'M'EM$ είναι παραλληλόγραμμο και συνεπώς το O, σημείο τομής των διαγώνιων αυτού, είναι κέντρο συμμετρίας αυτής. Η συμμετρία ως προς τον άξονα $x'x$ είναι προφανής, ενώ η συμμετρία ως προς το κέντρο O και τον άξονα $x'x$ συνεπάγεται και τη συμμετρία ως προς τον κατακόρυφο άξονα $y'y$. Έτσι, κάθε σημείο της έλλειψης βρίσκεται στο εξωτερικό του κύκλου (O,OB) και στο εσωτερικό του (O,OA), Σχήμα 6.»

Πρόταση 3.1 [5](Ανακλαστική ιδιότητα σελ. 108 [2]). Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας έλλειψης με εστίες Ε′ και Ε, στο σημείο επαφής M, διχοτομεί τη γωνία $E'\widehat{M}E$.

Πρόταση 3.2 (Άσκ. 5, σελ. 112 [2]). Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες στα άκρα της διαμέτρου μιας έλλειψης είναι παράλληλες. (Διάμετρος λέγεται το τμήμα που συνδέει δυο συμμετρικά σημεία αυτής ως προς το κέντρο O).

Απόδειξη. Στο Σχήμα 5, ήδη, έχουμε αποδείξει (βλ. και [5]) ότι τα σημεία στα άκρα μια διαμέτρου είναι συμμετρικά ως προς κέντρο και επιπλέον οι εφαπτόμενες είναι κάθετες στην ΝΝ′, συνεπώς παράλληλες μεταξύ τους.



Σχήμα 6

Πρόταση 3.3 (Παραμετρικές εξισώσεις της έλλειψης, σελ. 106 [2]). Έστω δύο ομόκεντροι κύκλοι C_1*: (Ο,α)* και C_2*: (Ο,β)* ($\beta < \alpha$) και η ακτίνα *ΟΚ* του C_1, τέμνει τον C_2 στο *Λ*. Αν η κάθετη από το *Κ* στον οριζόντιο άξονα, τέμνει στο *Μ* την κάθετη από το *Λ* στον κατακόρυφο άξονα, τότε το *Μ* ανήκει σε έλλειψη.

Απόδειξη. Έστω *Β* το σημείο τομής του κατακόρυφου άξονα με τον κύκλο C_2, *Ε* και *Ε'* δυο σημεία του οριζόντιου άξονα (Σχήμα 6), έτσι ώστε *ΒΕ=ΒΕ′=α* και *Ν* η προβολή του *Μ* στον οριζόντιο άξονα. Είναι φανερό ότι *Ε'Ε=2γ*. Υψώνοντας στο τετράγωνο και χρησιμοποιώντας το θεώρημα των διαμέσων, έχουμε

$$\begin{aligned} & ME + ME' = 2\cdot a \Leftrightarrow \\ & ME\cdot ME' = a^2+\beta^2 - MO^2 = a^2+\beta^2-(ON^2+MN^2) \Leftrightarrow \\ & ME\cdot ME' = a^2(1-\sigma\upsilon\nu^2\varphi)+\beta^2(1-\eta\mu^2\varphi) \Leftrightarrow \\ & ME\cdot ME' = a^2-\gamma^2\sigma\upsilon\nu^2\phi \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Όμως η τελευταία από τις (2.2) ισχύει, αφού από το Πυθαγόρειο Θεώρημα και λίγες αλγεβρικές πράξεις προκύπτει:

$$ME^2\cdot ME'^2 = (MN^2+NE^2)(MN^2+NE'^2) =$$

$$[\beta^2\eta\mu^2\varphi+(\gamma-\beta\sigma\upsilon\nu\varphi)^2]\cdot[\beta^2\eta\mu^2\varphi+(\gamma+\beta\sigma\upsilon\nu\varphi)^2] = (\alpha^2-\gamma^2\sigma\upsilon\nu^2\phi)^2,$$

η οποία αποδεικνύει την πρόταση.

Πρόταση 3.4 (Άσκ. 6 σελ. 113 [2]). Έστω η έλλειψη *C(α,β)* και ένα σημείο της *Μ* (βλ. Σχήμα 6). Έστω το *Κ*, σημείο τομής της κάθετης από το Μ στον οριζόντιο άξονα και του κύκλου *C(Ο,α)*, όπου *Ο* το κέντρο της έλλειψης. Αν από το *Μ* φέρουμε την παράλληλη στην *ΟΚ*, αυτή τέμνει τον οριζόντιο άξονα στο *Γ* και τον κατακόρυφο στο *Δ*. Τότε ισχύει ότι *ΜΓ=β* και *ΜΔ=α*.

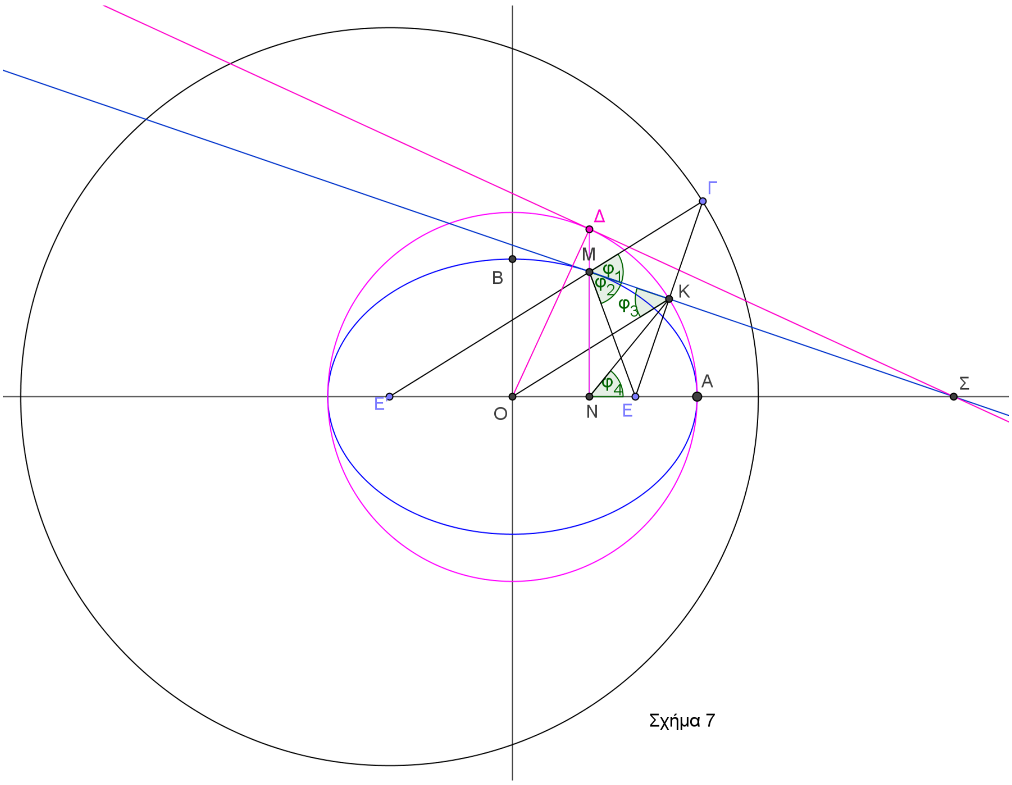
Απόδειξη. Η απόδειξη είναι προφανής από την Πρόταση 3.3 και τα παραλληλόγραμμα που σχηματίζονται.

Πόρισμα 3.5 (Εφαρμογή, σελ. 107 [2]). Έστω ο κύκλος *C: (Ο,α)*, και ένα σημείο *Κ*, του οποίου η ορθή προβολή στον οριζόντιο άξονα είναι το *Ν*. Πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα *ΚΝ* ορίζουμε σημείο *Μ*, τέτοιο ώστε, $\frac{NM}{NK} = \frac{\beta}{\alpha}$, $0 < \beta < \alpha$. Αν το *Κ* κινείται στον κύκλο *C*, τότε το *Μ* κινείται σε έλλειψη.

Απόδειξη. Από την ομοιότητα των τριγώνων *ΚΛΜ* και *ΚΟΝ* (Σχήμα 6) και την Πρόταση 3.3 αποδεικνύεται η αλήθεια του Πορίσματος.

Πρόταση 3.6 Έστω $C(\alpha,\beta)$ η έλλειψη με κέντρο το O και ένα σημείο M αυτής. Αν N είναι η προβολή αυτού στον οριζόντιο άξονα και Σ το σημείο τομής της εφαπτομένης της C στο E με τον οριζόντιο άξονα, τότε $\frac{ON}{\alpha}=\frac{\alpha}{O\Sigma}$.

Απόδειξη. Από το ισοσκελές τρίγωνο $ME\Gamma$ (Σχήμα 7) προκύπτει η



Σχήμα 7

ισότητα των γωνιών φ_1 και φ_2, από την παραλληλία των OK και $E\Gamma$ η ισότητα των γωνιών φ_1 και φ_3, από το εγγράψιμο τετράπλευρο $MNEK$ η ισότητα των φ_2 και φ_4, οπότε η ισότητα των φ_3 και φ_4 συνεπάγεται την ομοιότητα των τριγώνων $\triangle OKN$ και $\triangle O\Sigma K$, η οποία δείχνει την αποδεικτέα.

Πρόταση 3.7 (Εφαρμογή 1, σελ. 109 [2]). Έστω $C_1(\alpha,\beta)$ μια έλλειψη με κέντρο O και $C_2(O,\alpha)$ ο κύκλος με κέντρο O και ακτίνα α. Αν Μ ένα σημείο της έλλειψης C_1 και Δ το σημείο που η κάθετη στον οριζόντιο άξονα τέμνει το κύκλο C_2, τότε οι εφαπτόμενες του κύκλου στο Δ και της έλλειψης στο M διέρχονται από το ίδιο σημείο Σ του οριζόντιου άξονα (Σχήμα 7).

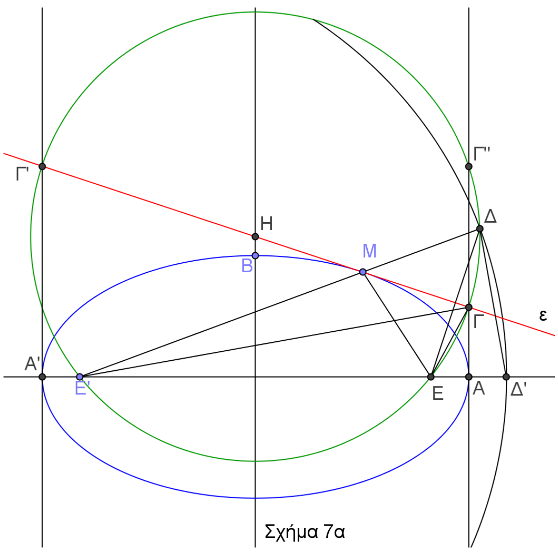
Απόδειξη. Αν Σ' είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης στον κύκλο C_2 με τον οριζόντιο άξονα, το γεγονός ότι το ΔN είναι ύψος του ορθογωνίου τριγώνου *ΟΔΣ'*, στο σχήμα 7, συνεπάγεται ότι $\frac{ON}{a} = \frac{a}{O\Sigma'}$. Έτσι, από το προηγούμενο πόρισμα προκύπτει ότι το *Σ'* ταυτίζεται με το *Σ*.

Άσκ. 3.8. Να διατυπωθούν και να αποδειχθούν αντίστοιχες προτάσεις με τις 3.6 και 3.7 για τον κατακόρυφο άξονα.

Πρόταση 3.9 (Άσκ. 7, σελ. 113 [2]). Έστω *ζ'* και *ζ* οι εφαπτόμενες στην έλλειψη *C(α,β)*, (*0<β<α*), στις κορυφές *Α'* και *Α* αντιστοίχως (Σχήμα 7α), και ε η εφαπτομένη της έλλειψης σ' ένα σημείο *Μ*. Αν η ε τέμνει τις *ζ'* και *ζ* στα σημεία *Γ* και *Γ'*, τότε ισχύει:

1. Ο κύκλος με διάμετρο το *ΓΓ'* διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης.
2. $\mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{A'\Gamma'} = \beta^2$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τον κύκλο *G(Η,ΗΕ)*, όπου το *Η* είναι το σημείο τομής της εφαπτόμενης *ε* και του κατακόρυφου άξονα. Έστω *Δ* το συμμετρικό του *Ε* ως προς την *ε*, προφανώς αυτό είναι σημείο του κύκλου *G* και ανήκει στον κύκλο *(Ε',2α)*, ο οποίος τέμνει τον οριζόντιο άξονα στο *Δ'*. Από το ισοσκελές τρίγωνο *ΔΕ'Δ'* και το γεγονός ότι το *Γ* είναι σημείο τομής των μεσοκάθετων των *ΕΔ* και *ΕΔ'* συνάγεται ότι η *ΕΓ* είναι μεσοκάθετη του ισοσκελούς τριγώνου *Ε'ΔΔ'* από την κορυφή *Ε'* και συνεπώς είναι διχοτόμος της γωνίας *ΕΕ'Δ*, έτσι το *Γ* (σημείο τομής της μεσοκάθετης της χορδής *ΕΔ* και της διχοτόμου της αντίστοιχης εγγεγραμμένης γωνίας) ανήκει στον κύκλο *G*, οπότε και το *Γ'*, αφού *ΗΓ=ΗΓ'*. Επομένως έχουμε:



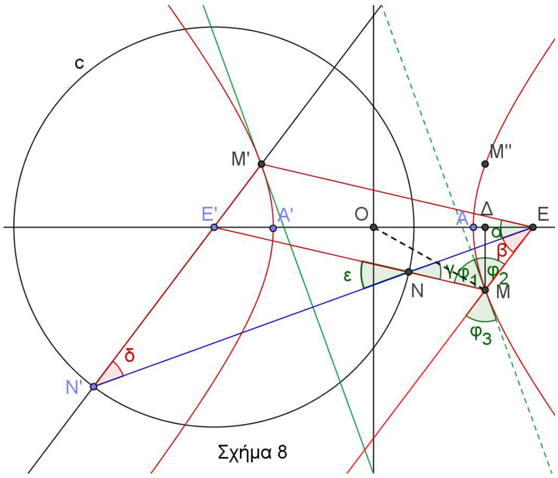
Σχήμα 7α

$$A\Gamma \times A\Gamma' = A\Gamma \times A\Gamma'' = AE \times AE' = (\alpha-\gamma)(\alpha+\gamma) = \alpha^2 - \gamma^2 = \beta^2 \qquad (2.3).$$

4. Η Υπερβολή.

Ορισμός 4.1. Έστω *Ε'* και Ε δυο σημεία ενός επιπέδου. Ονομάζεται υπερβολή με εστίες τα σημεία *Ε'* και *Ε* ο γεωμετρικός τόπος *C* των σημείων του επιπέδου των οποίων η διαφορά των αποστάσεων από τα E' και E είναι σταθερή ($=2\cdot\alpha$) και μικρότερη του $E'E$ ($=2\cdot\gamma$).

Όπως συνέβη και στις δυο προηγούμενες παραγράφους, έτσι κι εδώ, μεταφέρουμε από την [5] ότι «για να βρούμε ένα σημείο M της υπερβολής, παίρνουμε ένα σημείο N στον κύκλο $(\mathrm{E}', 2\cdot a)$ και έστω M το σημείο τομής της $E'N$ και της μεσοκάθετης στο τμήμα NE (Σχήμα 5). Προφανώς το M είναι σημείο του τόπου, αφού $ME'-ME=ME'-MN=2\cdot a$. Τα E' και E ονομάζονται εστίες της υπερβολής και η Ε′Ε εστιακή απόσταση. Το μέσον O του $E'E$ ονομάζεται κέντρο της υπερβολής και η ευθεία Ε′Ε είναι ο οριζόντιος άξονας, ενώ η κάθετη στο μέσον Ο του $E'E$ είναι ο κατακόρυφος άξονας αυτής. Το M είναι το μοναδικό σημείο της υπερβολής που ανήκει στη μεσοκάθετη του EN. Δηλαδή, η μεσοκάθετη στο EN είναι η εφαπτόμενη στην υπερβολή. Έτσι, για να φέρουμε την εφαπτομένη σ' ένα σημείο M της υπερβολής (ή από ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου), αρκεί να προσδιορίσουμε το σημείο N του κύκλου $(\mathrm{E}', 2\cdot a)$ (εφόσον προσδιορίζεται) και να φέρουμε τη μεσοκάθετη στην EN»..



Σχήμα 8

Η προέκταση της ΕΝ, προς το μέρος του Ν (Σχήμα 8), τέμνει τον κύκλο $(\mathrm{E}', 2\cdot a)$ στο Ν′. Η τομή της Ν′Ε′ με τη μεσοκάθετη στο τμήμα ΕΝ′ προσδιορίζει το Μ′, το οποίο είναι επίσης σημείο της υπερβολής, αφού $M'E-M'E'=M'N'-M'E'=N'E'=2\cdot a$. Η ισότητα των γωνιών α, β, γ, δ και ε εξασφαλίζει ότι το τετράπλευρο $EM'E'M$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε το κέντρο Ο είναι κέντρο συμμετρίας της υπερβολής. Προφανώς, ο οριζόντιος άξονας είναι άξονας συμμετρίας, οπότε (λόγω της συμμετρίας ως προς κέντρο) και ο κατακόρυφος θα είναι άξονας συμμετρίας αυτής. Τέλος, για τις ιδιότητες της υπερβολής (σελ. 116, [2]), τα σημεία A και A' λέγονται κορυφές της υπερβολής και $OA=\alpha$, αφού

$$OA = OE - AE = \gamma - \frac{2\gamma - 2a}{2} = a. \qquad (3.1)$$

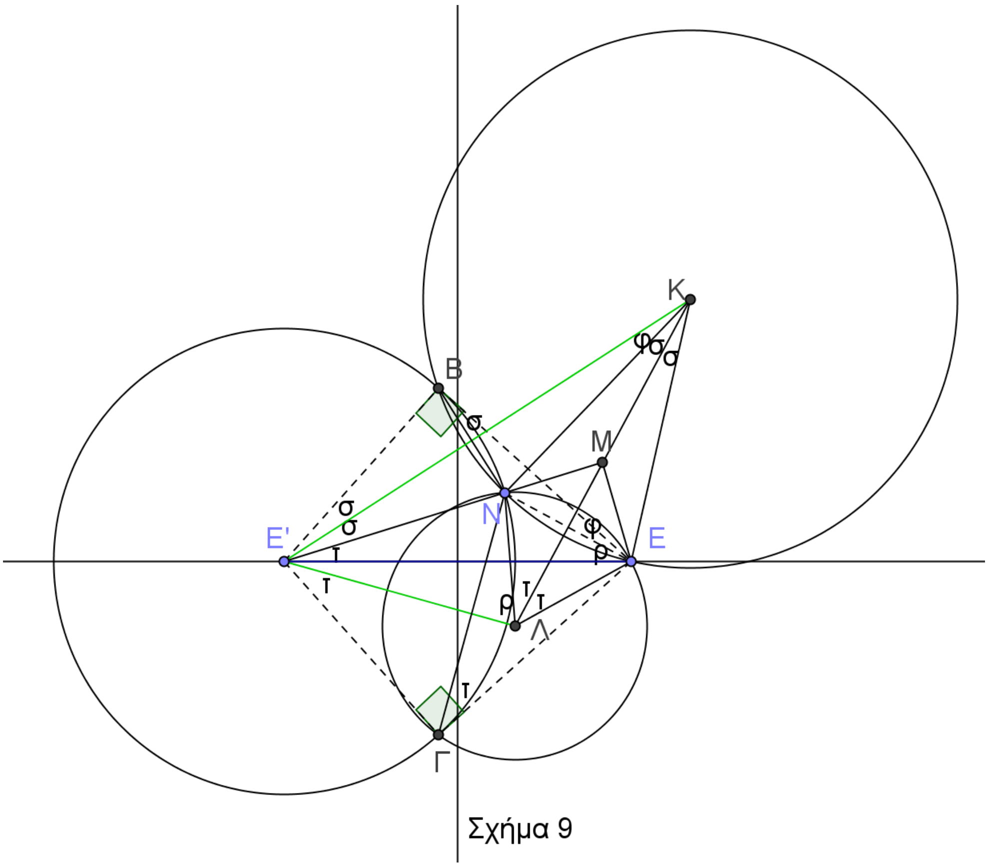
Από το δεύτερο θεώρημα των διαμέσων στο τρίγωνο Ε′ΜΕ και θέτοντας $E'M - EM = 2 \cdot a$ και $EE' = 2 \cdot \gamma$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} &E'M^2 - EM^2 = 2 \cdot E'E \cdot O\Delta \\ &(E'M - EM)(E'M + EM) = 2 \cdot 2\gamma \cdot O\Delta \qquad (3.2) \\ &2 \cdot a \cdot (E'M + EM) = 4 \cdot \gamma \cdot O\Delta \end{aligned}$$

Δεδομένου, όμως, ότι $E'M + EM \geq 2 \cdot \gamma$, από την (3.2) παίρνουμε ότι

$$4 \cdot a \cdot \gamma \leq 4 \cdot \gamma \cdot O\Delta \Leftrightarrow a \leq O\Delta,$$

δηλαδή, ότι τα σημεία της υπερβολής είναι δεξιά της ευθείας της κάθετης



Σχήμα 9

στο Α και άρα, αυτή, δεν τέμνει τον κατακόρυφο άξονα.

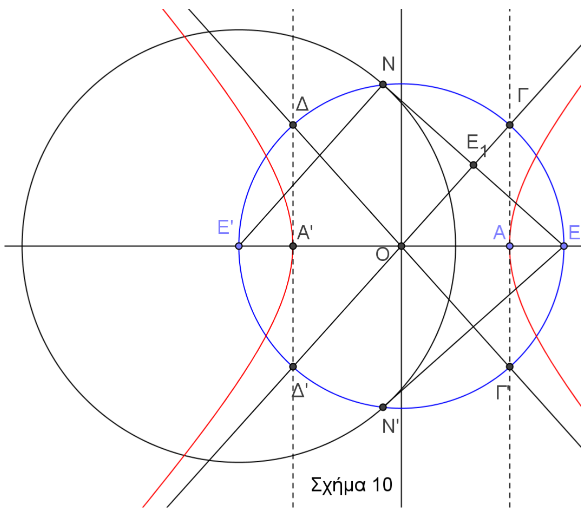
Από την κατασκευή της υπερβολής, προφανώς, όταν η προέκταση της ακτίνας του κύκλου Ε′Ν και η μεσοκάθετη της ΕΝ είναι παράλληλες, τότε δεν προσδιορίζεται σημείο της υπερβολής. Στην περίπτωση αυτή, η μεσοκάθετη της ΕΝ διέρχεται από την αρχή των αξόνων και ονομάζεται

ασύμπτωτη. Επί πλέον, η ΕΝ είναι εφαπτόμενη στον κύκλο (Ε′, $2\cdot a$) και υπάρχουν δυο τέτοιες ασύμπτωτες, που είναι μεσοκάθετες στις δυο εφαπτόμενες του κύκλου (Ε′, $2\cdot a$) από το σημείο Ε.

Πρόταση 4.1 (Ανακλαστική ιδιότητα, σελ. 121 [2])[5]. Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας υπερβολής στο σημείο επαφής Μ, διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζει η ΜΕ′ και η προέκταση της ΜΕ.

Πρόταση 4.2 (Μερική περίπτωση Άσκ. 3 σελ. 124 [2]). Αν η εφαπτομένη στην υπερβολή C στο σημείο Μ τέμνει τις ασύμπτωτες στα σημεία M_1 και M_2, τότε $MM_1=MM_2$.

Απόδειξη. Αφού οι ασύμπτωτες είναι οι μεσοκάθετες στις κοινές εφαπτόμενες στον κύκλο (Ε′,2α) από το σημείο Ε, ενώ η εφαπτόμενη στην υπερβολή η μεσοκάθετη στο τμήμα ΕΝ που ενώνει το σημείο Ν του κύκλου με το Ε, η απόδειξη της πρότασης είναι ισοδύναμη με το επόμενο πρόβλημα.



Σχήμα 10

Πρόβλημα. Έστω ένας κύκλος (Ε′,R) και ένα σημείο Ε εκτός αυτού. Αν ΒΕ και ΓΕ οι κοινές εφαπτόμενες από το σημείο στον κύκλο και Ν ένα σημείο του τόξου ΒΓ, να δειχτεί ότι η Ε′Ν διχοτομεί τη διάκεντρο ΚΛ των περιγεγραμμένων κύκλων στα τρίγωνα ΒΕΝ και ΓΕΝ (Σχήμα 9).

Απόδειξη. Στο Σχήμα 9, με το ίδιο μικρό ελληνικό γράμμα παριστάνουμε ίσες γωνίες, που η αιτιολόγηση είναι εύκολη για τον αναγνώστη, δηλαδή,

$$\begin{aligned}
&B\widehat{E'K} = K\widehat{E'N} = N\widehat{B}E = N\widehat{K}M = M\widehat{N}E = \sigma\\
&E'\widehat{K}N = B\widehat{E}N = \varphi\\
&N\widehat{E'\Lambda} = \Lambda\widehat{E}\Gamma = N\widehat{\Gamma}E = N\widehat{\Lambda}M = M\widehat{\Lambda}E = \tau\\
&N\widehat{\Lambda}E' = N\widehat{E}K = \rho
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Έτσι εύκολα προκύπτει η ομοιότητα των εξής ζευγών τριγώνων: $\triangle E'NK \sim \triangle BNE$ και $\triangle E'\Lambda N \sim \triangle \Gamma EN$, που μας αποδίδουν τις αναλογίες

$\frac{E'K}{NK}=\frac{BE}{NE}$ και $\frac{E'\Lambda}{\Lambda N}=\frac{E\Gamma}{EN}$, οπότε λόγω της ισότητας των εφαπτομένων ΒΕ και ΓΕ προκύπτει $\frac{E'\Lambda}{\Lambda N}=\frac{E'K}{NK}$. Επί-σης, εύκολα προκύπτουν οι ομοιότητες: $\triangle E'\Lambda M \sim \triangle \Lambda NM$ και $\triangle E'KM \sim \triangle KNM$, που μας δίνουν $\frac{E'\Lambda}{\Lambda N}=\frac{\Lambda M}{NM}$ και $\frac{E'K}{NK}=\frac{KM}{NM}$, από όπου προκύ-πτει το ζητούμενο.

Πρόταση 4.3 (Άσκ. 4 σελ. 123 [2]). Η εφαπτόμενη της υπερβολής στην κορυφή Α τέμνει την ασύμπτωτη στο σημείο Γ. Αν Ο το κέντρο αυτής, τότε ΟΕ=ΟΓ (Σχήμα 10).

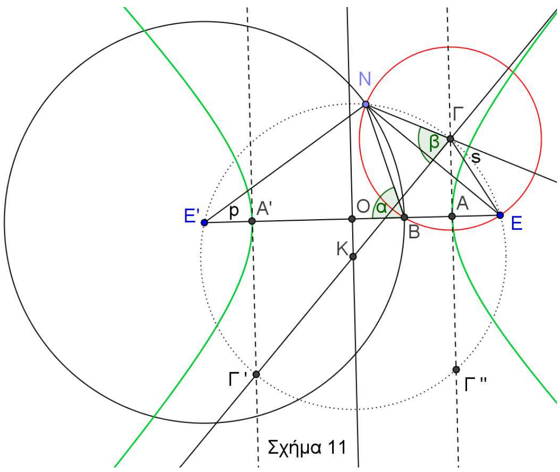
Απόδειξη. Θυμίζουμε ότι οι ασύμπτωτες αυτής είναι οι μεσοκάθετες στις κοινές εφαπτόμενες ΕΝ και ΕΝ′ από το σημείο Ε στον κύκλο (Ε′,2α), οπότε OE_1=α. Επίσης, ΟΑ=α. Η ισότητα των ορθογωνίων τριγώνων ΟΑΓ και OEE_1 αποδεικνύει ότι ΟΓ=ΟΕ.

Στο Σχήμα 10, αν θέσουμε ΑΓ=β, προκύπτει ότι $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2$. Το ορθογώνιο ΓΔΔ′Γ′ είναι γνωστό ως «**ορθογώνιο βάσης**».

Πρόταση 4.3 (Άσκ. 1 σελ. 124 [2]). Αν E_1 είναι η προβολή της εστίας Ε μιας υπερβολής στην ασύμπτωτη, τότε: 1) OE_1=α και 2) EE_1=β.

Απόδειξη. Είναι προφανής από την απόδειξη της προηγούμενης πρότασης (Σχήμα 10).

Πρόταση 4.4 (Άσκ. 2 σελ. 124 [2]). Έστω ε και ε′ οι εφαπτόμενες στις κορυφές Α και Α′ μιας υπερβολής (Σχήμα 11). Αν μια τρίτη εφαπτόμενη τέμνει τις δυο προηγούμενες στα σημεία Γ και Γ′, τότε



Σχήμα 11

1. ο κύκλος με διάμετρο το ΓΓ′ διέρχεται από τις εστίες της υπερβολής.
2. $A\Gamma \cdot A\Gamma' = \beta^2$.

Απόδειξη. Επειδή το Γ βρίσκεται στη μεσοκάθετη του ΒΕ και ΕΝ, το Γ είναι κέντρο του κύκλου (Γ,ΓΕ). Αυτό, όμως, συνεπάγεται ότι οι γωνίες α και β είναι ίσες. Τότε, $p=180°-2\cdot a=180°-2\cdot\beta=s$. Το παραπάνω συνεπάγεται ότι το Γ ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου Ε′ΕΝ. Η τομή του άξονα y′y με την μεσοκάθετη στο ΕΝ προσδιορίζει το κέντρο αυτού Κ. Από τη συμμετρία του σχήματος, το τμήμα ΓΓ′ είναι η διάμετρός του.

Αφού Α′Γ′=ΑΓ′′, θα ισχύει:

$$\begin{aligned} &A\Gamma \cdot A'\Gamma' = A\Gamma \cdot A\Gamma'' = KE^2 - KA^2 = \\ &(OE^2 - OK^2) - (OA^2 - OK^2) = \gamma^2 - \alpha^2 = \beta^2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

5. Επίλογος.

Στην παρούσα εργασία έγινε μια προσπάθεια οι κ.τ. που διδάσκονται στη Β′ Λυκείου να παρουσιαστούν μέσα από την σ.Ε.Γ., που επίσης διδάσκεται στο Λύκειο. Οι κ.τ. είναι θησαυρός και παρακαταθήκη των Αρχαίων Ελλήνων στην ανθρωπότητα, θα λέγαμε ένας πνευματικός Παρθενώνας και χρειάζονται, μάλλον, την προσοχή μας και την αγάπη μας. Οι αποδείξεις (με τη χρήση της σ.Ε.Γ.) είναι στα πλαίσια των δυνατοτήτων των μαθητών μας. Σε καμιά από αυτές δε χρειάστηκε το σχήμα της κ.τ. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι παραπάνω προτάσεις θα μπορούσαν να μετατραπούν σε προβλήματα της σ.Ε.Γ., όπως συνέβη με την Πρόταση 4.2. Τέλος, ένα πλήθος από ιδιότητες των κωνικών τομών θα μπορούσε κάποιος να δει στο [4].

Ευχαριστίες: Ευχαριστούμε τον άγνωστο κριτή, στον οποίο οφείλεται και η απόδειξη της Πρότασης 2.1, για τις χρήσιμες παρατηρήσεις του.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Δ. Μπουνάκης, «Ιστορία και μελέτη με Ευκλείδεια μέσα των Κωνικών τομών», μεταπτυχιακή εργασία, Μαθηματικό τμήμα του Πανεπιστημίου Κρήτης, 2004.
(http://web-server.math.uoc.gr:1080/erevna/diplomatikes/Bounakis_MDE.pdf)

2. Αδαμόπουλος, Βισκαδουράκης, Γαβαλάς, Πολύζος, Σβέρκος, «Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης Β′ Λυκείου», ΟΕΔΒ, 2002.

3. Αργυρόπουλος, Βλάμος, Κατσούλης, Μαρκάτης, Σιδέρης, «Ευκλείδεια Γεωμετρία Α′ και Β′ Ενιαίου Λυκείου», ΟΕΔΒ, 2001.

4. Th. Carronet, «Exercises de Géométrie», Huitième Livre, Librairie, Vuibert, Paris, 1948.

5. Μ. Τζούμας, «Οι γνωστές-άγνωστες κωνικές τομές», Πρακτικά 26ου Συνέδριου ΕΜΕ, Θεσσαλονίκη, 617-626, 13-15 Νοεμβρίου 2009.