Κωνικές τομές. Πηγή έμπνευσης για την κατασκευή προβλημάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Σπύρος Παναγιωτόπουλος
Καθηγητής Μαθηματικών
ΓΕΛ Σπερχειάδας
351 00 Λαμία
spegepana@gmail.com

Μιχαήλ Τζούμας
Σχ. Σύμβουλος Μαθηματικών
Ιωσήφ Ρωγών και Βεΐκου
302 00 Μεσολόγγι
mtzoumas@sch.gr

Περίληψη

Μια μαθηματική δραστηριότητα αποτελείται από δύο σκέλη: την κατασκευή και τη λύση ενός προβλήματος. Δυστυχώς, οι μαθηματικοί δάσκαλοι, μέχρι σήμερα, εστιάζουν στο σκέλος της λύσης του προβλήματος και παραβλέπουν εκείνο της κατασκευής. Όμως, προκειμένου να αναπτύξουν οι μαθητές μας διερευνητικό προσανατολισμό, αλλά και θετική στάση απέναντι στα Μαθηματικά, θα πρέπει να πάψουμε να αγνοούμε το σκέλος της κατασκευής προβλήματος. Για την κατασκευή προβλημάτων υψηλής ποιότητας προσφέρεται η Ευκλείδεια Γεωμετρία και ιδιαίτερα οι Κωνικές Τομές(κ.τ.), λόγω του πλήθους των ιδιοτήτων που έχουν. Η χρήση επιπλέον της σύγχρονης τεχνολογίας δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να πειραματιστούν, να εικάσουν, αλλά και να προβληματιστούν και να συμπεράνουν.

Conic Sections: Source of ideas for the problem posing of Euclidean Geometry

Spyros Panagiotopoulos
Teacher of Mathematics

Michael Tzoumas
Advisor of Math Teachers

Abstract

A mathematic activity consists of two parts: The construction of the problem and the solution of it. Unfortunately, up to the present day, teachers of mathematics focus on the process of solving the problem and overlook that of construction. However, if we wish our students to acquire an exploratory orientation along with a positive attitude towards mathematics, we should cease overlooking the part of problem construction. Euclidean Geometry, and especially Conic Sections, offers the opportunity of constructing high standard mathematical problems because of the great variety of properties it is accompanied with. Furthermore, the use of current technology offers the students the potentiality to experiment and suppose as well as to speculate and infer.

1. Εισαγωγή.

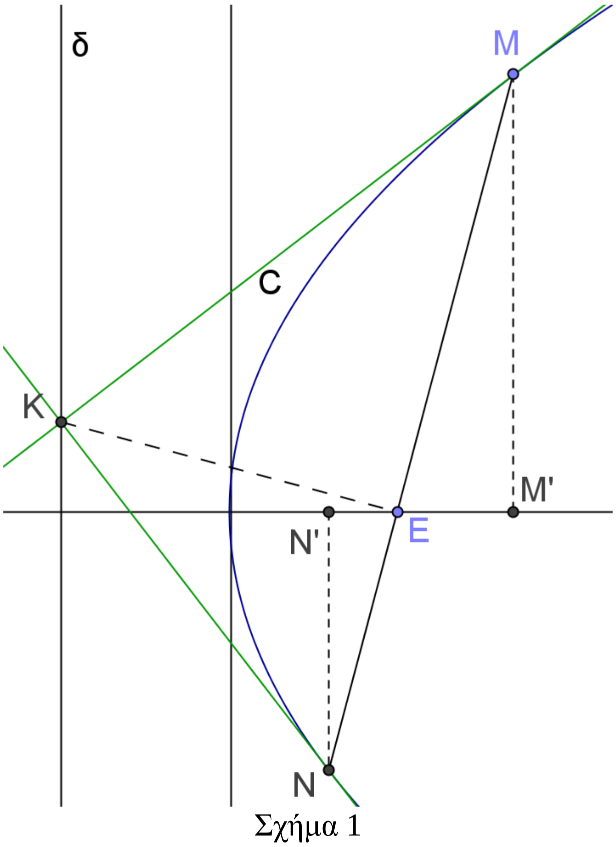
Στα πλαίσια της ενεργητικής και ερευνητικής στάσης των μαθητών για τα Μαθηματικά, κεντρική θέση κατέχει η δραστηριότητα, δηλαδή η κατασκευή και επίλυση ενός προβλήματος. Μάλιστα, ο Polya [1] στο περίφημο έργο του «How to solve it» προτείνει: «Όταν δεν μπορείς να λύσεις κάποιο πρόβλημα, προσπάθησε να λύσεις κάποιο σχετικό», προφανώς που θα κατασκευάσεις. Όμως, και πολλοί άλλοι επιστήμονες και ερευνητές υποστηρίζουν ότι οι μαθητές πρέπει να έχουν την ευκαιρία για την κατασκευή (και επίλυση) μαθηματικών προβλημάτων π.χ. [2], [3].

Συνηθισμένο αλλά και κυρίαρχο πλαίσιο για την κατασκευή και διατύπωση Μαθηματικών προβλημάτων είναι αυτό της καθημερινής ζωής. Ωστόσο, στις μεγάλες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, η εύρεση και χρήση ενός αξιόλογου τέτοιου πλαισίου δυσκολεύει σημαντικά, ιδιαίτερα στη στοιχειώδη Ευκλείδεια Γεωμετρία (σΕΓ), δεδομένου ότι τόσο στα σχολικά εγχειρίδια, όσο και στην υπάρχουσα βιβλιογραφία δεν υπάρχει ή είναι περιορισμένο. Προτείνουμε, λοιπόν, ενοποίηση των εννοιών της σΕΓ μέσα στο πλαίσιο των κ.τ., όπου ένα μεγάλο πλήθος ιδιοτήτων αυτών δίνει τη δυνατότητα αλλά και την ευκαιρία οι μαθητές να διαπραγματευτούν δημιουργικά, κάνοντας επανάληψη και επομένως κατακτώντας, ένα μεγάλο πλήθος των εννοιών αυτών. Επιπλέον, το πλαίσιο που προτείνουμε, επειδή μπορεί να διατηρηθεί σταθερό, δύναται να θεωρηθεί «ξεκούραστο», με την έννοια ότι μειώνει το νοητικό φορτίο του μαθητή που επιφέρει η συνεχής αλλαγή πλαισίου.

Η κατασκευή ενός προβλήματος μπορεί να προκύψει σε τρεις περιπτώσεις [4].

- Κατά την επίλυση ενός προβλήματος, όταν, δηλαδή, προσπαθώντας να λύσεις κάποιο πρόβλημα, σου παρουσιάζεται ένα νέο, μικρότερο ίσως από το αρχικό, ενίοτε ισοδύναμο ή και μεγαλύτερο.
- Μετά τη λύση του προβλήματος ο λύτης (ή ερευνητής), αξιοποιώντας την εμπειρία του, είναι δυνατόν να κατασκευάσει άλλα, χρησιμοποιώντας την καινούργια γνώση ή να δημιουργήσει μια καινούργια κατάσταση, αλλάζοντας πιθανόν τις συνθήκες του αρχικού.
- Όταν εκμεταλλευτούμε κατάλληλα τα εμπειρικά δεδομένα (η νέα τεχνολογία είναι πλούσια πηγή τέτοιων εμπειριών) ή ένα εξωτερικό ερέθισμα για να δημιουργήσουμε ένα εντελώς νέο και πρωτότυπο πρόβλημα.

Ορισμένοι ερευνητές ταξινομούν τα προβλήματα που κατασκευάζονται σε *δομημένα, ημιδομημένα* και *ελεύθερα*. Άλλοι πάλι σε *τυπικά* και *άτυπα*. Εμείς, όμως, εδώ δε θα ασχοληθούμε και ούτε θα μελετήσουμε τον τρόπο ταξινόμησης αυτών, αλλά θα δώσουμε παραδείγματα κατασκευής (και λύσης) προβλημάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, μέσα από τις κωνικές τομές, ώστε να αποτελέσουν εφαλτήριο, στις τελευταίες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, όσων ενδιαφέρονται για μια τέτοια προσέγγιση. Τα καινούργια προβλήματα μπορούν να γίνουν με πολλούς τρόπους, εδώ, όμως, απλά αλλάζουν οι υποθέσεις του αρχικού προβλήματος των κ.τ. (ενίοτε και τα συμπεράσματα) με άλλες ισοδύναμες που προκύπτουν από την κατασκευή ή την παρατήρηση αυτών. Όσον αφορά τον

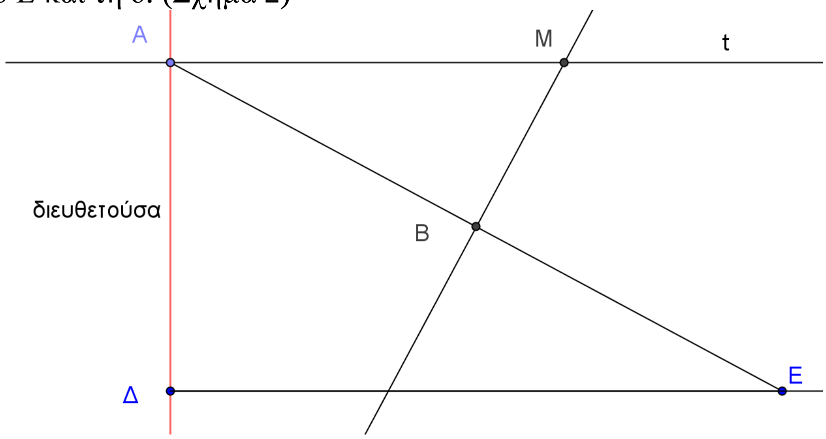


Σχήμα 1

τρόπο παρουσίασης, θα ισχύσουν τα εξής: Όταν αναφερόμαστε στην αναλυτική γεωμετρία, θα αναφερόμαστε ως Θέμα, ενώ, όταν αναφερόμαστε στην κατασκευή, θα αναφέρεται ως Πρόβλημα. Στη δεύτερη παράγραφο υπάρχουν Θέματα και Προβλήματα από την Παραβολή, στη τρίτη παράγραφο από την Έλλειψη και στη τέταρτη από την Υπερβολή.

2. Προβλήματα από την Παραβολή

Ορισμός 2.1 Έστω ένα σημείο Ε και μια ευθεία, που δεν περιέχει το Ε. Ονομάζεται **παραβολή** με **εστία** το σημείο Ε και **διευθετούσα** την ευθεία δ ο γεωμετρικός τόπος (γ.τ.) C, των σημείων του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από το Ε και τη δ. (Σχήμα 2)



Σχήμα 2

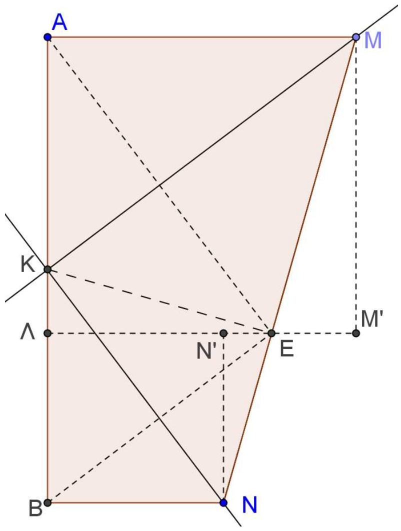
Κατασκευάζουμε την Παραβολή με ένα λογισμικό δυναμικής Γεωμετρίας (λ.δ.Γ), ως εξής. Στην ευθεία δ παίρνουμε ένα σημείο Α και φέρνουμε την ημιευθεία At κάθετη στη δ. Φέρνουμε τη μεσοκάθετη στο τμήμα ΕΑ, η οποία τέμνει την At στο Μ. Καθώς το Α διαγράφει τη δ το Μ, δημιουργεί την Παραβολή. Ένα πλήθος ιδιοτήτων της σ.Ε.Γ. γίνεται τότε φανερό, όπως φαίνεται στις [5] και [6]. Έχοντας στο μυαλό μας τις ιδιότητες αυτές, είμαστε έτοιμοι να ξεκινήσουμε την κατασκευή των προβλημάτων

Θέμα 1^{o}: Έστω η Παραβολή C με εστία το σημείο Ε και διευθετούσα την ευθεία δ. Αν ΜΝ μια χορδή της C που διέρχεται από το Ε, τότε (Σχήμα 1)

- οι εφαπτόμενες στα Μ και Ν τέμνονται στο Κ, πάνω στην δ.
- η γωνία ΜΚΝ είναι ορθή.
- η ΚΕ είναι κάθετη στην ΜΝ.
- Αν ΜΜ′ και ΝΝ′ είναι οι αποστάσεις των Μ και Ν από τον οριζόντιο άξονα, τότε το γινόμενο ΜΜ′·ΝΝ′ είναι σταθερό.

Πρόβλημα 2.1: Σε δισορθογώνιο τραπέζιο ΑΜΝΒ με Α=Β=90^o και ΜΝ=ΑΜ+ΒΝ (Σχήμα 3), ισχύουν τα εξής:

1. Οι διχοτόμοι των γωνιών Μ και Ν τέμνονται στο σημείο Κ της ΑΒ.
2. Αν Ε σημείο της ΜΝ ώστε ΜΕ=ΑΜ, η ΚΕ είναι κάθετη στην ΜΝ.
3. Η γωνία ΜΚΝ είναι ορθή.
4. Το γινόμενο των αποστάσεων των Μ και Ν από την παράλληλη στις βάσεις, από το Ε είναι σταθερό.

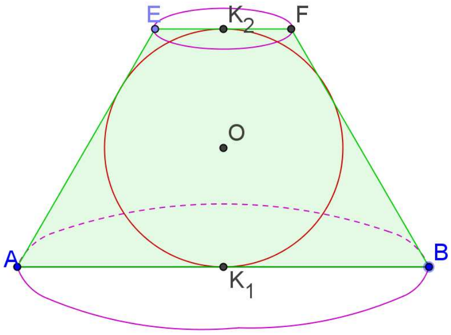


Σχήμα 3

Λύση: Το 1. είναι γνωστή άσκηση (σελ. 155), του βιβλίου Γεωμετρίας [7]. Το 2. προκύπτει από την ισότητα των τριγώνων ΑΜΚ και ΜΚΕ . Για το 3. παρατηρούμε ότι το τρίγωνο ΜΚΝ είναι ορθογώνιο, αφού η ΜΚ και ΝΚ διχοτομούν παραπληρωματικές γωνίες. Τέλος το 4. προκύπτει από το γεγονός ότι ΚΝ||ΑΕ και ΚΜ||ΒΕ, οπότε και από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΒ έχουμε ΜΜ′·ΝΝ′= ΑΛ·ΒΛ=ΕΛ^2.

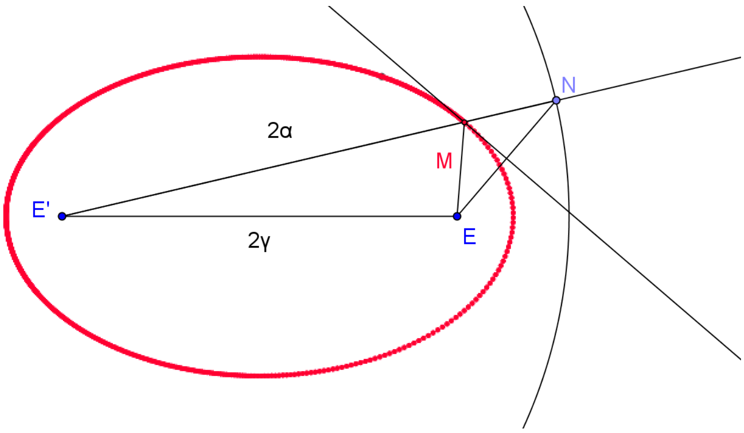
Ενδιαφέρον αποκτά το παραπάνω πρόβλημα, αν υπάρξουν μαθητές που θα πάρουν τις υποθέσεις τους από τη στερεομετρία, π.χ.

Πρόβλημα 2.2: Έστω (O,R) μια σφαίρα στο εσωτερικό ενός κώνου, και (K_1,R_1) και (K_2,R_2) είναι οι τομές των δυο εφαπτόμενων επιπέδων αυτής, των κάθετων στον άξονα του κώνου. Αν ένα επίπεδο, διερχόμενο από τον άξονα του κώνου, τέμνει το σχήμα, τότε η διχοτόμος κάθε γωνίας του τετράπλευρου, που σχηματίζεται, διέρχεται από σταθερό σημείο. Το γινόμενο των αποστάσεων των βάσεων από το επίπεδο επαφής σφαίρας - κώνου είναι σταθερό.



Σχήμα 4

Λύση: Η λύση του ανάγεται στη λύση του προηγούμενου προβλήματος, αφού φέρνοντας την K_1K_2 προκύπτει το Σχήμα 2.

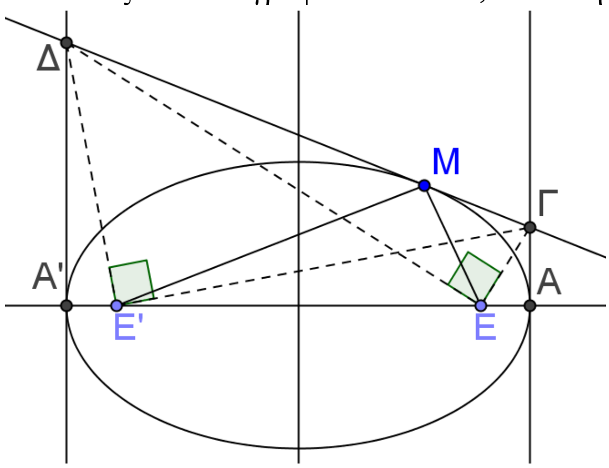


Σχήμα 5

3. Προβλήματα από την Έλλειψη.

Ορισμός 3.1. Έστω E' και Ε δυο σημεία ενός επιπέδου. Ονομάζεται έλλειψη με εστίες τα σημεία E' και E ο γεωμετρικός τόπος C των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα E' και E είναι σταθερό ($=2\cdot\alpha$) και μεγαλύτερο του $E'E$ ($=2\cdot\gamma$). (Σχήμα 5)

Η κατασκευή της έλλειψης με ένα λ.δ.Γ γίνεται ως εξής. Σε κύκλο $(Ε', 2\alpha)$ παίρνουμε ένα σημείο Ν. Φέρνουμε τη μεσοκάθετη στο τμήμα ΕΝ, η οποία τέμνει την Ε′Ν στο Μ. Καθώς το Ν διαγράφει τον κύκλο, το Μ δημιουργεί την Έλλειψη. Ένα πλήθος ιδιοτήτων της σ.Ε.Γ. καταγράφονται στις [5] και [6]. Όταν εκμεταλλευτούμε τις ιδιότητες αυτές, μπορούμε να κατασκευάσουμε πλήθος προβλημάτων της σ.Ε.Γ. Εδώ θα κάνουμε απλά νύξη.

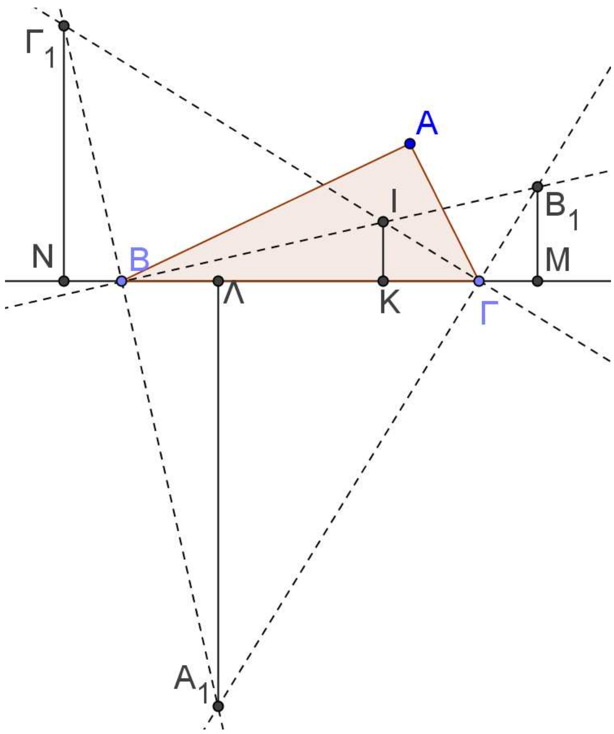


Σχήμα 6

1. **Θέμα 3.1.** Έστω ΓΔ το τμήμα μιας εφαπτομένης της έλλειψης με εστίες τα Ε′ και Ε στο Μ, που περιέχεται μεταξύ των εφαπτόμενων στα άκρα Α και Α′ του μεγάλου της άξονα (Σχήμα 6).

1. Οι Ε′Γ και ΕΔ διχοτομούν τις γωνίες ΜΕ′Α και ΜΕΑ′ αντίστοιχα.
2. Το τμήμα ΓΔ φαίνεται από κάθε εστία της με ορθή γωνία.

Αφού τα Γ και Δ είναι τα παράκεντρα του τριγώνου ΜΕΕ′ προκύπτει το επόμενο πρόβλημα. Πριν από αυτό όμως θα δώσουμε ως Λήμμα, ξαναδιατυπωμένη, μια άσκηση από το [7].



Σχήμα 7

Λήμμα 3.1. (Άσκηση 7, σελ. 88, [7]) Σε τρίγωνο ΑΒΓ η απόσταση του ίχνους του έκκεντρου σε μια πλευρά του, από μια κορυφή του, ισούται με τη διαφορά της απέναντι πλευράς (της κορυφής) από την ημιπερίμετρο αυτού. Η απόσταση του ίχνους του παράκεντρου στο εξωτερικό μιας πλευράς του, από την πλησιέστερη κορυφή του τριγώνου, ισούται με τη διαφορά της πλευράς, που ανήκει το ίχνος, από την ημιπερίμετρο αυτού.

Πρόβλημα 3.1 Θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ. Αν Ι είναι το έκκεντρο και $Α_1$, $Β_1$, $Γ_1$ τα παράκεντρα αυτού (Σχήμα 7). Τότε

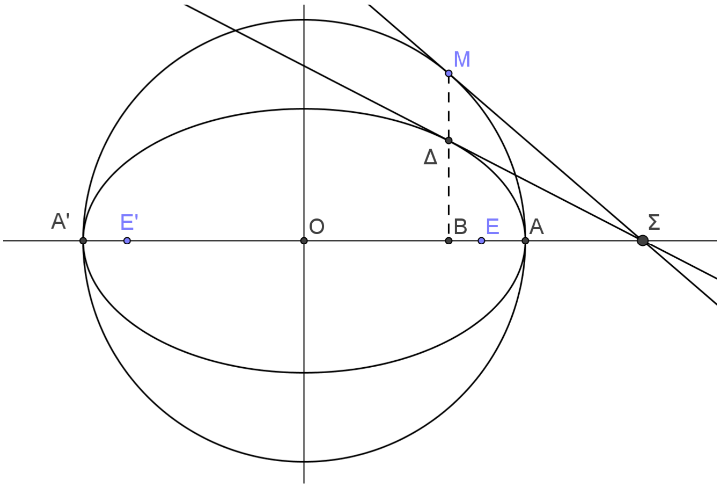
1. οι κύκλοι με διάμετρο τις $Β_1Γ_1$ και $ΙΑ_1$, αντίστοιχα, διέρχονται από τα Β και Γ.
2. Οι προβολές των τμημάτων $ΒΓ_1$ και $ΓΒ_1$ στην ΒΓ είναι ίσες. Επίσης οι προβολές των τμημάτων ΒΙ και $ΓΑ_1$ στην ΒΓ είναι ίσες

Λύση:

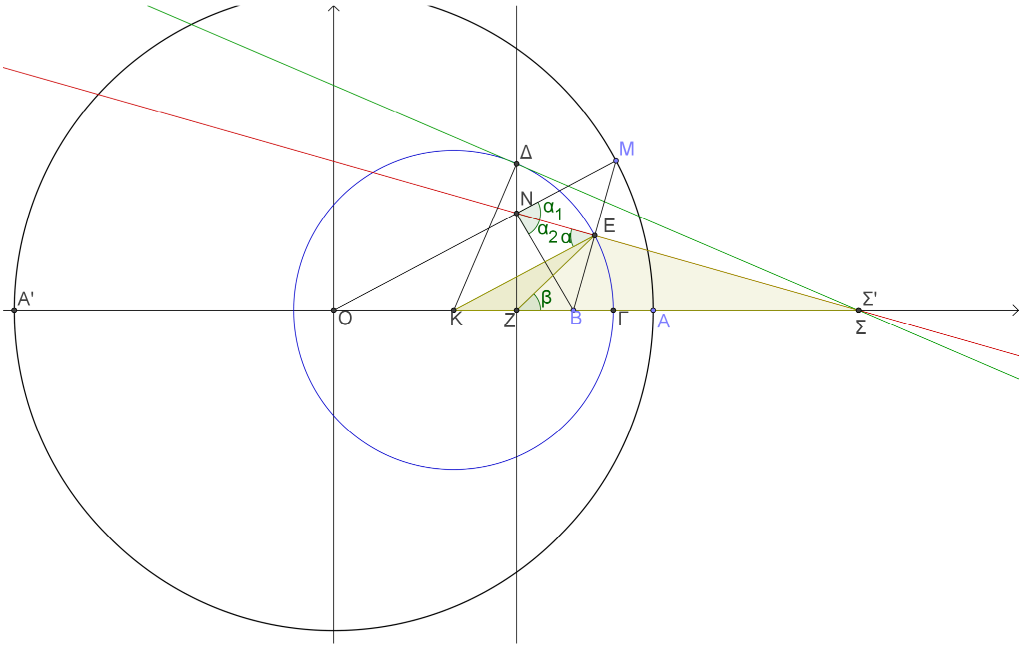
1. Οι διχοτόμοι εφεξής παραπληρωματικών γωνιών τέμνονται κάθετα.
2. Από το λήμμα 3.1. ΒΝ = ΓΜ = τ-α. Καθώς και ΒΛ = ΓΚ = τ-γ.

Θέμα 3.2 (Εφαρμογή 1, σελ. 109 [8]). Έστω $C_1(α,β)$ μια έλλειψη με κέντρο O και $C_2(O,α)$ ο κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $α$. Αν Μ ένα σημείο της έλλειψης C_1 και Δ το σημείο που η κάθετη από το Μ στον οριζόντιο άξονα τέμνει το κύκλο C_2, τότε οι εφαπτόμενες του κύκλου στο $Δ$ και της έλλειψης στο *Μ* διέρχονται από το ίδιο σημείο *Σ* του οριζόντιου άξονα. (Σχήμα 8).

Πρόβλημα 3.2. Θεωρούμε τον κύκλο C_1(O, R) και επί μιας διαμέτρου του Α′Α το σημείο Β. Θεωρούμε, επίσης, τα σημεία Κ και Γ, μέσα των ΟΒ και ΑΒ αντίστοιχα. Έστω, τέλος, η μεσοκάθετη στην ΒΜ, όπου Μ τυχαίο σημείο του κύκλου C_1, η οποία τέμνει την Α′Α στο Σ και την ΟΜ στο Ν. Αν Δ είναι το σημείο τομής της κάθετης από το Ν στην Α′Α με τον κύκλο C_2(Κ, ΚΓ = ρ), τότε η εφαπτόμενη του κύκλου C_2 στο Δ διέρχεται από το Σ (Σχήμα 9).



Σχήμα 8

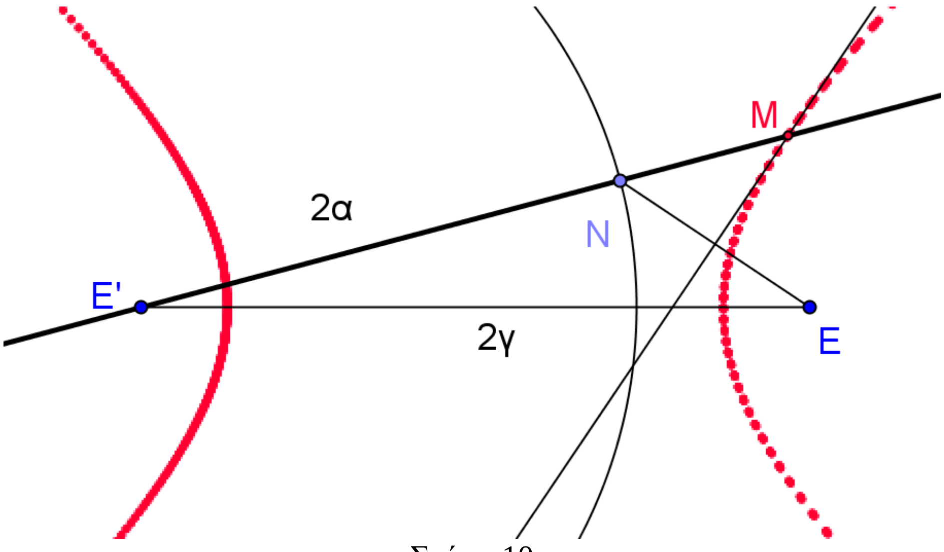


Σχήμα 9

Λύση: Αφού η ΚΕ||ΟΜ (Κ και Ε τα μέσα των ΟΒ και ΒΜ αντίστοιχα) σχετικά με τις γωνίες, που στο Σχήμα 9 αναγράφονται με μικρά γράμματα του ελληνικού αλφάβητου, ισχύει $\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha_1}$. Επίσης $\widehat{\alpha_1} = \widehat{\alpha_2}$, επειδή η ΝΕ μεσοκάθετη στη ΒΜ. Ακόμη $\widehat{\alpha_2} = \beta$, αφού το ΒΕΝΖ είναι εγγράψιμο. Έτσι, τα τρίγωνα ΚΖΕ και ΚΕΣ είναι όμοια($\hat{\mathrm{K}}$ κοινή, $\mathrm{K}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{E} = 180^o - \beta = 180^o - \alpha = \mathrm{K}\hat{\mathrm{E}}\Sigma$). Από την ομοιότητα αυτή προκύπτει ότι $\frac{\mathrm{KZ}}{\mathrm{KE}} = \frac{\mathrm{KE}}{\mathrm{K}\Sigma}$. Έστω τώρα Σ′ το σημείο τομής της εφαπτομένης στο Δ του κύκλου C_2 και της ΟΑ. Αφού το ΔΖ είναι ύψος του ορθογωνίου τριγώνου ΚΔΣ′, θα ισχύει $\frac{\mathrm{KZ}}{\mathrm{K}\Delta} = \frac{\mathrm{K}\Delta}{\mathrm{K}\Sigma'}$. Όμως επειδή $K\Delta = KE = \rho = \frac{R}{2}$, προκύπτει ότι $\frac{\rho}{\mathrm{K}\Sigma} = \frac{\rho}{\mathrm{K}\Sigma'}$ και από αυτό ότι ΚΣ = ΚΣ′, που είναι το ζητούμενο.

<u>4. Προβλήματα από την Υπερβολή.</u>

Ορισμός 4.1. Έστω E' και Ε δυο σημεία ενός επιπέδου. Ονομάζεται υπερβολή με εστίες τα σημεία E' και E ο γεωμετρικός τόπος C των σημείων του επιπέδου των οποίων η διαφορά των αποστάσεων από τα E' και E είναι σταθερή ($= 2\cdot\alpha$) και μικρότερη του $E'E$ ($= 2\cdot\gamma$). (Σχήμα 10).



Σχήμα 10

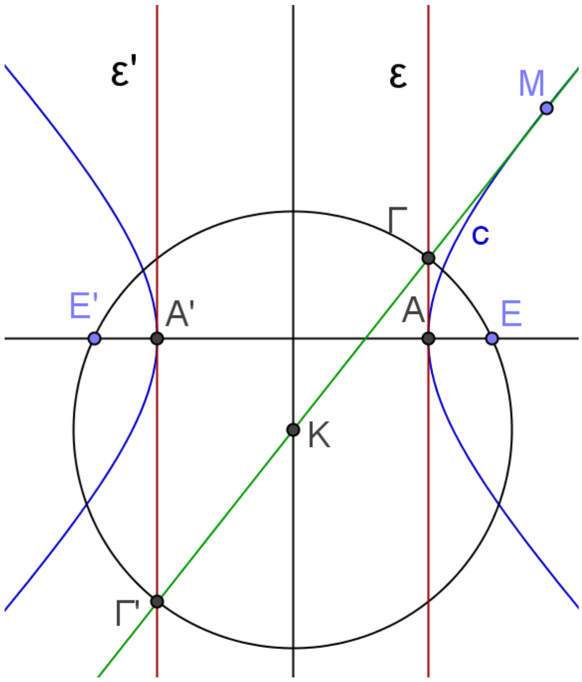
Κατασκευάζουμε την Υπερβολή με ένα λ.δ.Γ, ως εξής. Σε κύκλο ($Ε', 2\alpha$) παίρνουμε ένα σημείο Ν. Φέρνουμε τη μεσοκάθετη στο τμήμα ΕΝ, η οποία τέμνει την Ε′Ν στο Μ. Καθώς το Ν διαγράφει τον κύκλο, το Μ δημιουργεί την Υπερβολή. Ένα πλήθος ιδιοτήτων της σ.Ε.Γ. φανερώνονται, [5] και [6]. Αυτές τις ιδιότητες εκμεταλλευόμαστε για την κατασκευή των προβλημάτων μας.

Θέμα 4.1: (Άσκ. 2 σελ. 124 [8]). Έστω ε και ε′ οι εφαπτόμενες στις κορυφές Α και Α′ μιας υπερβολής (Σχήμα 11). Αν μια τρίτη εφαπτόμενη τέμνει τις δυο προηγούμενες στα σημεία Γ και Γ′, τότε

1. ο κύκλος με διάμετρο το ΓΓ′ διέρχεται από τις εστίες της υπερβολής.
2. $ΑΓ \cdot ΑΓ' = \beta^2$.

Πρόβλημα 4.1: Θεωρούμε τον κύκλο (Ο,ρ), ένα σημείο Α εκτός αυτού και Β το σημείο τομής του κύκλου με το τμήμα ΟΑ. Έστω Ν το μέσον του ΑΒ και Μ τυχαίο σημείο του κύκλου. Αν Γ το σημείο τομής της μεσοκάθετης του ΑΜ και της μεσοκάθετης του ΑΒ, τότε

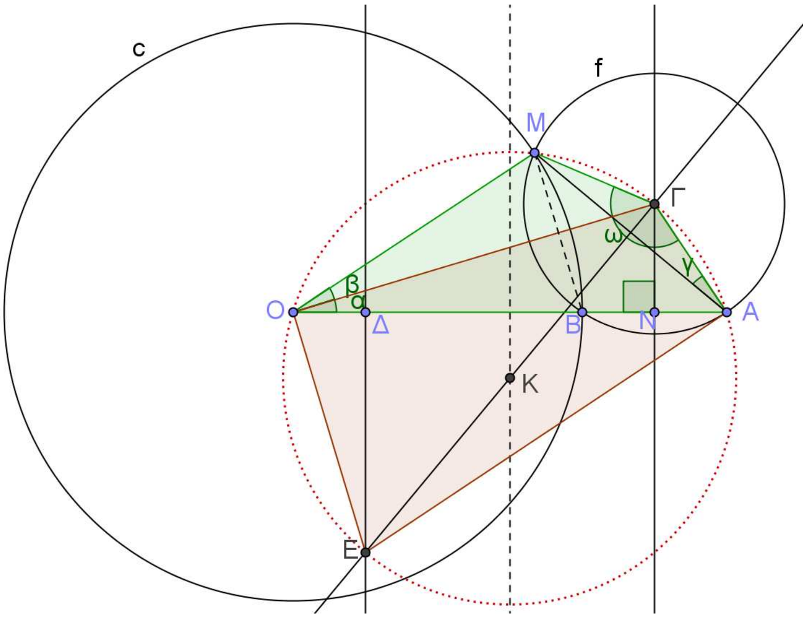
1. το τετράπλευρο ΟΑΓΜ είναι εγγράψιμο.
2. Αν, επιπλέον, το Δ είναι σημείο της ΟΑ με ΟΔ = $\frac{ΑΒ}{2}$ = ΑΝ και Ε είναι το σημείο τομής της κάθετης στην ΟΑ στο Δ και της μεσοκάθετης ΑΜ, τότε το ΟΕΑΓ είναι εγγράψιμο.
3. ΕΔ·ΓΝ = σταθερό.



Σχήμα 11

Λύση: 1. Έστω ΟΓ η διάκεντρος των κύκλων c και f (Σχήμα 12). Το ΟΑΓΜ είναι εγγράψιμο, αφού η ΟΓ διχοτομεί την γωνία ΜΓΒ και η ΓΝ την γωνία ΒΓΑ, η γωνία β είναι ίση με την γωνία α (= $90-\frac{\omega}{2}$) όμως, αφού η ΓΚ διχοτομεί την γωνία ΜΓΑ και για την γ ισχύει το ίδιο, δηλαδή γ= $90-\frac{\omega}{2}$. Για το 2. και το 3., αφού φέρουμε την μεσοκάθετη στην ΟΑ, όλα προκύπτουν από τη συμμετρία.

Τέλος, αναφέρουμε το επόμενο πρόβλημα, που **δεν** είναι πρόβλημα της σΕΓ, αλλά είναι πρόβλημα των κωνικών τομών. Προέρχεται από τη μελέτη των προβλημάτων 3.1 και 4.1.



Σχήμα 12

Πρόβλημα 4.2. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και επί του φορέα της ΒΓ το σημείο Σ σε σταθερή απόσταση c από το Β ή Γ. Ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής Α είναι:

1. Έλλειψη, όταν το παράκεντρο I_β ή I_γ κινείται επί της κάθετης στη ΒΓ στο σημείο Σ (το Σ εκτός του τμήματος). (Σχήμα 13)
2. Υπερβολή, όταν το παράκεντρο I_α ή το έκκεντρο Ι κινείται επί της κάθετης στη ΒΓ στο σημείο Σ (το Σ εντός του τμήματος). (Σχήμα 14)

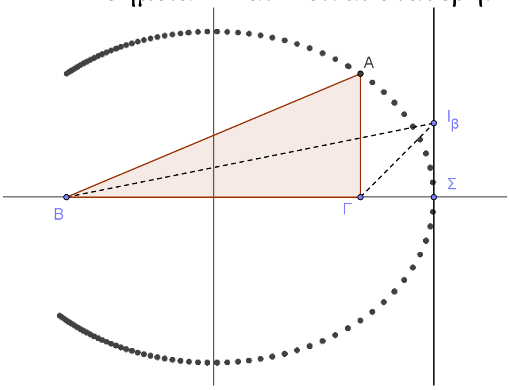
Λύση: Από το Λήμμα 3.1, προκύπτουν τα εξής:

1. $\tau - \mathrm{B\Gamma} = c \Rightarrow \frac{1}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{A\Gamma}+\mathrm{B\Gamma}) - \mathrm{B\Gamma} = c \Rightarrow \mathrm{AB}+\mathrm{A\Gamma} = 2c + \mathrm{B\Gamma}$,

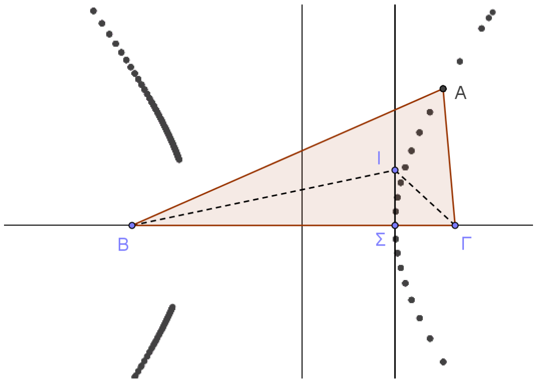
   δηλαδή, το άθροισμα των αποστάσεων της κορυφής Α από τα σταθερά σημεία Β και Γ είναι σταθερό.

2. $\tau - AB = c \Rightarrow \frac{1}{2}(AB + B\Gamma + A\Gamma) - AB = c \Rightarrow AB - A\Gamma = B\Gamma - 2c$,

δηλαδή, η διαφορά των αποστάσεων της κορυφής Α από τα σταθερά σημεία Β και Γ είναι σταθερή.



Σχήμα 13



Σχήμα 14

<u>Επίλογος</u>

Στην παρούσα εργασία έγινε μια προσπάθεια να δείξουμε ότι από τις κωνικές τομές μπορούμε να κατασκευάσουμε πλήθος προβλημάτων της σ.Ε.Γ. Ο αριθμός τέτοιων προβλημάτων, που θα μπορούσε κάποιος να δει και να επεξεργαστεί, είναι πολύ μεγάλος. Οι έννοιες, που θα επαναλάβουν ή θα διαπραγματευτούν οι μαθητές είναι, επίσης, πολλές. Για του λόγου το αληθές, αναφέρουμε ότι στο πρόβλημα 2.1. οι μαθητές έρχονται σε επαφή με το τραπέζιο και τις ιδιότητες αυτού, τις παραπληρωματικές γωνίες και τις διχοτόμους αυτών, με την ισότητα των τριγώνων και τις μετρικές σχέσεις των ορθογωνίων τριγώνων, ενώ στο πρόβλημα 2.2. με τον κώνο, τον κόλουρο κώνο, τη σφαίρα και τα σημεία επαφής αυτών με επίπεδο και κώνο, τις ιδιότητες των εφαπτόμενων σφαίρας, την τομή επιφάνειας από επίπεδο. Στο πρόβλημα 3.1 ξαναβλέπουν το έκκεντρο και τα παράκεντρα του τριγώνου, την προβολή τμήματος σε ευθεία, τις εγγεγραμμένες γωνίες σε κύκλο, ενώ στο 3.2 τα εγγράψιμα τετράπλευρα και τις ιδιότητες αυτών, τα όμοια τρίγωνα και τις μετρικές σχέσεις αυτών, την παραλληλία και τις ιδιότητες της μεσοκάθετης. Τέλος στο πρόβλημα 4.1. θα θυμηθούν τις επίκεντρες και τις εγγεγραμμένες γωνίες, καθώς και τη σχέση αυτών με τα τόξα στα οποία βαίνουν και φυσικά τη συμμετρία και θα αντιληφθούν το μεγάλο πλήθος των προβλημάτων, που αυτή λύνει.

Φυσικά, θεωρούμε ότι τόσο οι κωνικές τομές, όσο και η Ευκλείδεια Γεωμετρία αξίζουν της ιδιαίτερης προσοχής των **Δασκάλων** των Μαθηματικών, αφού δίνουν πολλαπλούς άξονες διδασκαλίας, αλλά και ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης. Η εφαρμογή της σύγχρονης τεχνολογίας βοηθάει στην κατεύθυνση αυτή. Η χρήση σύγχρονων αντιλήψεων και πρακτικών, όσον αφορά τη διδασκαλία των Μαθηματικών, πρέπει επίσης να υιοθετηθεί. Μια καλή πηγή πληροφόρησης, σχετικά με τις κωνικές τομές, είναι οι αναφορές [9], που ο καθένας μπορεί να έχει πρόσβαση ηλεκτρονικά αλλά και η αξιόλογη συλλογή του [10].

Ευχαριστίες: Ευχαριστούμε τους δυο άγνωστους κριτές, που με τις παρατηρήσεις τους βοήθησαν την εμφάνιση αλλά και τη ροή του άρθρου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. G. Polya, «How to solve it» (2nd ed.). New York: Doubleday, (1957).
2. E. A. Silver, & J. Cai, «An analysis of arithmetic problem posing by middle school students», Journal for Research in Mathematics Education, 27 (5), 521-539. (1996).
3. E. A. Silver, «On mathematical problem posing», For the Learning of Mathematics, 14 (1), 19-28. (1994).
4. L. D. English, «Children's problem posing within formal and informal contexts», Journal for Research in Mathematics Education, 29 (1), 83-106, (1998).
5. Μ. Τζούμας, «Οι γνωστές-άγνωστες κωνικές τομές», Πρακτικά 26ου Συνεδρίου ΕΜΕ, Θεσσαλονίκη, 167-177, 13-15 Νοεμβρίου, (2009).
6. Μ. Γ. Τζούμας, «Οι κωνικές τομές με σΕΓ», δεκτή για δημοσίευση στον Ευκλείδη Γ', (2010).
7. Αργυρόπουλος, Βλάμος, Κατσούλης, Μαρκάτης, Σιδέρης, «Ευκλείδεια Γεωμετρία Α′ και Β′ Ενιαίου Λυκείου», ΟΕΔΒ, (2001).
8. Αδαμόπουλος, Βισκαδουράκης, Γαβαλάς, Πολύζος, Σβέρκος, «Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης Β′ Λυκείου», ΟΕΔΒ, (2002).
9. Δ. Μπουνάκης, «Ιστορία και μελέτη με Ευκλείδεια μέσα των Κωνικών τομών», μεταπτυχιακή εργασία, Μαθηματικό τμήμα του Πανεπιστημίου Κρήτης, (2004).
(http://web-server.math.uoc.gr:1080/erevna/ diplomatikes/Bounakis_MDE. pdf)
10. Th. Carronet, «Exercises de Géométrie», Huitième Livre, Librairie, Vuibert, Paris, (1948).