Κωνικές τομές: καθορισμός των συνόρων σε υγρές περιοχές

Η Ευκλείδεια γεωμετρία στην εκπαίδευση και στην κοινωνία.

Δημήτρης Θεοδωράκης
1ο ΓΕΛ Μεσολογγίου
dtheodorakis@sch.gr
Σπύρος Στίγκας
4ο ΓΕΛ Αγρινίου
sstigkas@sch.gr
Μιχάλης Τζούμας
Σχ. Συμβ. Μαθηματικών
Γρ. Σχ. Συμβ. Αχαϊας
mtzoumas@sch.gr

Περίληψη

Μπορεί οι Αιγύπτιοι, από ανάγκη για να αναδιανείμουν τα χωράφια τους από τις πλημμύρες του Νείλου, να πρωτοξεκίνησαν τη Γεωμετρία, όμως αυτή αναπτύχθηκε και εφαρμόστηκε σε πλήθος ανάγκες της Επιστήμης και της Κοινωνίας από τους αρχαίους Έλληνες. Επειδή η Γεωμετρία, εκτός από τις εφαρμογές της στην επιστήμη και την κοινωνία, γενικότερα παίζει κυρίαρχο ρόλο στην ανάπτυξη του μυαλού και της κριτικής σκέψης των μαθητών, θα έπρεπε να δεσπόζει στα μαθήματα που διδάσκονται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και να μην παραμελείται από τους σύγχρονους της εκπαίδευσης. Στο παρόν άρθρο μελετάμε και εφαρμόζουμε τις κωνικές τομές στον καθορισμό των συνόρων και την εύρεση του τριεθνούς σε λιμναίες και θαλάσσιες περιοχές.

Abstract

Although the redistribution of land due to the Nile overflow in ancient Egypt gave birth to Geometry, the ancient Greeks developed and applied it in sciences or society. Geometry as a branch of Mathematics, except for its uses or applications in science and society, plays an important role in education and critical thinking of young students. For this reason it must be a dominant subject in secondary education. In this article we study and apply the conic sections in determining the borders in sea regions.

1. Εισαγωγή. Οι κωνικές τομές εμφανίζονται στη βιβλιογραφία περί το 350 π.χ. και η πατρότητα αυτών αποδίδεται στον Μέναιχμο [3] και [4], ο οποίος τις χρησιμοποίησε στην προσπάθειά του να λύσει το Δήλιο πρόβλημα. Πολλοί μαθηματικοί της αρχαίας Ελλάδος ασχολήθηκαν με τις κωνικές τομές, μεταξύ αυτών ο Αρίσταιος, ο Ευκλείδης και ο Αρχιμήδης, όμως το θαυμασμό της Παγκόσμιας κοινότητας τον συγκεντρώνει ο Απολλώνιος ο Περγαίος με το αριστούργημά του «κωνικά» [12]. Το 17^{o} αιώνα η Γεωμετρία αλγεβροποιείται από «τους πατέρες της Αναλυτικής Γεωμετρίας» Pierre de Fermat και René Descartes και μια νέα εποχή γεννιέται για τις κωνικές τομές. Την ίδια περίοδο δίνονται οι σημερινοί ορισμοί από τον μεγάλο Μαθηματικό Marquis De L' Hospital [5]. O Germinal Pierre Dandelin συνέδεσε με έναν ευφυή και θαυμαστό τρόπο τους ορισμούς του «καινούργιου» με το «παλιό», χρησιμοποιώντας σφαίρες [6], [7]. Οι εφαρμογές των κωνικών τομών, λόγω της κομψότητας και της απλότητας αυτών, εκτείνονται, εκτός από τα Μαθηματικά, τη Μηχανική και την Αστρονομία και σε όλους του χώρους των άλλων επιστημών. Στην εργασία αυτή θα τις δούμε να υπηρετούν τη Γεωγραφία, καθορίζοντας τα χωρικά ύδατα των χωρών.

Ορισμός 1: Αιγιαλίτιδα Ζώνη[2] ή χωρικά ύδατα είναι η ζώνη θάλασσας η παρακείμενη στην ακτή, πέρα από την ξηρά και τα εσωτερικά χωρικά ύδατα, πάνω στην οποία το κράτος ασκεί πλήρη κυριαρχία. Η κυριαρχία αυτή εκτείνεται στον εναέριο χώρο πάνω από την Αιγιαλίτιδα Ζώνη, στο βυθό και στο υπέδαφος.

Κάθε κράτος έχει το δικαίωμα να καθορίσει το πλάτος της Αιγιαλίτιδας Ζώνης μέχρι το όριο των 12 ναυτικών μιλίων (ν.μ.), σύμφωνα με τις διεθνείς συμβάσεις. Όμως, σε πάρα πολλές περιπτώσεις, η ξηρά δύο κρατών απέχει λιγότερο από τα 24 ν.μ., οπότε, προκειμένου να καθοριστούν τα χωρικά ύδατα, χρειάζεται να μοιραστούν εξ ίσου. Η νοητή γραμμή που ξεχωρίζει τα χωρικά ύδατα των χωρών είναι τα θαλάσσια σύνορα αυτών. Προκειμένου, όμως, να την καθορίσουμε, θα κάνουμε μερικές παραδοχές.

Έτσι, θα αντιστοιχίσουμε τη βραχονησίδα σε ένα σημείο, το νησί σε έναν κύκλο και την ακτή σε μια ευθεία ή στο εσωτερικό ενός κύκλου, αν πρόκειται για κόλπο ή στο εξωτερικό ενός κύκλου, αν πρόκειται για το άκρο χερσονήσου. Είναι φανερό ότι ουσιαστικά, όταν μιλάμε για ακτή, πρόκειται για ευθύγραμμο τμήμα, ενώ όταν μιλάμε για κόλπο ή χερσόνησο πρόκειται για τόξο.

Ορισμός 2: Λέμε ότι ένα σημείο ανήκει στα θαλάσσια σύνορα μιας χώρας, αν απέχει 12 ν.μ. από την ξηρά ή απέχει λιγότερο από 12 ν.μ. από την ξηρά και εξίσου από το πλησιέστερο σημείο άλλων χωρών.

Είναι φανερό ότι στον προσδιορισμό των θαλασσίων συνόρων κυρίαρχο ρόλο παίζει η απόσταση και γι αυτό δίνουμε τους παρακάτω ορισμούς και προτάσεις.

Ορισμός 3: Απόσταση δύο σημειοσυνόλων λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα, του οποίου το ένα άκρο είναι στο ένα σύνολο και το άλλο στο άλλο σύνολο και έχει το ελάχιστο μήκος.

Παρατήρηση 1: Με τον παραπάνω ορισμό **i)** απόσταση των σημείων Α και Β, είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. **ii)** Απόσταση του σημείου Α από την ευθεία (ε), είναι το μοναδικό κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που άγεται από το σημείο Α στην ευθεία (ε). **iii)** Απόσταση δύο παραλλήλων ευθειών είναι το κοινό κάθετο ευθύγραμμο τμήμα. **iv)** Τέλος, έστω ο κύκλος (Ο, ρ) με διαμέτρου ΑΒ και τυχαίο σημείο Σ της ημιευθείας ΟΑ, στο εσωτερικό ή εξωτερικό του κύκλου. Το ευθύγραμμο τμήμα ΣΑ, είναι η απόσταση του σημείου Σ από τον κύκλο (Ο, ρ).

Ένα πλήθος από προτάσεις σχετικές με την απόσταση δυο σημειοσυνόλων είναι γνωστές από την ύλη που διδάσκεται στο Γυμνάσιο και το Λύκειο. Αναφέρουμε ορισμένες, που θα μας είναι χρήσιμες στη συνέχεια.

Πρόταση 1: *Τα σημεία της μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχουν από τα άκρα του.*

Πρόταση 2: *Αν από ένα σημείο εκτός ευθείας φέρουμε το κάθετο τμήμα και δύο πλάγια ευθύγραμμα τμήματα σ' αυτό τότε: Το κάθετο τμήμα είναι μικρότερο από κάθε πλάγιο και από τα πλάγια μικρότερο είναι εκείνο που το ίχνος του απέχει λιγότερο από το ίχνος του καθέτου.*

Πρόταση 3. *Τα σημεία της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχουν από τις πλευρές της.*

Πρόταση 4. *Τα σημεία της μεσοπαράλληλης δυο παράλληλων ευθειών απέχουν εξ ίσου από αυτές.*

Πρόταση 5. *Θεωρούμε τον κύκλο (Κ, R) και τη διάμετρο αυτού ΑΒ. Για κάθε σημείο Μ του κύκλου και κάθε σημείο Σ επί της ΚΑ, ισχύει:* $\Sigma A \leq \Sigma M \leq \Sigma B$.

Πρόταση 6. *Θεωρούμε τον κύκλο (Κ, ρ), το τόξο ΑΒ και έστω Σ εσωτερικό σημείο του τόξου ΑΒ. Για το σημείο Μ του κύκλου, που δεν ανήκει στην επίκεντρη γωνία ΑΚΒ, ισχύει,*

$$M\Sigma > \min\{MA, MB\}$$

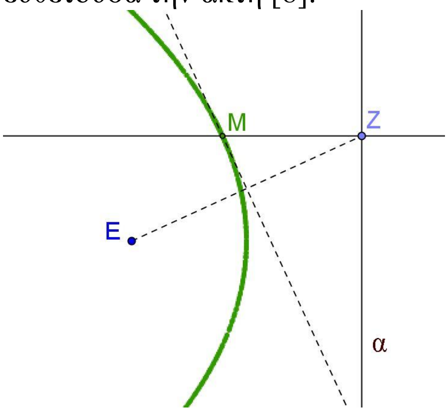
Απόδειξη: Η μεσοκάθετη στο ΑΣ (ή το ΒΣ) περνά από το κέντρο Ο και αφήνει το Μ στο ίδιο ημιεπίπεδο με το Α (αντίστοιχα το Β) και ως εκ τούτου $MA<M\Sigma$ (ή $MB<M\Sigma$).

Στον προσδιορισμό των συνόρων των χωρών, όπως έχουμε ήδη πει, σημαντικό ρόλο παίζουν οι κωνικές τομές. Για τον ορισμό τους μπορεί κάποιος να δει στο [8] και [10], ενώ για την Ευκλείδεια αντιμετώπιση των γεωμετρικών ιδιοτήτων τους αλλά και την κατασκευή τους με εργαλεία της σύγχρονης τεχνολογίας στο [10], [11] και [13].

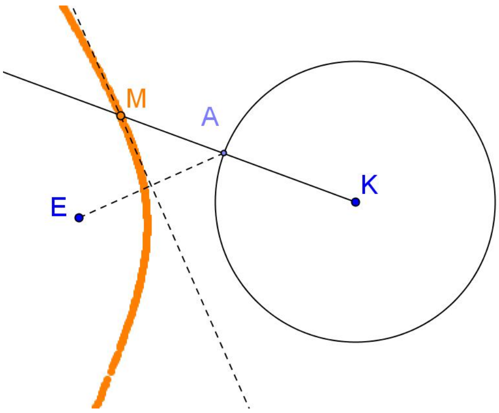
2. Ο καθορισμός των συνόρων σε υγρές περιοχές. Σε ό,τι ακολουθεί, ισχύει ότι η απόσταση μεταξύ των δυο χωρών θα είναι μικρότερη των 24 ναυτικών μιλίων και το σημείο από το οποίο μετράται η απόσταση **δεν** είναι ακραίο σημείο ευθυγράμμου τμήματος ή τόξου.

Θεώρημα 1*: Τα θαλάσσια σύνορα μεταξύ i) μιας ακτής-ευθείας και μιας βραχονησίδας (σημείο) ή ii) μιας ακτής-ευθείας και ενός νησιού ανήκουν σε μία παραβολή*.

Απόδειξη: i) Επιλέγουμε τυχαίο σημείο Ζ (Σχήμα 1) πάνω στην ακτή-ευθεία (α). Το σημείο τομής Μ της μεσοκάθετης στο ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ και της κάθετης στην ευθεία (α) στο σημείο Ζ ανήκει στο σύνορο των δυο χωρών, αφού απέχει εξ ίσου από τη βραχονησίδα Ε και την ακτή στο σημείο Ζ. Μετακινώντας το σημείο Ζ πάνω στην ακτή, το σημείο Μ διαγράφει μία καμπύλη, που είναι προφανώς παραβολή με εστία το Ε και διευθετούσα την ακτή [8].



Σχήμα 1.



Σχήμα 2.

ii) Η απόδειξη της περίπτωσης ακτής-ευθείας και ενός νησιού (Κ, ρ), είναι ίδια με εκείνη της ακτής-ευθείας και μιας βραχονησίδας με την προσθήκη ότι η διευθετούσα είναι βοηθητική ευθεία (δ), παράλληλη προς την ακτή σε απόσταση ρ προς το εσωτερικό της χώρας.

Θεώρημα 2: *Τα θαλάσσια σύνορα ανάμεσα σε μία βραχονησίδα (σημείο) και ένα νησί ή χερσόνησο (κύκλος ή τμήμα κύκλου) ανήκουν σε μία υπερβολή*

Απόδειξη: Θεωρούμε τη βραχονησίδα Ε (σημείο) το νησί (Κ, ρ) (κύκλο) και επιλέγουμε τυχαίο σημείο Α στην ακτή του νησιού (Σχήμα 2). Σχεδιάζουμε την ημιευθεία ΚΑ και φέρουμε τη μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΕ. Ονομάζουμε Μ το σημείο τομής της ημιευθείας ΚΑ με την προηγούμενη μεσοκάθετη. Το σημείο Μ είναι σημείο στα σύνορα που ψάχνουμε, αφού ισαπέχει από τη βραχονησίδα και το νησί, λόγω της μεσοκάθετης (ΜΕ=ΜΑ). Το σημείο Μ είναι σημείο υπερβολής με εστίες τα σημεία Ε και Κ, διότι έχει σταθερή διαφορά αποστάσεων από αυτές [8]:

$$\mathrm{MK} - \mathrm{ME} = \mathrm{MA} + \rho - \mathrm{ME} = \mathrm{ME} + \rho - \mathrm{ME} = \rho = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Παρατήρηση 2: το σημείο Μ βρίσκεται πάνω στον έναν κλάδο της υπερβολής. Ο άλλος κλάδος αυτής αναφέρεται στην ακτή της πλευράς του νησιού που δεν είναι πλησίον της βραχονησίδας και συνεπώς δεν έχει έννοια.

Θεώρημα 3: *Το θαλάσσιο σύνορο ανάμεσα σε δυο βραχονησίδες (σημεία) είναι η μεσοκάθετη αυτών.*

Απόδειξη: Η απόδειξη βασίζεται στην Πρόταση 1.

Θεώρημα 4: *Το θαλάσσιο σύνορο ανάμεσα σε δυο ακτές-ευθείες είναι i) η μεσοπαράλληλη αυτών(όταν είναι παράλληλες) ή ii)η διχοτόμος της γωνίας που σχηματίζουν (όταν τέμνονται).*

Απόδειξη: Η απόδειξη του Θεωρήματος αυτού βασίζεται: στην Πρόταση 4 η περίπτωση των παραλλήλων και στην Πρόταση 3 η περίπτωση των τεμνόμενων ακτών-ευθειών.

Θεώρημα 5: *Το θαλάσσια σύνορα ανάμεσα σε μία ακτή (ευθεία) και σε ένα κόλπο (τόξο κύκλου) ανήκουν σε μία παραβολή.*

Απόδειξη: Θεωρούμε τον κόλπο ΑΒ τμήμα του κύκλου (Κ, ρ), την ακτή ΓΔ τμήμα της ευθείας α και μία βοηθητική ευθεία (δ) παράλληλη της ευθείας (α) σε απόσταση ρ προς το μέρος του Κ (Σχήμα 3). Επιλέγουμε το σημείο Ε πάνω στην ευθεία (δ) και φέρουμε κάθετη στην (α), η οποία τέμνει την μεσοκάθετη του τμήματος ΚΕ στο σημείο Μ. Το Μ ανήκει στα σύνορα των δυο χωρών, αφού η προέκταση του ΚΜ προς το μέρος του Μ, τέμνει τον κύκλο στο Ν και ισχύει

$$\mathrm{MN} = \mathrm{KN} - \mathrm{KM} = \rho - \mathrm{KM} = \Lambda\mathrm{E} - \mathrm{KM} = \Lambda\mathrm{E} - \mathrm{ME} = \Lambda\mathrm{M}.$$

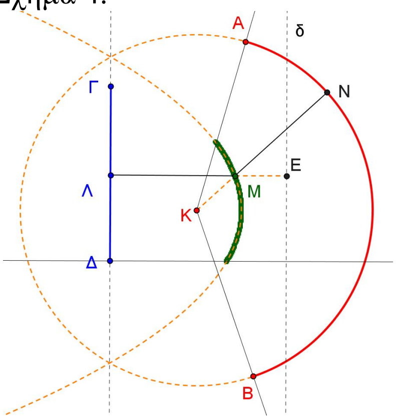
Το σημείο Μ ανήκει σε παραβολή με εστία το Κ και διευθετούσα τη βοηθητική ευθεία (δ), αφού ΚΜ=ΜΕ λόγω της μεσοκάθετης του ΚΕ [8], [10]. Για την ακρίβεια, θα είναι το τμήμα της παραβολής που αποκόπτει η ακτίνα ΚΑ και η κάθετη στο ΓΔ στο σημείο Δ.

Θεώρημα 6: *Τα θαλάσσια σύνορα ανάμεσα σε δύο κόλπους (τόξα κύκλων) ανήκουν σε μία υπερβολή.*

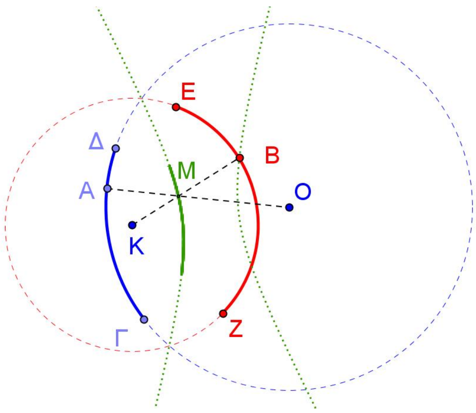
Απόδειξη: Έστω δύο κόλποι (τόξα κύκλων με κέντρα Ο και Κ και ακτίνες R και ρ αντίστοιχα). Το σημείο Μ των συνόρων (ΜΑ=ΜΒ) βρίσκεται πάνω σε μια υπερβολή με εστίες τα Κ και Ο, αφού

$$MO - MK = (MO + MA) - (MK + MB) = R - \rho .$$

Για την κατασκευή ακολουθούμε την τεχνική του [10]. Για την ακρίβεια το M βρίσκεται σε τμήμα ενός κλάδου υπερβολής με τη συνεχή γραμμή στο Σχήμα 4.



Σχήμα 3.



Σχήμα 4.

Θεώρημα 7: Τα *θαλάσσια σύνορα ανάμεσα σε i) έναν κόλπο και ένα νησί (ή μια χερσόνησο) ή ii) έναν κόλπο και μια βραχονησίδα, ανήκουν σε έλλειψη.*

Απόδειξη: 1) Θεωρούμε τον κόλπο και το νησί με κέντρα K και O και ακτίνα R και ρ (R>ρ) αντίστοιχα, Σχήμα 5. Έστω M ένα σημείο στο σύνορο των δυο τόπων. Τότε ισχύει.

$$KM + OM = KM + M\Gamma + O\Gamma = KM + MN + O\Gamma = KN + O\Gamma = R + \rho.$$

Δηλαδή το άθροισμα των αποστάσεων του σημείου M από τα δυο σταθερά σημεία K και O είναι σταθερό. Για την κατασκευή του χρησιμοποιούμε την τεχνική του [10].

2) Η περίπτωση κόλπου και μια βραχονησίδας είναι ίδια με την περίπτωση κόλπου και νησιού, με τη διαφορά ότι δε χρειάζεται πλέον ο βοηθητικός κύκλος ακτίνας R+ρ.

Θεώρημα 8: *Τα θαλάσσια σύνορα ανάμεσα σε δύο νησιά (2 κύκλοι) ανήκουν σε μία υπερβολή*

Απόδειξη: Θεωρούμε δυο νησιά με ακτίνες R, ρ (R>ρ) και κέντρα K, O αντίστοιχα, Σχήμα 6. Το σημείο M ανήκει σε υπερβολή με εστίες K και O, αφού λόγω της ισότητας AM=MB, ισχύει

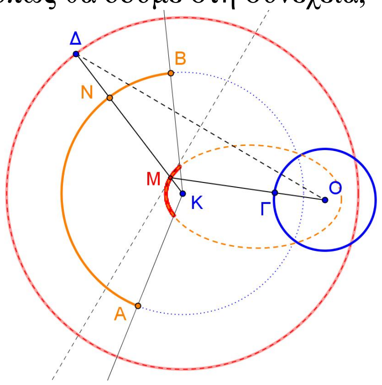
$$KM - OM = (KA + AM) - (OB + BM) = R - \rho .$$

Για την ακρίβεια, το σημείο M ανήκει μόνο στον έναν κλάδο της υπερβολής. Ο άλλος είναι αποτέλεσμα των πλέον απομακρυσμένων ακτών των δυο νησιών που ισαπέχουν.

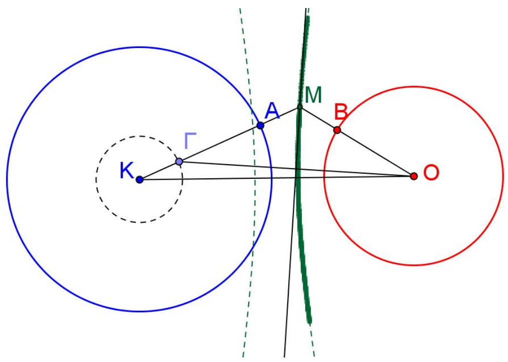
Παρατήρηση 3: *Στην περίπτωση όπου τα δυο νησιά (κύκλοι) έχουν την ίδια ακτίνα, τα θαλάσσια σύνορα εκφυλίζονται στη μεσοκάθετη της διακέντρου των δύο κύκλων.*

Παρατήρηση 4: Τα *θαλάσσια σύνορα ανάμεσα σε ένα νησί και μία χερσόνησο καθώς και δυο χερσονήσους ανήκουν επίσης σε μία υπερβολή. Η απόδειξη είναι η ίδια, όπως στο Θεώρημα 8.*

Η μέχρι τώρα αναπτυχθείσα θεωρία ισχύει υπό την προϋπόθεση ότι η απόσταση μετράται από σημείο που δεν είναι ακραίο. Όμως στην πράξη, όπως θα δούμε στη συνέχεια, τα προβλήματα είναι περισσότερο σύνθετα.



Σχήμα 5.



Σχήμα 6.

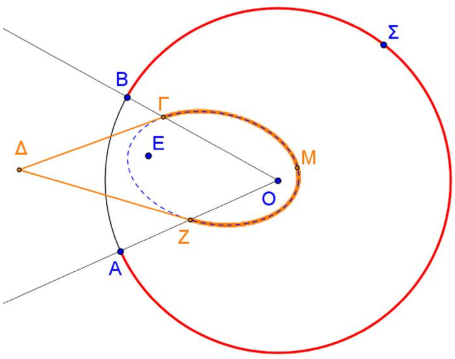
Πρόβλημα 1: Να βρεθούν τα σύνορα δυο χωρών, που στη μία ανήκει μια βραχονησίδα και στην άλλη ένας κόλπος.

Λύση: Θεωρούμε τον κόλπο (τόξο) ΑΣΒ του κύκλου (Ο, ρ), όπου Σ εσωτερικό σημείο του τόξου ΑΒ και τις ημιευθείες ΟΑ και ΟΒ (Σχήμα 7 και 8). Για κάθε σημείο των συνόρων που ανήκει στον τομέα Ο.ΑΣΒ, η απόσταση μετράται από εσωτερικό σημείο του τόξου, αφού όταν το σημείο Μ ανήκει στο τμήμα ΟΣ ισχύει ΜΣ<ΜΑ, καθώς και ΜΣ<ΜΒ (Πρόταση 5). Για κάθε σημείο Μ των συνόρων που ανήκει στη γωνία ΑΟΒ που δεν περιέχει το Σ, η απόσταση μετράται από τα σημεία Α ή Β (Πρόταση 6).

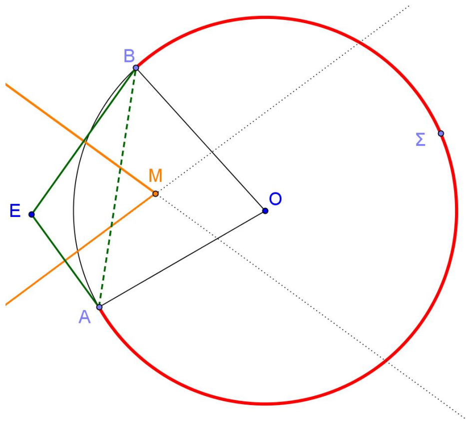
Α1 περίπτωση: Η βραχονησίδα (σημείο) Ε βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου που ανήκει ο κόλπος. Στην περίπτωση αυτή τα σύνορα είναι το τμήμα της έλλειψης που ανήκει στον τομέα Ο.ΑΣΒ, αφού η απόσταση του τυχαίου σημείου Μ των συνόρων μετράται από εσωτερικό σημείο του τόξου (Θεώρημα 7) και στα τμήματα των μεσοκαθέτων στις ΜΑ και ΜΒ, στην περίπτωση που το Μ βρίσκεται στη γωνία ΑΟΒ (που δεν περιέχει το Σ), αφού η απόσταση μετράται από τα ακραία σημεία Α και Β του τόξου ΑΒ (Σχήμα 7).

Α2 περίπτωση: Η βραχονησίδα βρίσκεται στο κέντρο του κύκλου. Εδώ το τμήμα της έλλειψης εκφυλίζεται σε τμήμα κύκλου, ομόκεντρο με αυτόν που ανήκει ο κόλπος.

Α3 περίπτωση: Η βραχονησίδα βρίσκεται επί της περιφέρειας του κύκλου. Τώρα το τμήμα της έλλειψης εκφυλίζεται σε σημείο, το κέντρο του κύκλου.



Σχήμα 7



Σχήμα 8

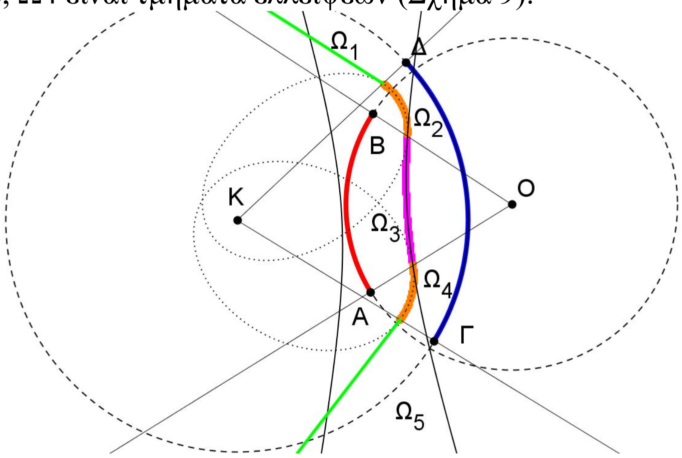
Β περίπτωση: Η βραχονησίδα βρίσκεται εκτός του κύκλου. Τώρα το τμήμα της έλλειψης δεν υπάρχει πλέον. Το κέντρο Ο δε βρίσκεται στο ίδιο ημιεπίπεδο, όσον αφορά τη μεσοκάθετη στο ΒΕ με το Ε (αφού ΟΒ<ΟΕ) και δε βρίσκεται στο ίδιο ημιεπίπεδο, όσον αφορά τη μεσοκάθετη στο ΑΕ με το Ε (αφού ΟΑ<ΟΕ). Έτσι, το κέντρο Ο βρίσκεται στην κατακορυφήν της γωνίας (που σχηματίζουν οι μεσοκάθετες) που ανήκει το Ε, οπότε τα σύνορα είναι τμήματα των μεσοκάθετων των ΕΑ και ΕΒ, αφού το σημείο τομής Μ αυτών βρίσκεται στη γωνία ΑΟΒ που δεν περιέχει το Σ (Σχήμα 8).

Πρόβλημα 2: Να βρεθούν τα σύνορα δύο χωρών, ανάμεσα σε δύο κόλπους, που ο ένας ανήκει στη μία χώρα και ο άλλος στην άλλη.

Λύση: Θεωρούμε τους δυο κόλπους (τόξα) ΑΒ και ΓΔ των κύκλων (Κ, R) και (Ο, ρ). Σχεδιάζουμε τις επίκεντρες γωνίες ΓΚΔ και ΑΟΒ, που χωρίζουν την περιοχή σε 5 χωρία τα Ω1, Ω2, Ω3, Ω4, Ω5, όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.

Περίπτωση Α: Το σημείο Μ των συνόρων του χωρίου Ω3 μετράται από εσωτερικά σημεία του τόξου ΑΒ, αφού ΜΣ<ΜΑ και ΜΣ<ΜΒ, όπου Σ εσωτερικό σημείο του τόξου ΑΒ (Πρόταση 5). Επίσης, μετράται από εσωτερικά σημεία του τόξου ΓΔ, για παρόμοιο λόγο. Έτσι, από το Θεώρημα 5 τα σύνορα είναι το τμήμα της υπερβολής που αποκόπτεται από τις ημιευθείες ΟΑ και ΟΒ.

Περίπτωση Β: Το σημείο Μ των συνόρων των χωρίων Ω2 και Ω4 μετράται από εσωτερικά σημεία του τόξου ΓΔ (Πρόταση 5) και τα ακραία σημεία του τόξου ΑΒ (Πρόταση 6). Από το θεώρημα 7 τα σύνορα στις περιοχές Ω2, Ω4 είναι τμήματα ελλείψεων (Σχήμα 9).



Σχήμα 9

Περίπτωση Γ: Το σημείο Μ των συνόρων των χωρίων Ω1 και Ω5 μετράται από τα ακραία σημεία των τόξων ΑΒ και ΓΔ (Πρόταση 6). Από το Θεώρημα 3, τα σύνορα πλέον είναι τα τμήματα των μεσοκάθετων στα ΑΓ και ΒΔ, που είναι στο εξωτερικό της γωνίας ΓΚΔ (Σχήμα 9).

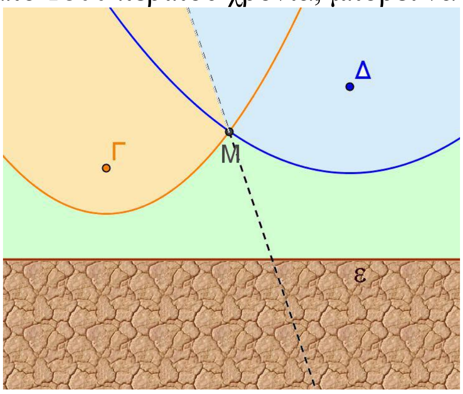
Παρατήρηση 5: Η λύση που προτείνεται αντιμετωπίζει μια από τις πολλές εκδοχές που υπάρχουν. Μένει στον αναγνώστη να εντοπίσει και άλλες περιπτώσεις και να δώσει λύση!

3. Το τριεθνές. Είδαμε μέχρι τώρα το μοίρασμα των χωρικών υδάτων ανάμεσα σε δυο χώρες που συνορεύουν. Όμως, πρακτικά στον παγκόσμιο χάρτη, τρεις χώρες συνορεύουν ανά δύο και το κοινό σύνορο των τριών πλέον χωρών δεν είναι παρά σημείο, που ονομάζεται **τριεθνές**. Στη συνέχεια, θα επεκτείνουμε την παραπάνω θεωρία για την εύρεση αυτού του σημείου, κρατώντας τις προηγούμενες θεωρήσεις, δηλαδή, ότι η βραχονησίδα είναι σημείο, το νησί είναι κύκλος και η ακτή είναι ευθεία ή τμήμα κύκλου. Ουσιαστικά θα βρούμε το σημείο που απέχει εξίσου από:

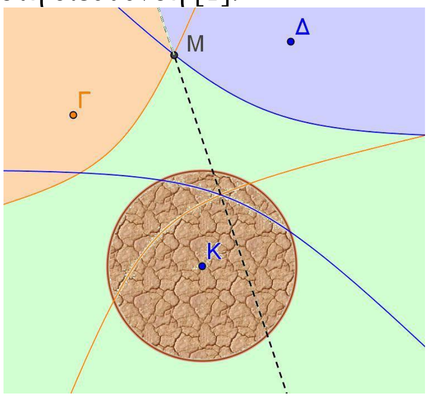
1) Τρεις βραχονησίδες, δηλαδή τρία σημεία.
2) Τρεις ακτές, δηλαδή τρεις ευθείες.
3) Τρία νησιά, δηλαδή τρεις κύκλους.
4) Δυο βραχονησίδες και μια ακτή, δηλαδή δυο σημεία και μια ευθεία.
5) Δυο βραχονησίδες και ένα νησί, δηλαδή δυο σημεία και έναν κύκλο.
6) Δυο ακτές και μια βραχονησίδα, δηλαδή δυο ευθείες και ένα σημείο.

7) Δυο ακτές και ένα νησί, δηλαδή δυο ευθείες και έναν κύκλο.
8) Δυο νησιά και μια βραχονησίδα, δηλαδή δυο κύκλους και ένα σημείο.
9) Δυο νησιά και μια ακτή, δηλαδή δυο κύκλους και μια ευθεία.
10) Μια ακτή, ένα νησί και μια βραχονησίδα, δηλαδή μια ευθεία, έναν κύκλο και ένα σημείο.

Στις δέκα παραπάνω περιπτώσεις ουσιαστικά έχουμε να βρούμε το σημείο που ισαπέχει από τρία δοσμένα γεωμετρικά αντικείμενα (Σημείο, Κύκλο, Ευθεία) ή να βρούμε το κέντρο του κύκλου που εφάπτεται σε αυτά, δηλαδή, ουσιαστικά, να ασχοληθούμε με το **Απολλώνιο πρόβλημα**. Μια πρώτη επαφή ο αναγνώστης με το πρόβλημα, που έθεσε ο Απολλώνιος πριν από 1800 περίπου χρόνια, μπορεί να έχει στη διεύθυνση [1].



Σχήμα 10

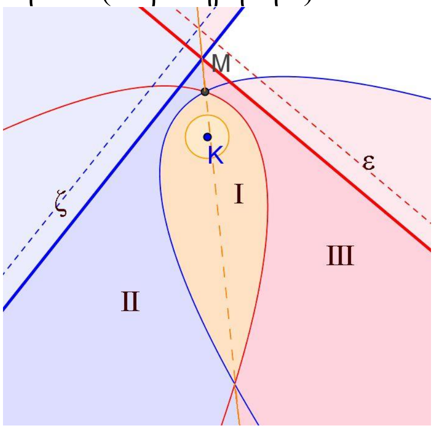


Σχήμα 11

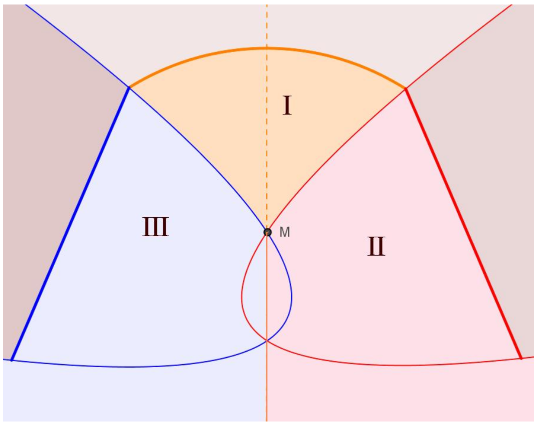
i) <u>Στοιχειώδεις περιπτώσεις:</u> Οι περιπτώσεις 1) και 2) αποτελούν στοιχειώδεις περιπτώσεις. Η περίπτωση 1) ουσιαστικά είναι η εύρεση ενός σημείου που απέχει εξ ίσου από τρία γνωστά σημεία, ήτοι η εύρεση του περίκεντρου ενός τριγώνου. Η περίπτωση 2) επίσης στοιχειωδώς είναι εύρεση ενός σημείου που απέχει εξίσου από τρεις ευθείες, δηλαδή έχουμε να προσδιορίσουμε το έκκεντρο ενός τρίγωνου (σημείο τομής των διχοτόμων) ή ενός παράκεντρου (σημείο τομής δύο εξωτερικών διχοτόμων και μιας εσωτερικής). Στην κατηγορία των στοιχειωδών περιπτώσεων ανήκει και ένα τμήμα της περίπτωσης 3), δηλαδή της περίπτωσης όπου τα τρία νησιά είναι ίσα. Στην περίπτωση αυτή ουσιαστικά έχουμε να προσδιορίσουμε το σημείο που απέχει εξίσου από τρεις ίσους κύκλους, που μετατρέπεται στην εύρεση του σημείου που απέχει εξίσου από τα κέντρα των τριών κύκλων, δηλαδή το περίκεντρο του τριγώνου του οποίου αυτά είναι κορυφές.

<u>ii) Άλλες περιπτώσεις:</u> Ελαφρά πιο σύνθετη είναι η περίπτωση 4), όπου πρέπει να βρούμε το κέντρο του κύκλου που απέχει εξίσου από μια ευθεία και δυο σημεία. Αναφέρεται στο Θεώρημα 1 ότι τα σύνορα ακτής-

βραχονησίδας είναι τμήμα μιας παραβολής. Έτσι, το τριεθνές σε τούτη την περίπτωση είναι το σημείο τομής δυο παραβολών (Σχήμα 10). Φυσικά το εν λόγω σημείο ανήκει και στη μεσοκάθετη των δυο βραχονησίδων. Στην περίπτωση 5) το τριεθνές είναι το σημείο τομής δυο υπερβολών (Σχήμα 11), αφού από το Θεώρημα 2, τα σημεία που απέχουν εξίσου από ένα νησί και μια βραχονησίδα ανήκουν σε υπερβολή. Βέβαια, εδώ εμφανίζεται ένα πλήθος από σημεία τομής των δυο υπερβολών, όμως εύκολα αυτά αποκλείονται, αφού βρίσκονται τουλάχιστον στον έναν κλάδο της υπερβολή που απέχει εξίσου από τη βραχονησίδα και το πλέον απομακρυσμένο σημείο του νησιού (Παρατήρηση 2).



Σχήμα 12

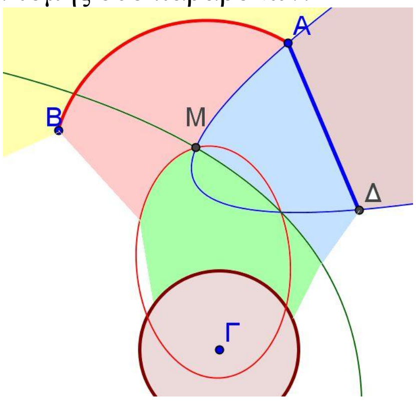


Σχήμα 13

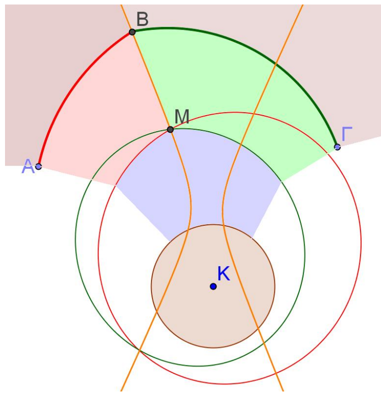
Η περίπτωση 7) φαίνεται στο Σχήμα 12, όπου περιοχές II και III περιέχουν τα σημεία που βρίσκονται πλησιέστερα στις δυο ακτές, ενώ τα σημεία της περιοχής I είναι εκείνα που βρίσκονται πλησιέστερα στο νησί (Κ,ρ) (κύκλος). Εδώ έχουμε **δύο** τριεθνή, που είναι τα σημεία, όπου τέμνονται οι παραβολές με εστίες το κέντρο Κ του κύκλου και διευθετούσα μια φανταστική παράλληλη προς τις ακτογραμμές-ευθείες στο εσωτερικό των χωρών, σε απόσταση ίση με την ακτίνα του κύκλου και περνά η διχοτόμος της γωνία που σχηματίζουν οι ακτές, υπό την προϋπόθεση ότι και τα δυο σημεία απέχουν από τα τρία κράτη λιγότερο από 12 ν.μ.

Η περίπτωση 6) είναι όμοια με την 7). Η μόνη διαφορά είναι το γεγονός ότι οι παραβολές έχουν ως διευθετούσες τις ακτογραμμές και όχι μια φανταστική παράλληλη προς αυτές στο εσωτερικό των χωρών, σε απόσταση ίση με την ακτίνα του κύκλου. Παρόμοια και εδώ τα τριεθνή είναι δύο, με τη ίδια προϋπόθεση.

Τέλος οι περιπτώσεις 8) και 3) με νησιά διαφορετικού μεγέθους και οι περιπτώσεις 9) και 10) εύκολα μπορούν να ενταχθούν στις προηγούμενες περιπτώσεις. Έτσι, η περίπτωση 8) και η περίπτωση 3) με νησιά διαφορετικού μεγέθους είναι παρόμοια με την περίπτωση 5), οπότε το τριεθνές θα είναι η τομή δύο υπερβολών, δηλαδή εκείνων των συνόρων που σχηματίζονται από τα δύο ζευγάρια νησί-βραχονησίδα. Προφανώς από το σημείο αυτό θα διέρχεται και το σύνορο των άλλων δύο νησιών. Οι 9) και 10) είναι όμοιες με την 4) σε συνδυασμό με την 7). Δηλαδή, τα τριεθνή είναι τα σημεία τομής δύο παραβολών.



Σχήμα 14.



Σχήμα 15.

<u>iii) Η ειδική περίπτωση του εσωτερικού του κύκλου.</u> Στη συνέχεια θα δούμε και άλλες περιπτώσεις εύρεσης τριεθνούς. Ήδη έχει αναφερθεί ότι, όταν η ακτή μας είναι κόλπος, βρισκόμαστε στο εσωτερικό ενός κύκλου και ο κόλπος είναι ένα τόξο του κύκλου. Οι περιπτώσεις τώρα αυξάνονται ιδιαίτερα. Ενδεικτικά θα αναφέρουμε μερικές. Ειδικότερα:

1) Κόλπος, ακτή, ακτή: Επειδή το κοινό σύνορο των κόλπου-ακτής είναι παραβολή, Θεώρημα 5, το τριεθνές θα είναι η τομή δύο παραβολών και από το σημείο αυτό θα διέρχεται η διχοτόμος των ακτών. Παρόλο που η τομή των παραβολών μας δίνει δύο σημεία, το τριεθνές είναι ένα, Σχήμα 13.
2) Κόλπος, κόλπος, κόλπος: Αφού το κοινό σύνορο των κόλπου-κόλπου είναι υπερβολή, Θεώρημα 9, τότε το τριεθνές θα είναι η τομή δύο υπερβολών και από το σημείο αυτό θα διέρχεται η τρίτη υπερβολή.
3) Κόλπος, ακτή, νησί: Το τριεθνές σε τούτη την περίπτωση είναι το σημείο τομής των παραβολών κόλπος-ακτή (Θεώρημα 6) και νησί-ακτή (Θεώρημα 1). Από το σημείο αυτό διέρχεται και η έλλειψη κόλπος-νησί, Σχήμα 14.
4) Κόλπος, κόλπος, νησί: Ήδη έχει αναφερθεί ότι το σύνορο κόλπος-νησί είναι έλλειψη, οπότε το τριεθνές θα βρίσκεται στην τομή των

ελλείψεων, απ’ όπου θα διέρχεται και η υπερβολή του συνόρου κόλπος-κόλπος (Σχήμα 15).

Ένα μεγάλο πλήθος περιπτώσεων δεν αναφέρθηκε, π.χ. όλες εκείνες οι περιπτώσεις που έχουν σχέση με βραχονησίδες. Όμως, γενικά, είναι παρόμοιες με τις προηγούμενες και ως εκ τούτου όσες δεν αναφέρονται και πέσουν στην αντίληψη του αναγνώστη, θα αφεθούν ως άσκηση γι’ αυτόν.

4. Συμπερασματικά: Αναφερθήκαμε στον καθορισμό των συνόρων σε υγρές περιοχές (π.χ. χωρικά ύδατα) και στον προσδιορισμό του τριεθνούς, μέσα από τις κωνικές τομές αλλά και τα προβλήματα του Απολλώνιου. Σήμερα, για τον καθορισμό των συνόρων χρησιμοποιούνται τα διαγράμματα Voronoi καθώς και αλγόριθμοι της Υπολογιστικής Γεωμετρίας [9], όμως αυτό καθόλου δεν ακυρώνει τις κωνικές τομές με την κλασσική τους έννοια. Οι γράφοντες πιστεύουν ότι το παραπάνω θέμα ή τμήμα αυτού μπορούν να το διαπραγματευτούν οι μαθητές της Β′ Λυκείου σε project είτε του Β′ εξαμήνου είτε ολόκληρου το σχολικού έτους.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. **Βικιπαίδεια**, http://el.wikipedia.org/wiki/Απολλώνιο_πρόβλημα .
2. **Γενικό Επιτελείο Εθνικής Άμυνας**, Οργάνωση, Στοιχεία Οργάνωσης Γενικού Επιτελείου Στρατού, Α Κλάδος , Επεξηγήσεις Όρων, Διεύθυνση Πληροφοριών Ασφάλειας, Διεθνείς συμβάσεις, http://www.army.gr/default.php?pname=AIGIALITIDA_ZONH&la=1
3. **Χαρίκλεια Τσιόγκα**, «*ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ: Από τα Συμπτώματα στη Γενική Εξίσωση 2ου Βαθμού – Ιστορική Παράθεση και Διδακτικές Προσεγγίσεις*», μεταπτυχιακή εργασία, Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών, Παν/μιων Αθηνών-Κύπρου, 2010. http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_Tsioga.Xarikleia.pdf
4. **Δ. Μπουνάκης**, «*Ιστορία και μελέτη με Ευκλείδεια μέσα των Κωνικών τομών*», *μεταπτυχιακή* εργασία, Μαθηματικό τμήμα του Πανεπιστημίου Κρήτης, 2004. (http://web-server.math.uoc.gr:1080/erevna/diplomatikes/Bounakis_MDE.pdf)
5. **J. L. Coolidge**, «*History of the conic sections and quadric surfaces*», Oxford University Press, 1945.
6. **Dandelin spheres**, http://en.wikipedia.org/wiki/Dandelin_spheres
7. **Ch. Taylor**, *An Introduction to the Ancient and Modern Geometry of Conics*, Deighton, Bell and co., 1881

8. **Αδαμόπουλος, Βισκαδουράκης, Γαβαλάς, Πολύζος, Σβέρκος**, «*Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης Β΄ Λυκείου*», ΟΕΔΒ, 2002.
9. **Γ. Τζούμας**, «Υπολογιστική *Γεωμετρία για Καμπύλα Αντικείμενα. Διαγράμματα Voronoi στο Επίπεδο*». PhD thesis, National & Kapodistrian Univ. Athens, 2009.
10. **Μ. Τζούμας**, «Οι γνωστές – άγνωστες κωνικές τομές», Πρακτικά – 26ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, 617–626, 2009.
11. **Μ. Τζούμας**, «Οι κωνικές τομές από την άποψη της στοιχειώδους Ευκλείδειας Γεωμετρίας», Ευκλείδης γ', 75(2011), 128-142.
12. **Απολλώνιος**, Κωνικά, Τόμος Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄, μετάφραση Ε. Σ. Σταμάτη, Έκδοση Τ.Ε.Ε., Αθήνα1975, 1976.
13. **Δ. Μπουνάκης**, «Η Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι και εδώ : Οι Κωνικές Τομές της Β' Λυκείου», Ευκλείδης γ', 73(2010), 49-70.