Αναζητώντας τις ρίζες της παραγώγου

Ο.Μ.Α.Δ.Α[1] "Εργαστήριο Έρευνας στη Διδασκαλία των Μαθηματικών"
Π. Τ. Δ. Ε. – Πανεπιστήμιο Πάτρας
email: gafratis@gmail.com,

Περίληψη

Η έρευνα που πραγματοποιήθηκε είχε ως στόχο να αναλύσει τον τρόπο σκέψης μαθητών Α λυκείου με αφορμή μια κατάσταση συμμεταβολής δυο μεγεθών: μεταβολή του ύψους του νερού σε ένα δοχείο που γεμίζει ρίχνοντας διαδοχικά μια σταθερή ποσότητα νερού. Οι μαθητές εργάσθηκαν σε περιβάλλον εργαστηρίου, εκτελώντας το πείραμα και στη συνέχεια αποτύπωσαν τα αποτελέσματα σε πίνακα τιμών και σε γραφική παράσταση. Η υπονοούμενη έννοια του ρυθμού μεταβολής ως *τρόπου που μεταβάλλεται το ύψος* (έκφραση μαθητή), και η συμβολή της στο πώς οι μαθητές συσχετίζουν τον πίνακα τιμών και τη γραφική παράσταση συμμεταβαλλόμενων μεγεθών μέσω μιας πραγματικής κατάστασης, αποτελούσε βασικό στόχο της έρευνας.

Abstract

The work conducted aimed to analyze the thought process of 10th grade students, in the framework of two quantities' covariation: change of *water level* in a container being filled with a constant *amount of water*. The students worked in a laboratory environment, performing the experiment and afterwards plotting the results in a table of values and graphical plot. The students' abilities to correlate both the table of values, and the graphical representation with the rate of change of height in relation to volume, and postulate predictions, was the main aim of this work.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Παρά την έμφαση που δίνεται διεθνώς, στη διδασκαλία της Άλγεβρας και ιδιαίτερα στην έννοια της συνάρτησης, πολλοί μαθητές έχουν μια

---

[1] **Ο.Μ.Α.Δ.Α.** : **Ο**μάδα **Μ**αθηματικών **Α**ναζητήσεων και **Δ**ιδακτικών **Α**ναστοχασμών
Αφράτης Γιώργος, Καίσαρη Μαρία, Κολέζα Ευγενία, Μανουσάκης Γιώργος, Μαρκέα Χριστίνα, Ντόντος Γιώργος, Παναγιωτόπουλος Λεωνίδας, Τζούμας Μιχάλης

περιορισμένη και καθαρά διαδικαστική αντίληψη των συναρτήσεων (Carlson, 1998; Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu, 2002). Πολλοί ερευνητές υπογραμμίζουν τη διάκριση μεταξύ του “early algebra”, και του “algebra early”. Το δεύτερο σημαίνει απλά μετακίνηση αλγεβρικών εννοιών και διαδικασιών σε μικρότερες τάξεις, ενώ το πρώτο-που είναι και το σημαντικότερο-, σημαίνει εισαγωγή των μαθητών σε ένα τρόπο σκέψης που δίνει έμφαση σε νοητικές διαδικασίες όπως γενίκευση, αναπαράσταση, αιτιολόγηση, συλλογισμός στη βάση μαθηματικών δομών και σχέσεων. Τα αποτελέσματα της έλλειψης μιας τέτοιας προσέγγισης, γίνονται φανερά στο τέλος κυρίως του γυμνασίου, όταν οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην ουσιαστική κατανόηση των συναρτήσεων. Συχνά μάλιστα, το πρόβλημα γίνεται εντονότερο λόγω του τρόπου διδασκαλίας των συναρτήσεων, που εστιάζει κυρίως σε “στατικές” διαδικασίες. Για παράδειγμα, συνήθως δίνεται ο τύπος μιας συνάρτησης και ζητείται από τους μαθητές να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση. Οι τιμές που δίνονται, είναι στις περισσότερες περιπτώσεις, ακέραιες. Το φαινόμενο αυτό έχει χαρακτηρισθεί από τον Janvier (1987) ως "discretize". Οι μαθητές σχεδιάζουν το γράφημα, χωρίς να προβληματισθούν ιδιαίτερα για το τι συμβαίνει ανάμεσα σε δυο σημεία. Δημιουργείται έτσι μια στατική αντίληψη της συνάρτησης (ένα σύνολο από “στιγμές” χ, ψ). Ο κεντρικός στόχος είναι ο προσδιορισμός της σχέσης μεταξύ δυο μεταβλητών πχ. ψ=4χ +1. Από την άλλη μεριά όταν το χ στην προηγούμενη σχέση είναι φυσικός αριθμός, οι μαθητές απαντούν θετικά στην ερώτηση για το αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής, είναι συνεχής γραμμή. Όπως έχει παρατηρηθεί, κατά την μετάβαση στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, οι φοιτητές δεν αναγνωρίζουν ως συνάρτηση, ένα γράφημα το οποίο δεν είναι συνεχές. Στην παρούσα έρευνα μας απασχολεί το πέρασμα από το διακριτό, στο συνεχές. Οι ερευνητές όταν επικεντρώνουν στην σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών και τον προσδιορισμό αυτής, αναφέρονται σε αυτού του είδους τη συσχέτιση ως “correspondence”/αντιστοίχιση (Confrey & Smith, 1995), σε αντίθεση με τη “covariation”/ συμμεταβλητότητα μεταξύ των δυο ποσοτήτων. Αυτή η δεύτερη προσέγγιση των συναρτήσεων, διευκολύνει το πέρασμα στο Λογισμό.

2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Πριν ακόμα εμφανιστεί η έννοια της συνάρτησης ο Newton και ο Leibniz, μελετώντας κινήσεις σωμάτων σε καμπυλόγραμμες τροχιές, έδιναν έμφαση στην εφαπτομένη των καμπύλων (Kleiner, 1989 σελ.186). Η έρευνα έχει δείξει ότι οι μαθητές είναι ικανοί να αντιλαμβάνονται έννοιες και διαδικασίες που βρίσκονται στη βάση του Λογισμού, πριν την τυπική διδασκαλία των αντίστοιχων θεμάτων, πχ της παραγώγου. Η εμπλοκή τους με τη διερεύνηση καταστάσεων που αφορούν συμμεταβαλλόμενα μεγέθη, (covarying quantities) συμβάλει προς αυτή την κατεύθυνση (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2002; Confrey & Smith, 1995). Ο συμμεταβολικός συλλογισμός (covariational reasoning) είναι μια από τις 4 συνιστώσες που συγκροτούν την έννοια του ρυθμού μεταβολής (rate change) μιας έννοιας, που σε στοιχειώδες επίπεδο αρχίζει να διαμορφώνεται στο νου των παιδιών, ήδη από την προσχολική ηλικία. Οι άλλες 3 συνιστώσες είναι, (α) ο αναλογικός συλλογισμός (proportional reasoning), (β) η κλίση/ο λόγος (slope/ rate) και (γ) οι συναρτήσεις και παράγωγοι. Αυτές οι 4 συνιστώσες συνδέονται στενά μεταξύ τους.

Η κατ' εξοχήν περιοχή συνύπαρξής τους είναι η Άλγεβρα και ειδικότερα οι γραμμικές συναρτήσεις. Η κατανόηση της γραμμικής συνάρτησης, είναι προϋπόθεση για την εκμάθηση πιο σύνθετων εννοιών από το χώρο της Ανάλυσης και της Στατιστικής (Wilhelm & Confrey, 2003). Οι γραμμικές συναρτήσεις χαρακτηρίζονται από τη σταθερή κλίση/σταθερό ρυθμό μεταβολής. Για την κατανόηση της κλίσης προϋποτίθεται η εξοικείωση των μαθητών με την έννοια του λόγου και της αναλογίας (Lobato & Thanheiser, 2002). Η έννοια του λόγου υπεισέρχεται και στις δυο μορφές συλλογισμού: τον αναλογικό και τον συμμεταβολικό συλλογισμό. Ο συμμεταβολικός και ο αναλογικός συλλογισμός είναι οι δυο μορφές του ποσοτικού συλλογισμού (Jacobson, 2014) (quantitative reasoning). Ο *Συμμεταβολικός συλλογισμός* (Covariational reasoning), διερευνά το πώς δυο ποσότητες μεταβάλλονται συγχρόνως: *Πως αλλάζει μια ποσότητα σε σχέση με το πώς αλλάζει μια άλλη;* (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2002). Αυτού του είδους ο συλλογισμός είναι σημαντικός για την κατανόηση γραμμικών εξισώσεων με δύο μεταβλητές, επειδή αυτές περιλαμβάνουν δυο ποσότητες που μεταβάλλονται σε συνδυασμό και ο τρόπος που αυτές οι δύο ποσότητες αλλάζουν σε σχέση η μια με την άλλη (*σταθερός ρυθμός μεταβολής*), είναι το κλειδί για την κατανόηση των γραμμικών σχέσεων. Ο *Συσχετιστικός συλλογισμός* (Correspondence reasoning), διερευνά τη συσχέτιση δυο ποσοτήτων: *Πώς σχετίζεται μια ποσότητα με μια άλλη;* Ο συσχετιστικός συλλογισμός είναι μέρος του αναλογικού συλλογισμού. Στον πρώτο (συσχετιστικό) διατυπώνεται ο λόγος/σχέση μεταξύ δυο συγκεκριμένων ποσοτήτων, ενώ στον δεύτερο (αναλογικό) δημιουργείται μια σειρά ισοδύναμων λόγων, ή επιχειρείται σύγκριση λόγων, που γενικεύει το συλλογισμό. Ο αναλογικός συλλογισμός είναι σημαντικός για την κατανόηση γραμμικών εξισώσεων με δύο μεταβλητές, επειδή αυτές εμπεριέχουν ένα σταθερό λόγο που ονομάζεται *κλίση* και λύσεις που σχετίζονται με αυτή την κλίση. Η απλούστερη περίπτωση της κλίσης (m) είναι όταν ισούται με τη σταθερά της αναλογίας, $y = mx$. Στη συγκεκριμένη εργασία θα εστιάσουμε, στον τρόπο που οι μαθητές χρησιμοποιούν αυτούς τους δυο τύπους συλλογισμού, με αφορμή μια πραγματική κατάσταση.

Οι ερευνητικές μας υπόθεσεις είναι ότι:

1. Πολύ πριν την τυπική διδασκαλία της παραγώγου, οι μαθητές μπορούν να προσεγγίσουν την έννοια διαισθητικά και ποιοτικά, μέσω προβλημάτων που αναφέρονται σε συμμεταβαλόμενα μεγέθη, με ίδιο ή διαφορετικό ρυθμό μεταβολής.

2. Η εστίαση κατά τη διδασκαλία στον αναλογικό συλλογισμό (αναζήτηση του τύπου της συνάρτησης), οδηγεί σε παρανοήσεις και υπεργενικεύσεις, σε σχέση με τον τρόπο που συνδέονται δυο μεταβαλλόμενα μεγέθη.

Συμμεταβολή, Ρυθμός μεταβολής

Τις τελευταίες δυο δεκαετίες έχει ενταθεί η έρευνα που αφορά την εξέλιξη του συμμεταβολικού συλλογισμού,

1) λόγω των χαμηλών επιδόσεων διεθνώς των μαθητών σε έννοιες του Λογισμού, και 2) λόγω της εισαγωγής της Άλγεβρας ήδη από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού σχολείου.

Σημαντική έρευνα σχετικά με τη συμμεταβολή πραγματοποιήθηκε από την Marilyn Carlson και τους συνεργάτες της (Confrey & Smith, 1995). Σε μια δραστηριότητα (από την οποία εμπνεύστηκε και η δική μας έρευνα) παρόμοια με εκείνη που αναφέρεται στο Bell & Janvier (1981), ζητείται από τους μαθητές να κατασκευάσουν μια γραφική παράσταση του ύψους σε σχέση με τον όγκο του νερού, που ρέει με σταθερό ρυθμό σε ένα δοχείο. Μια πρώτη παρατήρηση που καταθέτουν οι ερευνητές, αφορά την αδυναμία μιας σωστής απάντησης, ακόμα και από καλούς μαθητές (Carlson, 1998, pp. 138–139), με βασική εξήγηση τη στατική άποψη που έχουν οι μαθητές για την περιγραφή δυναμικών καταστάσεων. Οι μαθητές μαθαίνουν να βρίσκουν σημεία σε μια γραφική παράσταση και στη συνέχεια να τα ενώνουν με ευθείες ή καμπύλες, χωρίς καμμία συζήτηση για το τι συμβαίνει ανάμεσα στα σημεία. Μια πρόταση βελτίωσης θα ήταν οι αποστάσεις μεταξύ των σημείων, να είναι όσο το δυνατόν μικρότερες, με το σκεπτικό ότι πολύ μικρές αλλαγές στις ποσότητες θα υποβάλλει στους μαθητές την έννοια του συνεχούς. Εντούτοις, ή έρευνα έδειξε ότι αυτό δεν ισχύει: “όσο μικρά κι αν είναι τα τμήματα, δεν παύει η προσέγγιση να είναι τμηματική/αποσπασματική (chunky)’’ (Castillo-Garsow, Johnson and

Moore 2013). Υποστηρίζουν ότι η συνέχεια επιβάλλει συνεχή κίνηση, κάτι που συνάδει με την περιγραφή των fluents από τον Newton (οι ρέουσες ποσότητες -flowing quantities) που ήταν στη βάση του Λογισμού του.

3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Μια ομάδα 5 καθηγητών (3 λυκείου και 2 γυμνασίου), σε συνεργασία με δυο συμβούλους και έναν ερευνητή, διαμόρφωσαν σταδιακά μια Κοινότητα Διερεύνησης, στα πρότυπα της Μελέτης Μαθήματος (Lesson Study). Βασικός στόχος της ομάδας ήταν η αναζήτηση «σημαντικών» σημείων του Π.Σ. των Μαθηματικών Γυμνασίου-Λυκείου. Ένα σημείο θεωρήθηκε «σημαντικό» όταν διατρέχει το Π.Σ. των Μαθηματικών, αποτελεί το συνδετικό κρίκο για πολλές μαθηματικές έννοιες, εμφανίζεται στα Π.Σ. των άλλων Επιστημών (Φυσική, Χημεία, Βιολογία...) και συντελεί ουσιαστικά στην ερμηνεία και μοντελοποίηση φαινομένων και καταστάσεων της πραγματικής ζωής. Από τη στιγμή του εντοπισμού των βασικών σημείων, η ομάδα έθεσε ως στόχους: την κατανόηση σε βάθος αυτών των σημείων από μαθηματική και παιδαγωγική σκοπιά, τη διατύπωση υποθέσεων σχετικά με τις δυσκολίες κατανόησης αυτών των σημείων από τους μαθητές, την υλοποίηση ερευνητικών δράσεων για τον έλεγχο των υποθέσεων, το σχεδιασμό διδακτικών παρεμβάσεων σε σχέση με αυτά τα σημεία στην τάξη, την επανατροφοδότηση του σχεδιασμού, τη διατύπωση και καταγραφή συμπερασμάτων.

Οι δραστηριότητες/οι μαθητές

Μια σειρά από δραστηριότητες με γενικό τίτλο "Τα μπουκάλια", επιλέχθηκαν σε συνδυασμό και σε συνεργασία με ένα σχετικό έκθεμα της Εστίας Επιστημών στην Πάτρα και προτάθηκαν σε μαθητές που φοιτούσαν σε 2 γυμνάσια και 2 λύκεια της Πάτρας. Το σημαντικό σημείο του Π.Σ. στο οποίο επικεντρώθηκε η ομάδα, ήταν η έννοια της συνάρτησης και πιο συγκεκριμένα ο ρυθμός μεταβολής ως το πέρασμα από την Άλγεβρα (ξεκινώντας από τα μοτίβα) στο Διαφορικό Λογισμό. Τα κριτήρια βάσει των οποίων επιλέχθηκαν οι δραστηριότητες ήταν: Πρώτον, αφορούσαν τις συναρτήσεις. Δεύτερον, η συνάρτηση παρουσιαζόταν με μη αριθμητικό τρόπο. Τρίτον, η συνάρτηση μοντελοποιούσε μια πραγματική κατάσταση (γέμισμα μπουκαλιών). Επιπλέον, οι δραστηριότητες που επιλέχθηκαν για την έρευνα, ήταν τέτοιες που να προωθούν τον αποσπασματικό (chunky) και τον ομαλό συμμεταβολικό συλλογισμό. Στη συγκεκριμένη εργασία παρουσιάζουμε μόνον τον πρώτο τύπο δραστηριοτήτων. Αν και γνωρίζαμε τα μειονεκτήματα αυτού του τύπου των δραστηριοτήτων, τις επιλέξαμε για δυο κυρίως λόγους: Για να αναδειχθούν οι ενδεχόμενες παρανοήσεις των μαθητών και γιατί ήταν πιο οικείες στους μαθητές λόγω του τρόπου που διδάσκονται τις συναρτήσεις.

Το περιβάλλον

Το περιβάλλον στο οποίο εργάσθηκαν οι μαθητές ήταν ένα περιβάλλον εργαστηρίου (Φυσικής). Η όλη διαδικασία παρέπεμπε σε πείραμα, στο πλαίσιο του οποίου έπρεπε να γίνουν ακριβείς (δοσο)-μετρήσεις, καταγραφές, συμπλήρωση πίνακα τιμών, γραφική παράσταση και διατύπωση τελικού συμπεράσματος. Είχαν προβλεφθεί επίσης, ερωτήσεις πρόβλεψης μεταξύ δυο δραστηριοτήτων. Παρά το ότι οι δραστηριότητες (λόγω των μετρήσεων) είχαν το χαρακτήρα αποσπασματικού συμμεταβολικού συλλογισμού, δεν περιλάμβαναν αλγεβρικές εκφράσεις, κάτι που θα ενίσχυε την "action view" της συνάρτησης (Dubinsky & Harel, 1992). Αν και μια τέτοια προσέγγιση δεν απαγορεύει τη διαμόρφωση μιας αντίληψης "συνέχειας", εντούτοις είναι εννοιολογικά περιορισμένη.

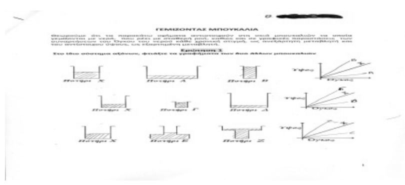
Το έργο

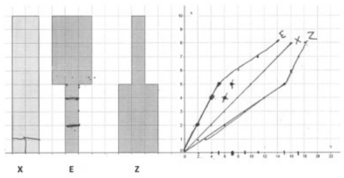
Η έρευνα αποτελείτο από 4 φάσεις: 1) Ένα αρχικό ερωτηματολόγιο, μέσω του οποίου επιδιώξαμε να ανιχνεύσουμε τις αρχικές αντιλήψεις των μαθητών, για τη σχέση όγκου-ύψους σε ένα πρόβλημα "γεμίσματος μπουκαλιών". 2)Στη συνέχεια οι μαθητές σε ομάδες, πραγματοποίησαν το πείραμα του γεμίσματος διαφόρων τύπων μπουκαλιών, σε συνθήκες εργαστηρίου. 3)Το πέρασμα στην τάξη για τη διδασκαλία των εννοιών που εμπλέκονταν στο πείραμα (κλίση, ρυθμός μεταβολής), αποτέλεσε την τρίτη φάση. 4)Τέλος, μετά από ένα περίπου μήνα, δόθηκε στους μαθητές ένα δεύτερο ερωτηματολόγιο, με ερωτήματα παρόμοια με εκείνα του αρχικού ερωτηματολογίου. Αφού απομαγνητοφωνήθηκαν οι συζητήσεις με τους μαθητές, αναγνωρίστηκαν τα αποσπάσματα που περιείχαν απαραίτητες πληροφορίες και σημαντικά μηνύματα. Από αυτά αναγνωρίστηκαν κάποια κρίσιμα επεισόδια, τα οποία σύμφωνα με την Maher (2009), είναι αυτά όπου φαίνεται μεγάλη πρόοδος, εννοιολογική αλλαγή, που συμβαίνουν ενοράσεις ή έρχονται στην επιφάνεια γνωστικά εμπόδια.

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ

1) Ο πειραματισμός των μαθητών στο εργαστήριο, βελτίωσε ουσιαστικά τις ικανότητές τους ως προς τη θεώρηση της συμμεταβολής των δυο μεγεθών (όγκος-ύψος). Παραθέτουμε ένα παράδειγμα από την εξέλιξη ενός μαθητή του Θοδωρή (λόγω περιορισμένου χώρου). Το ερωτηματολόγιο μετά ήταν περίπου το ίδιο. Τα μπουκάλια τώρα ήταν τοποθετημένα σε μιλιμετρέ χαρτί, αφού είδαμε ότι στο αρχικό ερωτηματολόγιο αρκετά παιδιά το δημιουργούσαν από μόνα τους.

Αρχικό Ερωτηματολόγιο/και ένα μήνα μετά





2) Η έρευνα έχει δείξει ότι επειδή οι μαθητές μελετούν καταρχήν αναλογίες και γραμμικές συναρτήσεις, τείνουν να χρησιμοποιούν γραμμικές σχέσεις και εκεί που δεν εφαρμόζονται. Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται «επικράτηση της γραμμικότητας» ("predominance of linearity") (Dooren et al., 2008, p. 311). Αν αυτή η τάση συνδιαστεί με την κατασκευή μιας ατελούς γραφικής παράστασης, μπορεί να επηρεάσει σημαντικά την εκτίμηση της κατάστασης. Κι αυτό γιατί οι μαθητές δεν τη βλέπουν ως «μια προσεγγιστική εικόνα» της σχέσης, αλλά ως μια πιστή απεικόνιση των πραγμάτων. Η έννοια του πειραματικού λάθους δεν υφίσταται καθόλου, κάτι που υποβαθμίζει τη διαδικασία μοντελοποίησης. Στο απόσπασμα που ακολουθεί τα παιδιά γεμίζουν ένα κωνικό δοχείο.

Ε: *Να σας ρωτήσω κάτι …από τις μετρήσεις που παίρνετε έχετε κάποια ένδειξη για τη σχέση όγκου-ύψους; Μπορείτε να κάνετε κάποια πρόβλεψη;*

Κ: *Τα ποσά είναι ανάλογα…*

Ε: *Ποια ποσά;*

Κ, Ν: *Ο όγκος και το ύψος…*

Κ: *Δηλαδή περιμένετε πως αν διπλασιαστεί ο όγκος, θα διπλασιαστεί και το ύψος;*

Όλα τα παιδιά μαζί: *Ναι, ναι…*

Σε αυτήν την περίπτωση, ακόμα και η χρήση αντιπαραδειγμάτων, μπορεί να αποδειχθεί ανεπαρκής.

Τα παιδιά δείχνουν τη βάση του δοχείου.

Ε: *Γιατί εδώ είναι ανάλογα τα ποσά;*

Ν.: *Γιατί το δοχείο δεν είναι τόσο κωνικό, όσο όταν ανεβαίνουμε προς τα πάνω…*

Ε: *Αν λοιπόν δεν είχε αυτήν την κλίση και ήταν κατακόρυφο,σαν αυτό (τους δείχνει τον κυλινδρικό δοσομετρητή) θα ήταν πάλι ανάλογα τα ποσά;*

Τα παιδιά μαζί: *Ναι !*

Ε: *Το νερό θα ανέβαινε με τον ίδιο τρόπο;*

Τα παιδιά μαζί: *Ναι με τον ίδιο…*

Ε: *Δηλαδή παρότι αυτό είναι καμπύλο, ανεβαίνει με τον ίδιο τρόπο το νερό;*
Τα παιδιά μαζί: *Ναι !*

…………….

Ν: *…τελικά θα αλλάξω γνώμη γιατί έχουν διαφορετικό σχήμα και το διαφορετικό σχήμα, όσο νερό προσθέτεις το ύψος θα μεταβάλλεται.*

Ε: *Με ποιο τρόπο;*

Ν: *Θα μεταβάλλεται διαφορετικά απ' ότι σε ένα κυλινδρικό δοχείο…*

Ε: *Δηλαδή στο δοχείο σας πώς περιμένεις να μεταβάλλεται;*

Ν: *Πιο γρήγορα…*

Κ: *Ναι, γιατί το σχήμα όσο πάει και μικραίνει… μάλλον είναι λάθος οι μετρήσεις μας …να το σβήσουμε*

Οι μαθητές είναι συνηθισμένοι να δουλεύουν, είτε με «πλαστά» πραγματικά προβλήματα, όπου οι μετρήσεις είναι δεδομένες και σε πολλές περιπτώσεις ακέραιες, είτε με ακριβείς μετρήσεις στον υπολογιστή. Η αμφισβήτηση της μέτρησης στη βάση μιας εννοιολογικής κατανόησης, είναι σημαντική στιγμή στη διαδικασία μοντελοποίησης.

3) Στο απόσπασμα που ακολουθεί, φαίνεται η άνεση με την οποία ένας μαθητής χειρίζεται την έννοια του ρυθμού μεταβολλής, χωρίς να την έχει διδαχθεί πριν. Η χρήση της έννοιας αυτής, τον βοηθά να συσχετίσει τον πίνακα τιμών με την γραφική παράσταση, αλλά και με το πλαίσιο (γέμισμα μπουκαλιού) στο οποίο η έννοια της συνάρτησης αναδύεται.

Χ: *Τι βλέπετε παιδιά;*

Ο Ν απλά της διαβάζει τον πίνακα τιμών.

Χ: *Δηλαδή τι θες να πεις;*

Ν: *Ότι όσο μεταβάλλεται ο όγκος, μειώνεται και ο τρόπος με τον οποίο αλλάζει το ύψος.*

Χ: *Δηλαδή δεν αλλάζει με τον ίδιο τρόπο;*

Ν: *Ναι…δεν αλλάζει με τον ίδιο τρόπο…έχει μειωθεί ο τρόπος…ενώ η μεταβολή του όγκου είναι σταθερή….έχει αλλάξει ο τρόπος που μεταβάλλεται το ύψος.*

Χ: *Και τι συμπέρασμα βγάζετε από αυτό;*

Ν: *Ότι ανάλογα με το σχήμα που έχουμε…γιατί το σχήμα είναι έτσι* (κάνει με το χέρι του το σχήμα του μπουκαλιού)*...είναι περίπου σαν κουβάς. Στο κάτω μέρος όσο ρίχνουμε ..και συσσωρεύεται λιγότερο το νερό εδώ...έχει μια μεγαλύτερη μεταβολή του ύψους. Όσο όμως αρχίζει και μεγαλώνει ο όγκος του νερού και πηγαίνουμε προς τα πάνω, αρχίζει και μειώνεται η μεταβολή του ύψους.*

4) Ο τρόπος διδασκαλίας των συναρτήσεων στο σχολείο, όπως ήδη αναλύσαμε το θεωρητικό μέρος, αφήνει ουσιαστικά αναπάντητο το

ερώτημα: *ποιά είναι η μορφή της γραμμής στη γραφική παράσταση, ανάμεσα σε δυο σημεία*. Στην περίπτωσή μας, η χρήση του πειραματισμού με πραγματικά αντικείμενα, έδωσε τη δυνατότητα στους μαθητές για μια διαισθητική προσέγγιση. Αυτό όμως δεν επιλύει το πρόβλημα στο σύνολό του. Θεωρούμε ότι μια προσέγγιση των συναρτήσεων από την ήδη αρχή του Γυμνασίου δίνοντας έμφαση στο συμμεταβολικό συλλογισμό, θα διευκόλυνε την κατανόηση πιο σύνθετων εννοιών σε μεγαλύτερες τάξεις.

Επεισόδιο 1

Ε: *Ανάμεσα σε 2 σημεία θα είναι καμπυλωτό ή θα είναι ευθεία;*

Μ1 (Ζωή): *Θα είναι μισό-ίσιο και μισό-καμπυλωτό.*

Ε: *Δηλαδή, αποκλείεται να είναι τεθλασμένη γραμμή;*

Μ1: *Ναι, αποκλείεται.*

Μ2: *Ανάμεσα σε 2 σημεία να είναι ευθεία και όλο το διάγραμμα να πάει καμπύλη.*

Μ1: *Δεν γίνεται να πηγαίνει έτσι (τεθλασμένα εννοεί) η καμπύλη και να κάνει γωνίες. Απλώς υπάρχει δικό μου λάθος (στις μετρήσεις) και πρέπει να κατεβάσουμε λίγο τα νούμερα.*

Ε: *Πρώτα θα φτιάξεις την καμπύλη και μετά θα βάλεις τα σημεία;*

Μ1: *Αυτά τα σημεία πρέπει να πάνε λίγο πιο κάτω, επειδή είμαι σίγουρη ότι θα βγει καμπύλη.*

Ε: *Γιατί είσαι σίγουρη ότι θα βγει καμπύλη;*

Μ1: *Επειδή δεν είναι αριθμητική πρόοδος (εννοεί οι μετρήσεις των υψών). Να πηγαίνει δηλαδή 5+5+5...., να είχε ένα μοτίβο*

Ε: *Δηλαδή εάν ήταν αριθμητική πρόοδος, πώς θα ήταν η γραφική παράσταση;*

Μ1: *Ευθεία δεν θα ήταν; ..νομίζω... θα έπρεπε για να ήταν καμπύλη να υπήρχε ένα "τετράγωνο μέσα"...*

Επεισόδιο 2

Ε: *Σε αυτή τη γραφική παράσταση, ανάμεσα στα σημεία Σ1 και Σ2 πώς είναι η γραμμή;*

Μ (Μανώλης): *Καμπύλη.*

Ε: *Γιατί είσαι τόσο σίγουρος ότι είναι καμπύλη;*

Μ1: *Είναι (δείχνει την πλήρη γραφική παράσταση) σαν να είναι μεγέθυνση του μικρού.. Όσο πιο πολλά σημεία πάρουμε..*

Βιβλιογραφία

Bell, A., & Janvier, C. (1981). The interpretation of graphs representing situations. *For the Learning of Mathematics*, 2(1), 34-42.

Carlson, M. P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. *Research in collegiate mathematics education*, *3*, 114-62.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. & Hsu, E. (2002) Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education* 33(5), 252–378.

Castillo-Garsow, C., Johnson, H. L., & Moore, K. C. (2013). Chunky and smooth images of change. *For the Learning of Mathematics*, 33(3), 31-37.

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting Covariation, and Their Role in the Development of Exponential Functions. *Journal for Research in Mathematics Education,* 26(1), 66– 86.

Dooren, W.M., De Bock, D., Janssens, D., Verschaffel, L. (2008). The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students' overuse of linearity. *Journal for Research in Mathematics Education.* Vol. 39, No. 3

Dubinsky, E., &Harel,G. (1992). The Nature of the Process Conception of Function. In G. Harel & Ed. Dubinsky. (Eds)*The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, 85-106.MAA

Jacobson, E. (2014). Using Covariation Reasoning to Support Mathematical Modeling. Mathematics Teaching in the Middle School, 107(7) 515-519.

Janvier, C. E. (1987). Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. In This book stems from a symposium organized by CIRADE (Centre Interdisciplinaire de Recherche sur l" Apprentissage et le Développement en Education) Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Johnson, H. L. (2012) Reasoning about variation in the intensity of change in covarying quantities involved in rate of change. *Journal of Mathematical Behavior* 31(3), 313- 330.

Lobato, J., & Thanheiser, E. (2002). Developing understanding of ratio-as-measure as a foundation for slope. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 yearbook* (pp. 162-175). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *The College Mathematics Journal*, *20*(4), 282-300.

Maher, C. A. (2009). Children's reasoning: Discovering the idea of mathematical proof. *Teaching and learning proof across the K-16 curriculum*, 120-132.

Wilhelm, J. A., & Confrey, J. (2003). Projecting rate of change in the context of motion onto the context of money. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology*, 34(6), 887–904.