Συσχέτιση - Συμμεταβολή - Προσέγγιση

Γ. Αφράτης, Μ. Καίσαρη, Ε. Κολέζα, Γ. Μανουσάκης, Χ. Μαρκέα, Γ. Ντόντος, Λ. Παναγιωτόπουλος, Μ. Τζούμας.
mtzoumas@sch.gr

Περίληψη

Ο τρόπος με τον οποίο συνδέονται οι τιμές δύο μεταβαλλόμενων μεγεθών, μέσα σε ένα χώρο μέτρησης, ενδέχεται να είναι γνωστός, να είναι ή να μην είναι προσδιοριζόμενος αν και γνωρίζουμε ότι υπάρχει τρόπος σύνδεσης. Σε αυτές τις περιπτώσεις άλλοτε λέμε ότι έχουμε συσχέτιση (correlation) των μεγεθών άλλοτε λέμε ότι έχουμε συμμεταβολή (covariation) αυτών και άλλοτε ψάχνουμε για το «βαθμό συσχέτισης» των μεγεθών. Επίσης, αναφέρονται και αποδεικνύονται θεωρήματα που συνδέουν τη σχέση των μεγεθών με τη σχέση των μεταβολών τους, μελετώντας τα χαρακτηριστικά των συντελεστών συσχέτισης και του ρυθμού μεταβολής.

Abstract

The way in which the values of two variables are linked, within a measurement space, it is likely to be known, to be or not to be determined even if we know that there is a type of connection. In these cases, we can sometimes state that there is correlation of the two variables or there is co-variation, alternatively we search for the ratio of the two variables. Moreover, theorems, which link the correlation of the variables to the correlation of their rates, are mentioned and proved by studying the characteristics of the ratio and rate factors.

Λέξεις Κλειδιά: Ρυθμός μεταβολής, συσχέτιση, συμμεταβολή, χώρος μέτρησης.

Εισαγωγή

Η έννοια της συνάρτησης, ως κεντρική στην Μαθηματική Παιδεία και οι δυσκολίες στην κατανόησή της από τους μαθητές, έχουν απασχολήσει πολλούς ερευνητές (π.χ. [4], [5]). Κεντρικό ερώτημα στις περισσότερες έρευνες είναι η εύρεση ενός τρόπου προσέγγισης της έννοιας της συνάρτησης διαφορετικού από τον αλγεβρικό. Οι έρευνες έχουν δείξει ότι ο αλγεβρικός τρόπος προσέγγισης της συνάρτησης, λόγω του στατικού του χαρακτήρα, δημιουργεί δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας και των διαφορετικών αναπαραστάσεών της ([2]). Ένα άλλο ερευνητικό αποτέλεσμα είναι ότι η ενασχόληση των μαθητών με τα ίδια τα μεγέθη και τον συσχετισμό τους είναι απαραίτητη πριν την εισαγωγή τους στην έννοια της συνάρτησης ([7]). Η συσχέτιση, η συμμεταβολή και ο ρυθμός μεταβολής δύο μεγεθών βρίσκονται στο επίκεντρο των ερευνών και διερευνάται η συμβολή τους στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης και γενικότερα στην ενίσχυση του λεγόμενου συναρτησιακού και αλγεβρικού συλλογισμού ([3]). Ο προβληματισμός αυτός οδήγησε την ερευνητική μας ομάδα στον σχεδιασμό διδακτικών πειραμάτων σε εργαστηριακό πλαίσιο γεμίζοντας διαφορετικού τύπου μπουκάλια: : οι μαθητές ρίχνοντας διαδοχικά μια σταθερή ποσότητα νερού (σε διαφορετικά μπουκάλια) διερεύνησαν την συμμεταβολή του ύψους και του όγκου του νερού, εργαζόμενοι στο περιβάλλον του εργαστηρίου των φυσικών επιστημών ([1]). Σκοπός του άρθρου αυτού είναι να διασαφηνιστούν και να θεμελιωθούν από μαθηματική σκοπιά οι έννοιες της συσχέτισης, της συμμεταβολής και του ρυθμού μεταβολής που είναι βασικές για την εισαγωγή της έννοιας της συνάρτησης στους μαθητές. Πριν αναλύσουμε τις μεταβολές μεγεθών σε έναν χώρο, δίνουμε τον βασικό ορισμό του χώρου μέτρησης:

Ορισμός. Ως χώρο μέτρησης ορίζουμε το χώρο στον οποίο παίρνει τιμές μια ποσοτική μεταβλητή.

Έτσι, για παράδειγμα, όταν μετρούμε το βάρος ή το ύψος των στοιχείων ενός συνόλου, ο χώρος μέτρησης αυτών είναι ο χώρος των πραγματικών θετικών αριθμών $\mathbb{R}^+$ μαζί με τις μονάδες μέτρησής τους. Σε ένα χώρο μέτρησης, λοιπόν, γίνονται ποσοτικές μετρήσεις, οπότε έχουμε για τιμές της μεταβλητής μας στοιχεία του χώρου μέτρησης, π.χ. τις $x_1, x_2 \cdots, x_n$

Σημείωση: Όταν ο χώρος μέτρησης είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε η μεταβλητή μας ονομάζεται αλλιώς «μέγεθος» ή «ποσόν».

1. Μεταβολές σε έναν χώρο.

Σε έναν χώρο μέτρησης, προφανώς, οι τιμές που παίρνει η μεταβλητή υπόκεινται σε μεταβολές, σε αλλαγές. Οι μεταβολές αυτές προσδιορίζονται με δυο διαφορετικούς τρόπους: με **πολλαπλασιασμό** ή με **πρόσθεση**.

- **Μεταβολές με πολλαπλασιασμό.**

Θεωρούμε ότι ο χώρος μέτρησης στο οποίο παίρνει τιμές η ποσοτική μεταβλητή μας είναι το σώμα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Έτσι, για κάθε βαθμωτό (scalar) $k_i \in \mathbb{R}$ και κάθε τιμή της μεταβλητής μας $0 \neq x_i \in \mathbb{R}$ προκύπτει μια καινούργια τιμή για τη μεταβλητή μας, μέσα από το βαθμωτό πολλαπλασιασμό, διαφορετική εν γένει από την προηγούμενη η $x_{i+1} = k_i \cdot x_i$. Αν επί πλέον οι τιμές τις μεταβλητής διαταχθούν με κάποιο τρόπο, όχι αναγκαστικά με την συνήθη διάταξη, τότε το βαθμωτό k_i θα το λέμε «**συντελεστή**» τάξης 1 της μεταβλητής, αν $x_{i+1} = k_i \cdot x_i$ (ή τάξης m αν $x_{i+m} = k_i \cdot x_i$). Προφανώς ισχύει:

$$x_{i+1} = k_i \cdot x_i \Leftrightarrow k_i = \frac{x_{i+1}}{x_i} \left(\text{ή } x_{i+m} = k_i \cdot x_i \Leftrightarrow k_i = \frac{x_{i+m}}{x_i} \right), \forall i \qquad (1)$$

Προφανώς η ισοδυναμία στη σχέση (1) ισχύει για τον μονοδιάστατο χώρο $\mathbb{R}$ και όχι για χώρους παραπάνω διάστασης.

- **Μεταβολές με πρόσθεση.**

Θεωρούμε, τώρα, ότι η ποσοτική μεταβλητή μας παίρνει τιμές στο χώρο μέτρησης αυτής $\mathbb{R}$. Έτσι, για κάθε τιμή της μεταβλητής μας $x_i \in \mathbb{R}$, υπάρχει κάποια τιμή $\Delta x_i \in \mathbb{R}$, για την οποία προκύπτει μια καινούργια τιμή για τη μεταβλητής μας, διαφορετική εν γένει από την προηγούμενη, η $x_{i+1} = x_i + \Delta x_i$. Προφανώς, ισχύει:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i \Leftrightarrow \Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \ \forall i \qquad (2)$$

Η ισοδυναμία της σχέσης (2) ισχύει όχι μόνον για τον μονοδιάστατο χώρο $\mathbb{R}$, αλλά και για χώρους περισσότερων διαστάσεων.

2. Μεταβολές σε δύο χώρους.

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι σε κάθε μέτρηση αντιστοιχούν δύο τιμές (x_i, y_i) και με κάποιο τρόπο ότι οι τιμές των μεγεθών αυτών **συνδέονται** μεταξύ τους. Σε μία τέτοια περίπτωση εμφανίζονται κυρίως δύο καταστάσεις:

- Υπάρχει (είναι γνωστός ή εύκολος να αναγνωριστεί) ο τρόπος που συνδέονται οι τιμές (x_i, y_i).
- Υπάρχουν οι τιμές, είναι γνωστό ότι αυτές συνδέονται μεταξύ και **δεν** είναι γνωστό ή εύκολο να αναγνωριστεί ο τρόπος της σύνδεσής τους,

ωστόσο μας ενδιαφέρει να δούμε το πως συνδέονται οι τιμές των δύο μεγεθών.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η δεύτερη περίπτωση. Γενικά, το πως συνδέονται οι τιμές των δύο μεγεθών, δεν είναι πάντα εύκολο να διαπιστωθεί και ως εκ τούτου, με δεδομένο ότι οι τιμές του κάθε μεγέθους μεταβάλλονται, ενδιαφερόμαστε σε πρώτη φάση για το πως αλλάζουν (πως μεταβάλλονται) οι τιμές των μεγεθών αυτών, οι τιμές του ενός, με τις αντίστοιχες τιμές του άλλου. Συνηθισμένος τρόπος προσέγγισης είναι η μελέτη του λόγου $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$, που καλείται «**ρυθμός μεταβολής**»[1] **(rate)**. Στην πρώτη από τις δυο παραπάνω περιπτώσεις λέμε ότι έχουμε **συσχέτιση** (**correlation)** των ποσών, ενώ στη δεύτερη λέμε ότι έχουμε **συμμεταβολή** (**covariation**) αυτών. Ωστόσο, δεν είναι λίγες οι φορές που ενδιαφερόμαστε ειδικά για αυτές τις μεταβολές. Τόσο η συσχέτιση όσο και η συμμεταβολή των μεγεθών εμφανίζονται όταν είναι γνωστό ότι **υπάρχει** ο κανόνας που συνδέει τις τιμές στους δύο χώρους μέτρησης και ανάλογα με το δρόμο που ακολουθούμε για να μελετήσουμε τη σύνδεση των ποσών χαρακτηρίζουμε τη συλλογιστική που αναπτύσσεται ως «**συσχετιστική λογική»** ή «**συμμεταβολική λογική**».

Όταν είναι γνωστό ότι **δεν** υπάρχει κανόνας σύνδεσης ή όταν **δεν** είναι γνωστή η ύπαρξη αυτού του κανόνα (Παράδειγμα 2.4), τότε μιλάμε για το «**βαθμό συσχέτισης**» (ή μιλάμε για την «**προσέγγιση»**) των μεγεθών και ένας χαρακτηριστικός τρόπος αντιμετώπισης είναι η «ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων» (παλινδρόμηση). Παρόλο ότι η συσχέτιση των τιμών είναι σε πρώτο επίπεδο όσον αφορά τη σύνδεση των τιμών των μεταβλητών και η συμμεταβολή σε ένα δεύτερο επίπεδο και οι δύο προϋποθέτουν την ύπαρξη της σύνδεσης των τιμών των δυο ποσοτήτων και μελετούν αυτή καθαυτή την σύνδεση. Στα επόμενα παραδείγματα παρουσιάζουμε μεγέθη που συνδέονται με κάποιο τρόπο, τις τιμές τους, τις μεταβολές των τιμών τους και ένα παράδειγμα χωρίς να υπάρχει σύνδεση τιμών.

Παράδειγμα 2.1 Στο διπλανό πίνακα φαίνονται οι τιμές της πλευράς x_i και της διαγώνιου y_i ενός τετραγώνου, καθώς και οι μεταβολές τους.

Δx_i	κ_i	x_i	y_i	λ_i	Δy_i
1	2	1	1,41	2	1,41
1	1,5	2	2,82	1,5	1,41
1	1,33	3	4,23	1,33	1,41
1	1,25	4	5,64	1,25	1,41

[1] Άλλες δόκιμες εκφράσεις είναι: «λόγος μεταβολής», «λόγος διαφορών» ή «διαιρεμένες διαφορές».

1	1,2	5	7,05	1,2	1,41
1	1,17	6	8,46	1,17	1,41
1	1,14	7	9,87	1,14	1,41
		8	11,28		

Παράδειγμα 2.2 Στο διπλανό πίνακα φαίνονται οι τιμές της πλευράς x_i και του εμβαδού y_i ενός τετραγώνου, καθώς και οι μεταβολές τους.

Δx_i	κ_i	x_i	y_i	λ_i	Δy_i
1	2	1	1	4	3
1	1,5	2	4	2,25	5
1	1,33	3	9	1,78	7
1	1,25	4	16	1,56	9
1	1,2	5	25	1,44	11
1	1,17	6	36	1,36	13
1	1,14	7	49	1,31	15
		8	64		

Παράδειγμα 2.3 Στο διπλανό πίνακα φαίνονται οι τιμές του μήκους x_i και του πλάτους y_i ενός ορθογωνίου σταθερού εμβαδού, καθώς και οι μεταβολές τους.

Δx_i	κ_i	x_i	y_i	λ_i	Δy_i
1	2	1	24	$\frac{1}{2}$	-12
1	$\frac{3}{2}$	2	12	$\frac{2}{3}$	-4
1	$\frac{4}{3}$	3	8	$\frac{3}{4}$	-2
2	$\frac{3}{2}$	4	6	$\frac{2}{3}$	-2
2	$\frac{4}{3}$	6	4	$\frac{3}{4}$	-1
4	$\frac{3}{2}$	8	3	$\frac{2}{3}$	-1
		12	2		

Παράδειγμα 2.4 Ένας επιστήμονας καταγράφει, για δέκα χρόνια, τον αριθμό των κηλίδων του ήλιου και τα τροχαία ατυχήματα που συμβαίνουν στην Ελλάδα.

Για τα μεγέθη: αριθμός κηλίδων και αριθμός τροχαίων ατυχημάτων ενδιαφερόμαστε για το «**βαθμό** συσχέτισης» αυτών.

Παράδειγμα 2.5 Στο διπλανό πίνακα φαίνονται ο όγκος x_i και το ύψος y_i του νερού σε ένα μπουκάλι που γεμίζει με κάποιο τρόπο με νερό, καθώς και οι μεταβολές τους.

Δx_i	κ_i	x_i	y_i	λ_i	Δy_i
55	2	55	2,01	1,47	0,94
55	1,5	110	2,95	1,27	0,79
55	1,33	165	3,74	1,2	0,73
55	1,25	220	4,47	1,16	0,7
55	1,2	275	5,17	1,14	0,71
55	1,17	330	5,88	1,13	0,75

55	1,14	385	6,63	1,12	0,82
55	1,13	440	7,45	1,21	1,53
30	1,06	495	8,98	1,11	1,02
		525	10		

Παράδειγμα 2.6 Θεωρούμε δύο σταθερά σημεία Α και Β, μία σταθερή ευθεία (ε) και ένα κινητό Μ επ' αυτής. Τα μεγέθη μας είναι οι αποστάσεις x_i και y_i του κινητού Μ, κάθε στιγμή, από τα σημεία Α και Β.

$Δx_i$	$κ_i$	x_i	y_i	$λ_i$	$Δy_i$
0,66	1,3	2,22	10,21	0,8	-2,03
1,87	1,65	2,88	8,18	0,88	-0,97
1,03	1,22	4,75	7,21	0,87	-0,92
1,07	1,18	5,78	6,29	0,87	-0,84
1,08	1,16	6,85	5,45	0,87	-0,73
1,09	1,14	7,92	4,72	0,88	-0,56
		9,01	4,17		

Στα τρία πρώτα παραδείγματα η συσχέτιση είναι εμφανής. Στα δύο τελευταία παραδείγματα παρατηρώντας τις τιμές των μεταβλητών δεν είναι εμφανής η σχέση που στις συνδέει, όμως γνωρίζουμε την ύπαρξή της. Τέλος στο Παράδειγμα 2.4, φαίνεται να μην υπάρχει συσχέτιση τιμών.

2.1 Η συσχέτιση των τιμών.

Η πιο απλή συσχέτιση των τιμών δυο μεταβλητών είναι αυτή που δίνεται με τον πολλαπλασιασμό, π.χ. $y_i = m_i \cdot x_i \Leftrightarrow m_i = \frac{y_i}{x_i}$ (Παράδειγμα 3.1). Ο συντελεστής, που στο εξής θα τον καλούμε **«συντελεστή συσχέτισης»** (**ratio**), δεν είναι πλέον καθαρός αριθμός, αλλά μέγεθος και ανάλογα με το πρόβλημα έχει και περιεχόμενο. Τα ποσά (μεγέθη), των οποίων ο συντελεστής συσχέτισης είναι σταθερός αριθμός ($m_i = m, \forall i$), τα λέμε ανάλογα ποσά. Ο συλλογισμός που παράγεται κατά τη μελέτη των ανάλογων ποσών καλείται «αναλογικός συλλογισμός» [6], μάλιστα ο Vergnaud [8] διακρίνει τον αναλογικό συλλογισμό σε δύο κατηγορίες α) τον «βαθμωτό» συλλογισμό και β) τον «συναρτησιακό» συλλογισμό. Έτσι, από τον Πίνακα στο Παράδειγμα 3.1, μπορούμε να διατυπώσουμε το επόμενο Θεώρημα.

Θεώρημα 2.1 *Δυο μεγέθη είναι ανάλογα ($y = m \cdot x$), αν και μόνον αν οι συντελεστές μεταβολής των δυο μεγεθών είναι ίσοι. Επιπλέον, ο ρυθμός μεταβολής τους διατηρείται σταθερός και ισούται με τον συντελεστή συσχέτισης.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τις μεταβλητές X και Y με τιμές x_i και y_i, και τους συντελεστές μεταβολής αυτών $κ_i$ και $λ_i$, $\forall i$ αντίστοιχα. Τότε

$$\frac{y_i}{x_i} = m = \frac{y_{i+1}}{x_{i+1}} \Leftrightarrow \frac{x_{i+1}}{x_i} = \frac{y_{i+1}}{y_i} \Leftrightarrow κ_i = λ_i, \forall i \tag{3}$$

Έτσι, αφού η τελευταία ισότητα της (3) ισχύει $\forall i$, το ορθό του Θεωρήματος 3.1 απεδείχθη. Το γεγονός ότι το σύμβολο $\Leftrightarrow$ υπάρχει παντού δείχνει την ισχύ του αντιστρόφου, δηλαδή ότι ποσά με ίσους λόγους μεταβολής είναι ανάλογα.

Επίσης από την σχέση ($y = m \cdot x$) έχουμε

$$\left.\begin{aligned} y_{i+1} &= m \cdot x_{i+1} \\ y_i &= m \cdot x_i \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta y_i = m \cdot \Delta x_i \Leftrightarrow \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = m, \forall i \qquad (4)$$

Η (4) αποδείχνει το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος. Είναι πλέον φανερό, ότι στα ανάλογα ποσά, ο ρυθμός μεταβολής (rate) και ο συντελεστής συσχέτισης (ratio) ταυτίζονται. Επίσης, από τον πίνακα στο Παράδειγμα 3.3 μπορούμε να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το Θεώρημα

Θεώρημα 2.2 *Δυο ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα ($y = \frac{\alpha}{x}$), αν και μόνον αν οι συντελεστές μεταβολής των τιμών τους, σε δύο χώρους μέτρησης, είναι αντίστροφοι αριθμοί.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.

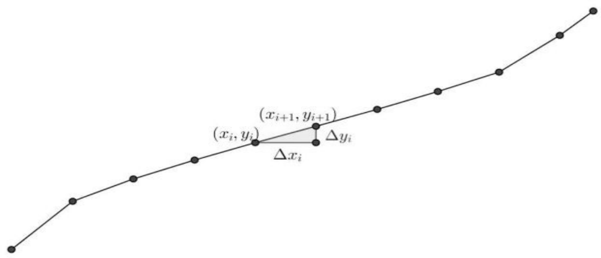
Ακόμη, ο πίνακας στο Παράδειγμα 3.2 μας οδηγεί στο να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το εξής

Θεώρημα 2.3 *Η σχέση $y = \alpha \cdot x^2$ συσχετίζει δυο ποσά σε δυο χώρους μέτρησης, αν και μόνον αν οι συντελεστές μεταβολής των τιμών τους, διέπονται από τη σχέση $\kappa_i^2 = \lambda_i$.*

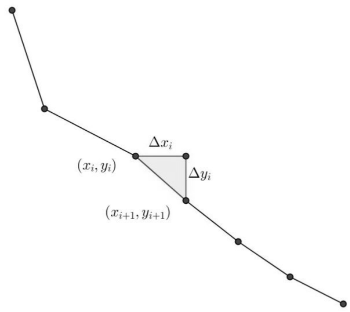
Απόδειξη. Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.

2.2 Η συμμεταβολή των τιμών.

Στο Παράδειγμα 3.5 η συσχέτιση δεν είναι εύκολη και προς τούτο χρησιμοποιούμε τις διαφορές μεταβολών και ειδικότερα τον ρυθμό μεταβολής $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$. Ο ρυθμός μεταβολής, ουσιαστικά, είναι η μεταβολή της τιμής της μεταβλητής Y σε σχέση με τη μοναδιαία μεταβολή της μεταβλητής X ή αλλιώς η ποσοστιαία μεταβολή της τιμής της μεταβλητής Y σε σχέση με τη μεταβολή της μεταβλητής X, που μπορεί να εκφραστεί και επί τοις εκατό (κλίση). Γεωμετρικά εκφράζεται με την $\varepsilon\varphi\ \omega = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$.



Σχήμα 1: Τα σημεία των μεταβλητών x_i (όγκος) και της y_i (ύψος).



Σχήμα 2: Τα σημεία των μεταβλητών x_i και y_i του κινητού από τα δυο σταθερά σημεία.

Στο Σχήμα 1 φαίνεται καθαρά η γραφική παράσταση της σχέσης που συνδέει τον όγκο με το ύψος του Παραδείγματος 2.5. Για το Παράδειγμα 2.6 καταφεύγουμε στις τιμές του ρυθμού μεταβολής και οι τιμές του φαίνονται στο επόμενο διάνυσμα:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = (-3.08, -0.52, -0.89, -0.79, -0.68, -0.51)^T$$

Όπως παρατηρούμε, η σχέση συσχέτισης πρέπει είναι φθίνουσα και αλλάζει από κυρτή σε κοίλη και να γίνεται πάλι κυρτή, ακριβώς όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.

Μπορούμε, λοιπόν, να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε εδώ ότι,

Θεώρημα 2.4 *Αν σε δυο χώρους μέτρησης ο ρυθμός μεταβολής των τιμών είναι σταθερός, τότε τα μεγέθη συνδέονται με τη σχέση* $y = m \cdot x + b$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τις μεταβλητές X και Y με τιμές x_i και y_i, με ρυθμό μεταβολής $m = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \Leftrightarrow \Delta y_i = m \cdot \Delta x_i$. Τότε, $\forall i$ ισχύει:

$$\begin{array}{c} y_i - y_{i-1} = m \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ y_{i-1} - y_{i-2} = m \cdot (x_{i-1} - x_{i-2}) \\ \vdots \\ y_1 - y_0 = m \cdot (x_1 - x_0) \\ \hline y_i - y_0 = m \cdot (x_i - x_0) \end{array} \tag{8}$$

Με $b = y_0 - m \cdot x_0$, παίρνουμε $y_i = m \cdot x_i + b$ ή γενικότερα $y = m \cdot x + b$.

Για την τετραγωνική συνάρτηση ισχύει το επόμενο Θεώρημα,

Θεώρημα 2.5 Αν σε δυο χώρους μέτρησης ο ρυθμός μεταβολής των τιμών είναι ανάλογος του αθροίσματος των αντίστοιχων διαδοχικών τιμών της μεταβλητής X, τότε τα μεγέθη συνδέονται με τη σχέση $y = m \cdot x^2 + b$.

Απόδειξη. Η απόδειξη ακολουθεί τα βήματα της απόδειξης του Θεωρήματος 2.4.

Τέλος, για την υπερβολή ισχύει το εξής,

Θεώρημα 2.6 Αν σε δυο χώρους μέτρησης ο ρυθμός μεταβολής των τιμών είναι αντιστρόφως ανάλογος του αντίθετου του γινομένου των αντίστοιχων διαδοχικών τιμών της μεταβλητής X, τότε τα μεγέθη συνδέονται με τη σχέση $y = \frac{m}{x} + b$.

Απόδειξη. Παρόμοια κι εδώ, η απόδειξη ακολουθεί τα βήματα της απόδειξης του Θεωρήματος 2.4. Τέλος αναφέρουμε ότι:

Θεώρημα 2.7 *Αν σε δυο χώρους μέτρησης ο συντελεστής μεταβολής των τιμών της μεταβλητής Y είναι η δύναμη της διαφοράς των αντίστοιχων τιμών της μεταβλητής X, της σταθεράς m, δηλαδή $k_i = m^{\Delta x_i}$, τότε τα μεγέθη συνδέονται με τη σχέση $y = b \cdot m^x$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη ακολουθεί τα βήματα του Θεωρήματος 2.4, αφού πρώτα λογαριθμίσουμε τη σχέση $\frac{y_i}{y_{i-1}} = m^{x_i - x_{i-1}}$.

Σημείωση: Στο άρθρο, λόγω του περιορισμού του σε 10 σελίδες, έχουν παραλειφθεί οι αποδείξεις μερικών Θεωρημάτων και ορισμένες σημαντικές αναφορές. Ο αναγνώστης μπορεί να ζητήσει το πλήρες άρθρο από τους συγγραφείς.

3. Αναφορές.

[1] Αφράτης Γ. Καίσαρη Μ., Κολέζα Ε., Μανουσάκης Γ., Μαρκέα Χ., Ντόντος Γ., Παναγιωτόπουλος Λ., Τζούμας Μ. (2016). *Αναζητώντας τις ρίζες της παραγώγου*, 33ο Πανελλήνιο Συνέδριο Ελληνικής Μαθηματικής εταιρείας, Χανιά.

[2] Buck, J. C. (1995). *Fostering connections between classes of polynomial functions*. Paper presented at the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics education (17th, Columbus, OH, October, 1995).

[3] Carlson, M. P. (1998). *A cross-sectional investigation of the development of the function concept*. Research *in collegiate maths education*, *3*, 114-62.

[4] Kieran, C. (1996). *The changing face of school algebra*. In Proceedings of the 8th International Congress on Mathematics Education: selected lectures (pp. 271-290).

[5] Monk, S., & Nemirovsky, R. (1994). *The case of Dan: Student construction of a functional situation through visual attributes*. CBMS Issues in Mathematics Education, 4, 139-168.

[6] Ross, Kathleen M. (2011), *Fifth Graders' Representations and Reasoning on Constant Growth Function* Problems*: Connections between Problem Representations, Student Work and Ability to Generalize,* Ph.D. thesis, The Univ. of Arizona, Persistent Link: http://hdl.handle.net/10150/203483. Ανακτήθηκε 3/8/2017

[7] Smith, J., & Thompson, P. (2007). *Quantitative reasoning and the development of algebraic reasoning*. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), Algebra in the Early Grades (pp. 133–160). New York: Erlbaum.

[8] Vergnaud, G. (1988), *Multiplicative structures*. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 141-161). Reston, VA:NCTM.