Σχετικά με τις ρίζες του τριώνυμου.

Οικονόμου Δ. Φώτης, pheconom@sch.gr
Τζούμας Γ. Μιχάλης, mtzoumas@sch.gr

Θεματική Ενότητα: *Η παρουσία και ο ρόλος των Μαθηματικών σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης: Μια ανοιχτή και διαρκής πρόκληση.*

Περίληψη

Στο πλαίσιο των «δημιουργικών εργασιών» οι μαθητές ανακαλύπτουν τη γνώση, που επιδιώκεται, μέσω αυτών, κινητοποιώντας και αναδιοργανώνοντας παλαιότερες γνωστές τους έννοιες ή αναζητώντας νέες. Η αναζήτηση ενδιαφερόντων θεμάτων είναι μια επίπονη διαδικασία. Η ενσωμάτωση μαθηματικών αποτελεσμάτων στην επιστημονική έρευνα, ίσως δείχνει μία κατεύθυνση. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζουμε δύο προβλήματα των στοιχειωδών μαθηματικών. Ειδικότερα, βρίσκουμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες συμπεριφοράς των ριζών του τριωνύμου και τις εφαρμόζουμε για την εύρεση περιοχών σύγκλισης σε προβλήματα της αριθμητικής γραμμικής άλγεβρας.

Abstract

As far as “creative works” are concerned, students discover knowledge, which is sought through them, by mobilizing and reconstructing older obtained concepts or seeking for new ones. Pursuit of interesting issues is a painful process. The incorporation of mathematical results in scientific research may indicate one direction. In this paper we present two problems of elementary mathematics. Specifically, we find sufficient and necessary conditions of the trinomial’s roots behavior and we apply them in order to find convergence regions in numerical linear algebra problems.

1. Εισαγωγή.

«Το πρόβλημά σας μπορεί να είναι απλό, αν όμως προκαλεί το ενδιαφέρον σας και ενεργοποιεί τις εφευρετικές σας ικανότητες και μπορέσετε να το λύσετε με τα δικά σας μέσα, τότε θα δοκιμάσετε την ένταση και το συναίσθημα της θριαμβευτικής χαράς που γεννάει μια ανακάλυψη. Τέτοιες εμπειρίες σε μια κρίσιμη ηλικία, μπορούν να δημιουργήσουν διάθεση για πνευματική εργασία και να αφήσουν τα ίχνη τους στο πνεύμα και το χαρακτήρα, για ολόκληρη τη ζωή». Λόγια του Polya (1945) στο έργο του «Πως να το λύσω». Ωστόσο, ενδιαφέρον παρουσιάζει ο όρος πρόβλημα και πως κατασκευάζεται ή λύνεται αυτό. Διαφορετικοί ερευνητές δίνουν διαφορετικούς ορισμούς σχετικά με αυτό. Για παράδειγμα ο Silver (1994) αναφέρεται στην παραγωγή νέων προβλημάτων από την αναδιατύπωση ή και την αναδιαμόρφωση ενός δοσμένου αρχικού προβλήματος μέσα από τη διαδικασία επίλυσης. Η Jasmina Milinković (2015) ορίζει ότι μαθηματικό πρόβλημα είναι οτιδήποτε απαιτεί να χρησιμοποιηθούν μαθηματικά εργαλεία για να λυθεί, του οποίου η λύση δεν είναι άμεσα εφικτή για τον λύτη. Ενώ οι Osana and Pelczer (2015) ορίζουν ως κατασκευή προβλήματος την πράξη της διαμόρφωσης μιας νέας εργασίας ή κατάστασης, ή την τροποποίηση μιας υπάρχουσας, έχοντας συγκεκριμένο μαθηματικό στόχο και παιδαγωγικό σκοπό. Δύο καταπληκτικά βιβλία στην κατεύθυνση αυτή, το ένα με έμφαση στη Γεωμετρία [2] και το δεύτερο με έμφαση στην Άλγεβρα [3], κυκλοφορούν στο διαδίκτυο και αξίζει κάποιος να ρίξει μια ματιά.

Στο πλαίσιο της διδασκαλίας των μαθηματικών, η κατασκευή και επίλυση προβλήματος είναι συστατικό της «ενεργούς» μάθησης και με τον τρόπο αυτό δομείται το μαθηματικό έργο. Δυστυχώς, ακόμη και σήμερα, η διδασκαλία των Μαθηματικών συνεχίζει να στηρίζει την επίλυση ασκήσεων εύκολων ή δύσκολων, μακρυά από προβλήματα που προκύπτουν από πραγματικές καταστάσεις της καθημερινής ζωής ή της επιστημονικής έρευνας, ώστε να αναδεικνύεται η χρησιμότητα αυτών. Τα τελευταία χρόνια γίνεται προσπάθεια, μέσα από τις «δημιουργικές εργασίες» να αμβλυνθεί το πρόβλημα αυτό. Βέβαια δεν είναι η πρώτη φορά που συμβαίνει κάτι τέτοιο. Από τα τέλη του προηγούμενου αιώνα οι ειδικοί προσπαθούν να αλλάξουν τον τρόπο διδασκαλίας και να αναδείξουν την «ενεργή» μάθηση. Για παράδειγμα η Ε. Κολέζα (1997) αναφέρει ότι στον αντίποδα της φορμαλιστικής άποψης βρίσκεται η ρεαλιστική που στηρίζεται στην αρχή ότι η γνώση δεν μπορεί και δεν πρέπει να επιβάλλεται δογματικά εκ των έξω. Το καθετί πρέπει να υπόκειται σε μια εσωτερική επεξεργασία από εκείνον που μαθαίνει. Εργαλείο για την ανακάλυψη των μαθηματικών εννοιών μέσω κατάλληλων εμπειριών είναι οι μαθηματικές δραστηριότητες - προβλήματα. Αυτό σημαίνει ότι ο μαθητής ξεκινώντας από τον προβληματισμό, την παρατήρηση και την ανάλυση καταστάσεων, που του είναι οικείες, καθίσταται ικανός να αντιμετωπίζει τις μαθηματικές έννοιες και να τις χρησιμοποιεί σε μια ποικιλία καταστάσεων. Κατά την άποψη της ιδίας μια μαθηματική δραστηριότητα πρέπει: Να έχει σύντομη εκφώνηση, που μπορεί να γίνει κατανοητή απ' όλους τους μαθητές. Να μην έχει προφανή απάντηση. Για να απαντήσει ο μαθητής στα ερωτήματα που τίθενται στα πλαίσια της δραστηριότητας, πρέπει να ανακαλύψει τη γνώση που επιδιώκεται μέσω αυτής, κινητοποιώντας και αναδιοργανώνοντας παλαιότερες γνωστές του έννοιες ή αναζητώντας νέες. Το πρόβλημα το οποίο βρίσκεται στη βάση μιας δραστηριότητας πρέπει να είναι πλούσιο, δηλαδή να επιδέχεται πολλές προσεγγίσεις, και να δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να διατυπώνουν και να επεξεργάζονται μόνοι τους ή στα πλαίσια της ομάδας ενδιάμεσες ερωτήσεις.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε δύο προβλήματα-δραστηριότητες από την ύλη που διδάσκεται στο Σχολείο αλλά και ξεφεύγει ελαφρά από αυτή, που απαντά σε προβλήματα της σύγχρονης έρευνας και αναδεικνύει την χρησιμότητα αυτών. Στην επόμενη παράγραφο μαζί με τις προαπαιτούμενες γνώσεις θέτουμε τα προβλήματα και αναφερόμαστε στη λύση τους. Στην τρίτη παράγραφο δίνουμε εφαρμογές από τη σύγχρονη επιστημονική έρευνα, ώστε να φανεί η χρησιμότητα αυτών και τέλος μαζί στους σχολιασμούς δίνουμε ιδέες για εφαρμογή στην τάξη.

2. Το πρόβλημα και η Λύση. Το απλό τριώνυμο

$$P(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0 \tag{1}$$

εμφανίζεται ως έννοια στην Τρίτη τάξη του Γυμνασίου και έκτοτε διατρέχει με τον ένα ή άλλον τρόπο όλες τις τάξεις του Λυκείου. Η εύρεση των ριζών του, το πρόσημό του, η παραγοντοποίηση αυτού, οι σχέσεις του Vieta και η σχέση των συντελεστών του για την ύπαρξη ή όχι πραγματικών ριζών είναι τα προβλήματα με τα οποία ασχολούνται οι μαθητές στις δυο πρώτες τάξεις του Λυκείου και συνήθως εμφανίζονται ως ασκήσεις που είναι ξεκομμένες από τις εφαρμογές τους και τα προβλήματα που λύνουν. Το τριώνυμο της σχέσης (1), όσον αφορά την συμπεριφορά των ριζών του, είναι ισοδύναμο με το τριώνυμο

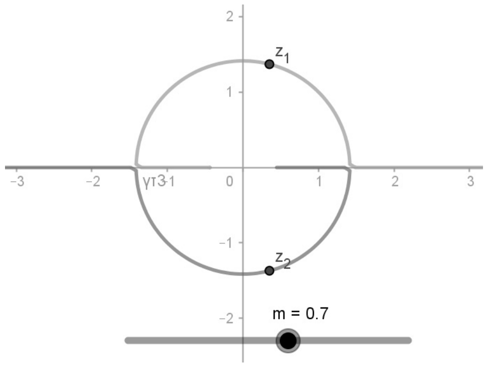
$$Q(x) = x^2 - \mu x + \nu, \tag{2}$$

όπου θέσαμε $\mu = \frac{-b}{a}$ και $\nu = \frac{c}{a}$. Στη συνέχεια και σε ότι ακολουθεί θα ασχοληθούμε με το τριώνυμο της σχέσης (2).

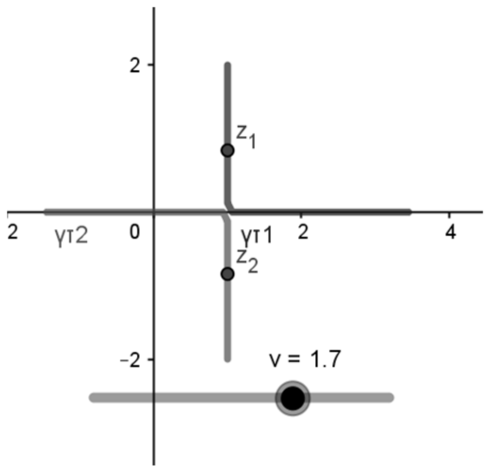
Πρόβλημα 1. Να μελετηθεί η κίνηση των ριζών του τριωνύμου της σχέσης (2) α) καθώς το μ διατρέχει το σύνολο των πραγματικών αριθμών θεωρώντας το ν σταθερό, β) καθώς το το ν διατρέχει το σύνολο των πραγματικών αριθμών θεωρώντας το μ σταθερό.

Τα τελευταία χρόνια, γίνεται προσπάθεια, η σύγχρονη τεχνολογία να ενσωματωθεί στην καθημερινή πρακτική της διδασκαλίας. Όλες οι μελέτες δείχνουν ότι η συνετή χρήση αυτής είναι επικουρικός παράγοντας στη διδακτική πράξη. Το λογισμικό Geogebra έχει καθιερωθεί στη σχολική χρήση και τις εφαρμογές. Αρκετοί εκπαιδευτικοί είναι εξοικειωμένοι μαζί του και αυτός είναι ο λόγος χρήσης από εμάς.

Επανερχόμενοι στο πρόβλημα, στο Σχήμα 1 φαίνεται ο δρόμος που ακολουθούν οι ρίζες του $Q(x)$ καθώς το μ διατρέχει τους πραγματικούς αριθμούς, με σταθερό $\nu = 2$, ενώ το Σχήμα 2 δείχνει τον δρόμο των ριζών του ίδιου πολυώνυμου, καθώς το ν διατρέχει τους πραγματικούς αριθμούς με σταθερό $\mu = 2$.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Ήδη γίνεται φανερό το πλήθος των παρατηρήσεων, των εικασιών και των αποδείξεων που περιέχει η μελέτη του παραπάνω προβλήματος και η οποία θα υλοποιηθεί στη συνέχεια.

Έστω ότι $\nu > 0$ σταθερό. Οι ρίζες του $Q(x)$ έχουν την μορφή

$$\rho_1 = \rho_1(\mu) = \frac{\mu+\sqrt{\mu^2-4\nu}}{2} \text{ και } \rho_2 = \rho_2(\mu) = \frac{\mu-\sqrt{\mu^2-4\nu}}{2} \qquad (3)$$

Είναι φανερό ότι για $\mu^2 - 4\nu \geq 0 \Leftrightarrow \mu \geq 2\sqrt{\nu}$ ή $\mu \leq -2\sqrt{\nu}$ οι $\rho_{1,2} \in R$, ενώ όταν $-2 \cdot \sqrt{\nu} < \mu < 2 \cdot \sqrt{\nu}$ οι δύο ρίζες είναι μιγαδικές.

Συγκεκριμένα, όταν το $\mu \in \left(-\infty, -2 \cdot \sqrt{\nu}\right)$, η $\rho_1(\mu)$ κινείται πάνω στον πραγματικό άξονα του μιγαδικού επιπέδου. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι $\lim_{\mu \to -\infty} \rho_1(\mu) = 0$ και $\lim_{\mu \to -\infty} \rho_2(\mu) = -\infty$ καθώς επίσης ότι $\lim_{\mu \to -2\sqrt{\nu}} \rho_1(\mu) = -\sqrt{\nu}$ και $\lim_{\mu \to -2\sqrt{\nu}} \rho_2(\mu) = -\sqrt{\nu}$. Μελετώντας τη μονοτονία, εύκολα προκύπτει ότι η ρίζα ρ_1 είναι φθίνουσα, ενώ η ρίζα ρ_2 είναι αύξουσα. Έτσι, λέμε ότι η ρ_2 ξεκινά από το $-\infty$ και φτάνει στο $-\sqrt{\nu}$, ενώ η ρ_1 ξεκινά από το 0 και φτάνει επίσης στο $-\sqrt{\nu}$.

Όταν οι δύο ρίζες $\rho_1(\mu)$ και $\rho_2(\mu)$ είναι μιγαδικές έχουμε

$$R\big(\rho_1(\mu)\big) = \frac{\mu}{2} \text{ και } I\big(\rho_1(\mu)\big) = \frac{\sqrt{4\nu-\mu^2}}{2} \text{ και}$$

$$R\big(\rho_2(\mu)\big) = \frac{\mu}{2} \text{ και } I\big(\rho_2(\mu)\big) = \frac{-\sqrt{4\nu-\mu^2}}{2}.$$

Άρα, $\Big(R\big(\rho_i(\mu)\big)\Big)^2 + \Big(I\big(\rho_i(\mu)\big)\Big)^2 = \nu$ για $i = 1{,}2$. Συνεπώς οι $\rho_1(\mu)$ και $\rho_2(\mu)$ βρίσκονται πάνω σε κύκλο του μιγαδικού επιπέδου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με $\sqrt{\nu}$. Μελετώντας τη μονοτονία φαίνεται ότι, εφόσον $I\big(\rho_1(\mu)\big) > 0$, η $\rho_1(\mu)$ διαγράφει το πάνω μισό του κύκλου αυτού και από την $I\big(\rho_2(\mu)\big) < 0$ η $\rho_2(\mu)$ διαγράφει το κάτω μισό του ίδιου κύκλου.

Τέλος, όταν το μ κινείται από στο $\left(2 \cdot \sqrt{\nu}, \infty\right)$ οι $\rho_1(\mu)$, $\rho_2(\mu)$ κινούνται πάνω στον πραγματικό άξονα του μιγαδικού επιπέδου και παρατηρούμε αντίστοιχα ότι $\lim_{\mu \to 2\sqrt{\nu}} \rho_1(\mu) = \sqrt{\nu}$ και $\lim_{\mu \to 2\sqrt{\nu}} \rho_2(\mu) = \sqrt{\nu}$ καθώς επίσης ότι $\lim_{\mu \to +\infty} \rho_1(\mu) = +\infty$ και $\lim_{\mu \to +\infty} \rho_2(\mu) = 0$. Μελετώντας τη μονοτονία, προκύπτει ότι η $\rho_1(\mu)$ ξεκινά από το $\sqrt{\nu}$ και αυξάνεται απεριόριστα ενώ η $\rho_2(\mu)$, που κινείται επίσης πάνω στον ίδιο άξονα ξεκινά από το $\sqrt{\nu}$ και μειώνεται στο μηδέν.

Έτσι λοιπόν, συγκεκριμένα για $\nu = 2$, η $\rho_1(\mu)$ βρίσκεται πάνω στην καφέ γραμμή του Σχήματος 1 και η $\rho_2(\mu)$ πάνω στην ιώδη γραμμή του ίδιου σχήματος.

Ένα άλλο πρόβλημα, που συχνά εμφανίζεται στην αριθμητική γραμμική άλγεβρα, είναι η εύρεση της περιοχής σύγκλισης μιας επαναληπτικής μεθόδου. Για την επίλυση του εν λόγω προβλήματος, πολλές φορές, απαιτείται η λύση του επόμενου προβλήματος.

Πρόβλημα 2. Να βρεθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες των συντελεστών του τριωνύμου της σχέσης (2), ώστε οι ρίζες του τριωνύμου να έχουν μέτρο μικρότερο της μονάδας.

Μελέτη: Οι τύποι του Vieta δίνουν ότι $\rho_1+\rho_2=\mu$ και $\rho_1\cdot\rho_2=\nu$. Επίσης, για τις δύο ρίζες του τριωνύμου πρέπει να ισχύει $|\rho_i|<1, i=1,2$, οπότε $|\rho_1||\rho_2|=|\nu|<1$. Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $|\rho_2|=\frac{|\nu|}{|\rho_1|}$. Όταν τα μέτρα των ριζών είναι ίσα τότε ισχύει $|\rho_1|=|\rho_2|=\sqrt{|\nu|}$. Επιπλέον, δεν είναι δυνατόν τα μέτρα των ριζών να είναι συγχρόνως μεγαλύτερα ή μικρότερα του $\sqrt{|\nu|}$ (η απόδειξη με άτοπο!). Έτσι, υποθέτοντας χωρίς βλάβη της γενικότητας, μέχρι το τέλος της απόδειξης, ότι $|\rho_1|\geq|\rho_2|$, έχουμε

$$|\rho_1|\in\left[\sqrt{|\nu|},1\right)\Leftrightarrow|\rho_2|\in(|\nu|,\sqrt{|\nu|}] \qquad (4)$$

<u>1η περίπτωση</u>: Το ν είναι θετικός αριθμός. Σε μια τέτοια περίπτωση οι ρίζες είναι ομόσημες ή μιγαδικές. Τότε για το μ ισχύει:

$$|\mu|=|\rho_1+\rho_2|\leq|\rho_1|+|\rho_2|=|\rho_1|+\frac{|\nu|}{|\rho_1|}=:f(|\rho_1|) \qquad (5)$$

Μελετώντας τη μονοτονία (μπορεί να γίνει μόνο με τη χρήση του ορισμού) της συνάρτηση f της σχέσης (5) στο πεδίο ορισμού της (ήδη έχει βρεθεί $|\rho_{1,2}|\in\left(\nu,\sqrt{\nu}\right]\cup[\sqrt{\nu},1\,)$) προκύπτει ότι αυτή δεν έχει μέγιστο ωστόσο φράσσεται από το $1+\nu$, οπότε έτσι προκύπτει $|\mu|<1+\nu$.

<u>2η περίπτωση</u>: το ν είναι αρνητικός αριθμός. Τώρα, οι ρίζες είναι πραγματικές και ετερόσημες, οπότε, αφού $|\rho_1|\geq|\rho_2|$ θα ισχύει:

$$|\mu|=|\rho_1+\rho_2|=|\rho_1|-|\rho_2|=|\rho_1|-\frac{|\nu|}{|\rho_1|}=:g(|\rho_1|) \qquad (6)$$

Από τη μελέτη της συνάρτησης g της σχέσης (6) στο πεδίο ορισμού της (λόγω της υπόθεσης $|\rho_1|\geq|\rho_2|$ περιορίζεται στο $|\rho_1|\in[\sqrt{|\nu|},1\,)$) προκύπτει πάλι ότι $|\mu|<1+\nu$.

Αντιστρόφως, υποθέτοντας ότι $|\nu|<1$και $|\mu|<1+\nu$, για τις ρίζες του τριωνύμου Q(x) της σχέσης (2) ισχύει:

1) Όταν η διακρίνουσα Δ του Q(x) είναι μη θετική, τότε $|\rho_1|=|\rho_2|$, οπότε $|\nu|<1\Rightarrow|\rho_1|\cdot|\rho_2|=|\rho_1|^2<1\Rightarrow|\rho_1|<1$.

2) Όταν η διακρίνουσα Δ του Q(x) είναι θετική, τότε ήδη έχει ειπωθεί ότι $|\rho_2| \leq \sqrt{|\nu|} \leq |\rho_1|$. Επιπλέον, ισχύει:

$$|\mu| < 1+\nu \Leftrightarrow |\rho_1+\rho_2| < 1+\nu \Rightarrow |\rho_1+\rho_2|^2 < (1+\nu)^2 \quad (7)$$
$$\Rightarrow \rho_1^2+\rho_2^2 < 1+\nu^2$$

αν αντικαταστήσουμε το $|\rho_2|$ με το ίσο του, η (7) γίνεται

$$\frac{\nu^2}{\rho_1^2}+\rho_1^2 < 1+\nu^2 \Leftrightarrow \rho_1^4+\nu^2-\rho_1^2-\nu^2\cdot\rho_1^2 < 0 \quad (8)$$
$$\Leftrightarrow (\rho_1^2-\nu^2)\cdot(\rho_1^2-1) < 0$$

και αφού $|\nu| < 1 \Leftrightarrow |\nu| < \sqrt{|\nu|} \Leftrightarrow (\rho_1^2-\nu^2) > 0$ η σχέση (8) δίνει $|\rho_1| < 1$ και συνεπώς και $|\rho_2| < 1$. Δηλαδή, ***ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι τα μέτρα των ριζών του Q(x) μικρότερα του ένα πρέπει συγχρόνως να ισχύουν:***

$$|\nu| < 1 \text{ και } |\mu| < 1+\nu \quad (9)$$

Δεύτερος τρόπος: Ένας άλλος τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος, περισσότερο κοντά στους μαθητές των μικρών τάξεων του Λυκείου, είναι ο εξής: Αφού για τις δύο ρίζες θέλουμε να ισχύει $|\rho_i| < 1, i = 1{,}2$ προφανώς έχουμε

$$|\rho_1||\rho_2| < 1 \text{ και } (1-|\rho_1|)(1-|\rho_2|) > 0 \quad (10)$$

Η αριστερή ανισότητα της (10), από τους τύπους του Vieta, δίνει ότι $|\nu| < 1$ ενώ η δεξιά μετά την εκτέλεση των πράξεων δίνει ότι $1-(|\rho_1|+|\rho_2|)+|\nu| > 0$. Το τελευταίο είναι ισοδύναμο με

$$1+|\nu| > |\rho_1|+|\rho_2| \Leftrightarrow (1+|\nu|)^2 > (|\rho_1|+|\rho_2|)^2 \Leftrightarrow 1+|\nu|^2$$
$$> |\rho_1|^2+|\rho_2|^2$$

Προσθέτοντας στα δύο μέλη της τελευταίας το 2ν γίνεται

$$(1+\nu)^2 > (\rho_1+\rho_2)^2 \Leftrightarrow |1+\nu| > |\rho_1+\rho_2| \overset{1+\nu>0}{\Leftrightarrow} 1+\nu > |\mu|$$

και αφού $|\nu| < 1$ προκύπτει ότι: όταν οι ρίζες του $Q(x)$ έχουν μέτρο μικρότερο της μονάδας ισχύει πάντα η σχέση (9).

Αντιστρόφως, όταν ισχύει η (9) τότε λόγω των ισοδυναμιών ισχύει και η (10). Η δεύτερη ανισότητα της (10) λέει ότι τα μέτρα των ριζών του τριωνύμου $Q(x)$ θα είναι και τα δύο μικρότερα της μονάδας ή θα είναι και τα δύο μεγαλύτερα αυτής. Όμως, το τελευταίο είναι αδύνατο, επειδή σε μία τέτοια περίπτωση θα έπρεπε να ισχύει και $|\nu| > 1$, που είναι άτοπο. Συνεπώς οι συνθήκες της (9), των συντελεστών του $Q(x)$, είναι οι ικανές και αναγκαίες, ώστε οι ρίζες του $Q(x)$ να έχουν μέτρο μικρότερο της μονάδας.

3. Εφαρμογές από την σύγχρονη έρευνα.

Οι Njery και Guo (2016) στην προσπάθειά τους να επιταχύνουν την επόμενη επαναληπτική μέθοδο

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= \frac{\alpha}{\alpha+\omega}x^{(k)} - \frac{\omega}{\alpha+\omega}A^{-1}\left(By^{(k)} - b\right) \\ y^{(k+1)} &= y^{(k)} + \frac{2\omega}{2-\omega}Q^{-1}\left(B^T x^{(k+1)} - q\right) \end{aligned}, \tag{11}$$

την οποία χρησιμοποιούν για την επίλυση ενός αυξημένου γραμμικού συστήματος, που προκύπτει σε πολλές εφαρμογές του επιστημονικού υπολογισμού, π.χ. το πρόβλημα του σαγματικού σημείου (saddle point problem) κλπ, καταλήγουν στην εξής σχέση:

$$(\alpha+\omega)\cdot\lambda^2 - \left[2\alpha+\omega+\frac{2\omega^2}{\omega-2}\mu\right]\cdot\lambda + \alpha = 0, \tag{12}$$

της ιδιοτιμής μ ενός γνωστού συμμετρικού, θετικά ορισμένου και εύκολα προσδιορίσιμου πίνακα (που προκύπτει από τους υποπίνακες A, B και Q) και της ιδιοτιμής λ, που είναι η ιδιοτιμή του επαναληπτικού πίνακα της μεθόδου, όπου τα α και ω είναι θετικές πραγματικές παράμετροι. Είναι γνωστό ότι μία επαναληπτική μέθοδος, π.χ. αυτή της σχέσης (11), συγκλίνει αν και μόνον αν για όλες τις ιδιοτιμές λ ισχύει $|\lambda| < 1$. Το τελευταίο θα ισχύει, αν και μόνον αν οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης (12) ανήκουν στο διάστημα $(-1,1)$ για όλες τις τιμές του μ. Διαιρώντας με το $\alpha+\omega$ φέρουμε το τριώνυμο της (12) στη μορφή της (2), ήτοι

$$\lambda^2 - \frac{1}{\alpha+\omega}\cdot\left[2\alpha+\omega+\frac{2\omega^2}{\omega-2}\mu\right]\cdot\lambda + \frac{\alpha}{\alpha+\omega} = 0. \tag{13}$$

Με δεδομένο ότι οι πραγματικοί α και ω είναι θετικοί, η συνθήκη $|\nu| < 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha+\omega} < 1$ ικανοποιείται. Επιπλέον, η συνθήκη $|\mu| < 1+\nu$ δίνει

$$\frac{1}{\alpha+\omega}\left|2\alpha+\omega+\frac{2\omega^2}{\omega-2}\mu\right| < 1 + \frac{\alpha}{\alpha+\omega} \tag{14}$$

ή ισοδύναμα την

$$-2\alpha - \omega < 2\alpha + \omega + \frac{2\omega^2}{\omega - 2}\mu < 2\alpha + \omega \qquad (15)$$

Η δεύτερη ανισότητα από τις (15), με δεδομένο ότι το μ, ως ιδιοτιμή ενός θετικά ορισμένου συμμετρικού πίνακα, είναι θετικός αριθμός δίνει ότι $\omega \in (0,2)$ ενώ η αριστερή ανισότητα, μετά από λίγες πράξεις δίνει ότι $\alpha > \frac{\omega^2\mu+\omega(\omega-2)}{2(2-\omega)}$ Η τελευταία σχέση λέει ότι όταν αυτή αληθεύει για κάποια τιμή του μ, τότε το μέτρο της τιμής του λ βρίσκεται στο διάστημα$(0,1)$. Ωστόσο, όταν η τελευταία σχέση αληθεύει για τη μέγιστη τιμή του μ την μ_{max} τότε όλες οι τιμές του λ ανήκουν στο διάστημα $(-1,1)$. Συνεπώς η επαναληπτική μέθοδος (11) συγκλίνει αν και μόνον αν

$$\omega \in (0,2) \text{ και } \alpha > \frac{\omega^2\mu+\omega(\omega-2)}{2(2-\omega)} \qquad (16)$$

Θα μπορούσε κάποιος, στο πλαίσιο της δημιουργίας προβλημάτων (posingproblem) να θέσει περισσότερα ερωτήματα για τις παραμέτρους. Για παράδειγμα τι θα συμβεί αν απαιτήσουμε τα ω και α να είναι αρνητικά ή το ένα αρνητικό και το άλλο θετικό ή και ακόμη όταν το μ (ιδιοτιμή πίνακα) είναι μη αρνητικός αριθμός, πρόβλημα με το οποίο ασχολούμαστε, ερευνητικά, τελευταία.

4. Επίλογος.

Στην εργασία μας παρουσιάσαμε δύο προβλήματα-δραστηριότητες σχετικά με το τριώνυμο και αναδείξαμε τη χρήση αυτού στη σύγχρονη επιστημονική έρευνα. Για την επίλυση του 1ου προβλήματος χρησιμοποιήθηκε ο Η/Υ και ένα μεγάλο πλήθος ερευνητικών ερωτημάτων χρειάστηκαν ερμηνεία. Επιπλέον, για τη μελέτη, χρειάζεται στοιχειώδης γνώση των μιγαδικών αριθμών, την οποία οι μαθητές μπορούν να αναζητήσουν και δεν αντίκειται στο πνεύμα των «δημιουργικών εργασιών». Για το δεύτερο πρόβλημα χρειάζεται καλή γνώση των απόλυτων τιμών ή στοιχειώδης γνώση μελέτης της συνάρτησης. Οι συγγραφείς πιστεύουν ότι στο πλαίσιο των «δημιουργικών εργασιών» οι μαθητές θα μπορούσαν να ασχοληθούν με τα παραπάνω προβλήματα. Τα Πρακτικά των συνεδρίων της ΕΜΕ βρίθουν από σχετικά θέματα. Ως παράδειγμα αναφέρουμε μία άλλη εφαρμογή και μία διαφορετική απόδειξη στο Πρόβλημα 2, που δόθηκε από τον Ηλία Αργυρόπουλο (2005). Η εφαρμογή της εργασίας μας δεν δοκιμάστηκε ακόμη στην τάξη, αφού ως ιδέα παρουσιάστηκε στο τέλος της χρονιά που πέρασε, όμως ήδη έχει προγραμματιστεί για το προσεχές μέλλον.

Βιβλιογραφία

1. G. Polya (1945) '*How to Solve It'*, Princeton University Press, Princeton and Oxford.
2. Silver, E. A. (1994) '*On mathematical problem posing'*, For the Learning of Mathematics, Vol 14 (No 1), 19–28.
3. Jasmina Milinković (2015), '*Conceptualizing Problem Posing via Transformation'*, In F. M. Singer, N. F. Ellerton & J. Cai (Eds.), Mathematical Problem Posing: From research to effective practice (pp. 47-70). New York: Springer.
4. Ευγενία Κολέζα, (1997). «*Ο ρόλος των δραστηριοτήτων στη διδασκαλία των μαθηματικών»* (σελ. 71-81). Πρακτικά 14ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, Μυτιλήνη.
5. A.S. Posamentier, Ch.T. Salkind (1996). '*Challenging Problems in Geometry*', Dover Publications, New York.
6. A.S. Posamentier, Ch.T. Salkind. '*Challenging Problems in Algebra'*, Dover Publications, New York.
7. P.N. Njeru, X.-P. Guo, (2016), '*Accelerated SOR-like (ASOR) method for augmented systems'*, BIT Numer. Math., no 56, 557-571.
8. Ηλίας Αργυρόπουλος (2005) «Ένα διακριτό δυναμικό οικονομικό σύστημα και το μαθηματικό του μοντέλο» (σελ. 147-154), Πρακτικά 22ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Εκδόσεις ΕΜΕ, Αθήνα.